Idee 2: Kopiere die Typen für jede Benutzung ...

- Wir erweitern Typen zu Typ-Schemata:

$$
\begin{array}{lcl}
t & ::= & \alpha \mid \mathbf{bool} \mid \mathbf{int} \mid (t_1, \ldots, t_m) \mid \mathsf{list}\ t \mid t_1 \to t_2 \\
\sigma & ::= & t \mid \forall\, \alpha_1, \ldots, \alpha_k . t
\end{array}
$$

- Achtung: Der Operator $\forall$ erscheint nur auf dem Top-Level !!!
- Typ-Schemata werden für **let**-definierte Variablen eingeführt.
- Bei deren Benutzung wird der Typ im Schema mit frischen Typ-Variablen instantiiert ...

Neue Regeln:

$$\text{Inst:} \quad \frac{\Gamma(x) = \forall\, \alpha_1, \ldots, \alpha_k . t}{\Gamma \;\vdash\; x \;:\; t[t_1/\alpha_1, \ldots, t_k/\alpha_k]} \qquad (t_1, \ldots, t_k \quad \text{beliebig})$$

$$\text{Let:} \quad \frac{\begin{array}{lllll} \Gamma_0 & \vdash & e_1 & : & t_1 \qquad \Gamma_1 = \Gamma_0 \oplus \{x_1 \mapsto \mathsf{close}\; t_1\; \Gamma_0\} \\ & \ldots & & & \qquad\qquad \ldots \\ \Gamma_{m-1} & \vdash & e_m & : & t_m \qquad \Gamma_m = \Gamma_{m-1} \oplus \{x_m \mapsto \mathsf{close}\; t_m\; \Gamma_{m-1}\} \\ \Gamma_m & \vdash & e_0 & : & t_0 \end{array}}{\Gamma_0 \;\vdash\; (\mathbf{let}\; x_1 = e_1; \ldots; x_m = e_m\; \mathbf{in}\; e_0) \;:\; t_0}$$

Der Aufruf $\text{close}\ t\ \Gamma$ macht alle Typ-Variablen in t generisch (d.h. instantiierbar), die nicht auch in Γ vorkommen ...

$$
\begin{array}{l}
\textbf{fun}\ \ \text{close}\ t\ \Gamma \ \ = \ \ \textbf{let} \\
\qquad\qquad \textbf{val}\ \ \alpha_1, \ldots, \alpha_k = \text{free}\,(t) \setminus \text{free}\,(\Gamma) \\
\qquad\qquad \textbf{in}\ \ \forall\, \alpha_1, \ldots, \alpha_k.\, t \\
\qquad\qquad \textbf{end}
\end{array}
$$

Eine Instantiierung mit frischen Typ-Variablen leistet die Funktion:

$$
\begin{array}{l}
\textbf{fun}\ \ \text{inst}\ \sigma \ \ = \ \ \textbf{let} \\
\qquad\qquad \textbf{val}\ \ \forall\, \alpha_1, \ldots, \alpha_k.\, t = \sigma \\
\qquad\qquad \textbf{val}\ \ \beta_1 = \text{new}() \quad \ldots \quad \textbf{val}\ \ \beta_k = \text{new}() \\
\qquad\qquad \textbf{in}\ \ t[\beta_1/\alpha_1, \ldots, \beta_k/\alpha_k] \\
\qquad\qquad \textbf{end}
\end{array}
$$

Der Algorithmus $\mathcal{W}$ (erweitert):

$$
\begin{array}{lll}
 & \ldots & \\
| & x & \to \quad \mathsf{inst}\ (\Gamma(x)) \\
| & (\mathbf{let}\ x_1 = e_1; \ldots; x_m = e_m\ \mathbf{in}\ e_0) & \\
 & & \to \quad \mathbf{let}\ \ \mathbf{val}\ \ (t_1, \theta) = \mathcal{W}\ e_1\ (\Gamma, \theta) \\
 & & \qquad\qquad \mathbf{val}\ \ \sigma_1 = \mathsf{close}\ (\theta\ t_1)\ (\theta\ \Gamma) \\
 & & \qquad\qquad \mathbf{val}\ \ \Gamma = \Gamma \oplus \{x_1 \mapsto \sigma_1\} \\
 & & \qquad\qquad\qquad \ldots \\
 & & \qquad\qquad \mathbf{val}\ \ (t_m, \theta) = \mathcal{W}\ e_m\ (\Gamma, \theta) \\
 & & \qquad\qquad \mathbf{val}\ \ \sigma_m = \mathsf{close}\ (\theta\ t_m)\ (\theta\ \Gamma) \\
 & & \qquad\qquad \mathbf{val}\ \ \Gamma = \Gamma \oplus \{x_m \mapsto \sigma_m\} \\
 & & \qquad\qquad \mathbf{val}\ \ (t_0, \theta) = \mathcal{W}\ e_0\ (\Gamma, \theta) \\
 & \quad\ \mathbf{in}\ \ (t_0, \theta) & \\
 & \quad\ \mathbf{end} &
\end{array}
$$

Beispiel:

$$\begin{array}{lllllll}
\textbf{let} & \mathsf{dup} & = & \textbf{fn}\ f & \Rightarrow & \textbf{fn}\ x & \Rightarrow\ f\ (f\ x); \\
 & \mathsf{inc} & = & \textbf{fn}\ y & \Rightarrow & y+1; & \\
 & \mathsf{single} & = & \textbf{fn}\ y & \Rightarrow & y : [\,] & \\
\textbf{in} & \multicolumn{6}{l}{\mathsf{dup}\ \mathsf{single}\ (\mathsf{dup}\ \mathsf{inc}\ 1)} \\
\textbf{end} & & & & & &
\end{array}$$

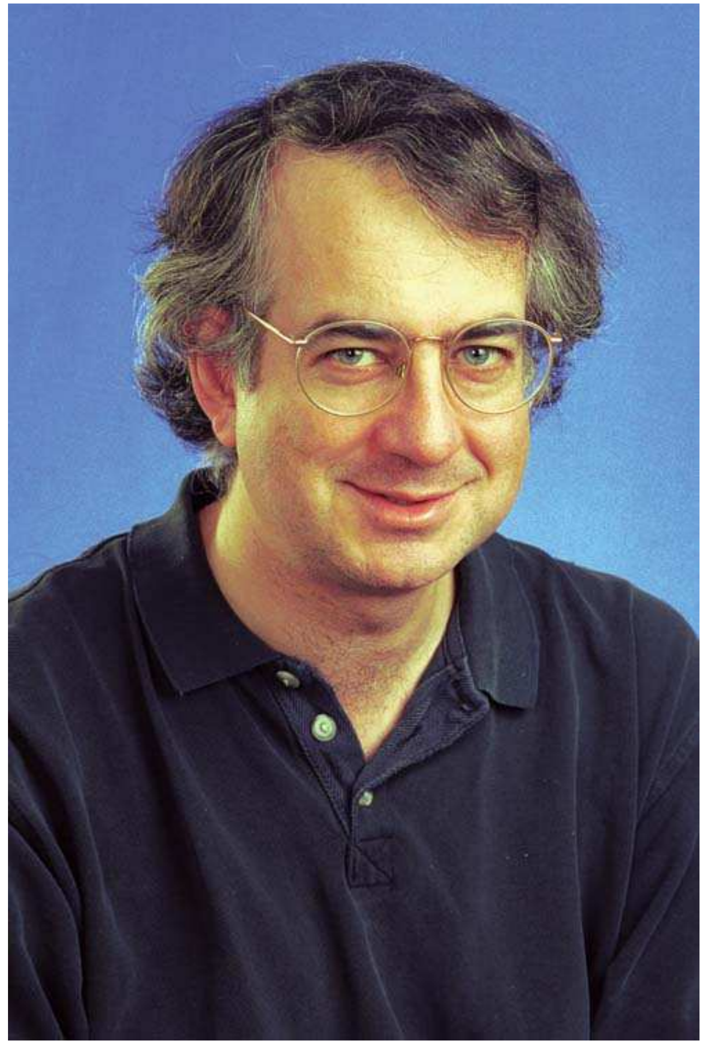
Wir finden:

$$\begin{array}{lll}
\alpha[\mathsf{dup}] & = & \forall\,\alpha,\beta.\,(\alpha\to\beta)\to\alpha\to\beta \\
\alpha[\mathsf{inc}] & = & \textbf{int}\to\textbf{int} \\
\alpha[\mathsf{single}] & = & \forall\,\gamma.\,\gamma\to\mathsf{list}\ \gamma
\end{array}$$

Bemerkungen:

- Der erweiterte Algorithmus berechnet nach wie vor allgemeinste Typen :-)
- Instantiierung von Typ-Schemata bei jeder Benutzung ermöglicht polymorphe Funktionen sowie modulare Typ-Inferenz :-))
- Die Möglichkeit der Instantiierung erlaubt die Codierung von DEXPTIME-schwierigen Problemen in die Typ-Inferenz ??

  ... ein in der Praxis eher marginales Problem :-)
- Die Einführung von Typ-Schemata ist nur für nicht-rekursive Definitionen möglich: die Ermittlung eines allgemeinsten Typ-Schemas für rekursive Definitionen ist nicht berechenbar !!!



Harry Mairson, Brandeis University

Seiteneffekte

- Für ein elegantes Programmieren sind gelegentlich Variablen, deren Wert geändert werden kann, ganz nützlich :-)
- Darum erweitern wir unsere kleine Programmiersprache um Referenzen:

$$e \ ::= \ \ldots \ \mid \ \textbf{ref}\ e \ \mid \ !e \ \mid \ e_1 := e_2$$

Seiteneffekte

- Für ein elegantes Programmieren sind gelegentlich Variablen, deren Wert geändert werden kann, ganz nützlich :-)
- Darum erweitern wir unsere kleine Programmiersprache um Referenzen:

$$e \;::=\; \ldots \;\mid\; \textbf{ref}\; e \;\mid\; !e \;\mid\; e_1 := e_2$$

Beispiel:

$$
\begin{array}{llllll}
\textbf{let} & \mathsf{count} & = & \textbf{ref}\; 0; & & \\
 & \mathsf{new} & = & \textbf{fn}\; () \;\Rightarrow\; \textbf{let} & & \\
 & & & \qquad \mathsf{ret} & = & !\mathsf{count}; \\
 & & & \qquad \_ & = & \mathsf{count} := \mathsf{ret} + 1 \\
 & & & \quad \textbf{in}\; \mathsf{ret} & & \\
\textbf{in} & \multicolumn{5}{l}{\mathsf{new}() + \mathsf{new}()}
\end{array}
$$

Als neuen Typ benötigen wir:

$$t \quad ::= \quad \ldots \;\; \mathbf{ref}\; t \;\; \ldots$$

Neue Regeln:

Ref: $$\frac{\Gamma \;\vdash\; e \,:\, t}{\Gamma \;\vdash\; (\mathbf{ref}\; e) \,:\, \mathbf{ref}\; t}$$

Deref: $$\frac{\Gamma \;\vdash\; e \,:\, \mathbf{ref}\; t}{\Gamma \;\vdash\; (!\, e) \,:\, t}$$

Assign: $$\frac{\Gamma \;\vdash\; e_1 \,:\, \mathbf{ref}\; t \qquad \Gamma \;\vdash\; e_2 \,:\, t}{\Gamma \;\vdash\; (e_1 := e_2) \,:\, ()}$$

Achtung:

Diese Regeln vertragen sich nicht mit Polymorphie !!!

Beispiel:

$$\begin{array}{lll} \textbf{let } y & = & \textbf{ref } [\,]; \\ \_ & = & y \;:=\; 1 : (!\, y); \\ \_ & = & y \;:=\; \textbf{true} : (!\, y) \\ \textbf{in } 1 & & \end{array}$$

Achtung:

Diese Regeln vertragen sich nicht mit Polymorphie !!!

Beispiel:

$$\begin{array}{lllll} \textbf{let } y & = & \textbf{ref}\,[\,]; & & \\ \quad \_ & = & y & := & 1 : (!\,y); \\ \quad \_ & = & y & := & \textbf{true} : (!\,y) \\ \textbf{in } 1 & & & & \end{array}$$

Für y erhalten wir den Typ: $\forall\,\alpha.\,\textbf{ref}\,(\text{list}\ \alpha)$

$\Longrightarrow$ Die Typ-Inferenz liefert keinen Fehler

$\Longrightarrow$ Zur Laufzeit entsteht eine Liste mit **int** und **bool** :-(

Ausweg: Die Value-Restriction

- Generalisiere nur solche Typen, die Werte repräsentieren, d.h. keine Verweise auf Speicherstellen enthalten :-)
- Die Menge der Value-Typen lässt sich einfach beschreiben:

$$v \; ::= \; \textbf{bool} \;\mid\; \textbf{int} \;\mid\; \mathsf{list}\; v \;\mid\; (v_1, \ldots, v_m) \;\mid\; t \to t$$

Ausweg: Die Value-Restriction

- Generalisiere nur solche Typen, die Werte repräsentieren, d.h. keine Verweise auf Speicherstellen enthalten :-)
- Die Menge der Value-Typen lässt sich einfach beschreiben:

$$v \;::=\; \mathbf{bool} \;\mid\; \mathbf{int} \;\mid\; \mathsf{list}\; v \;\mid\; (v_1, \ldots, v_m) \;\mid\; t \to t$$

... im Beispiel:

Der Typ: $\mathbf{ref}\;(\mathsf{list}\;\alpha)$ ist kein Value-Typ.

Darum darf er nicht generalisiert werden $\Longrightarrow$ Problem gelöst :-)

Matthias Felleisen, Northeastern University

Schlussbemerkung:

- Polymorphie ist ein sehr nützliches Hilfsmittel bei der Programmierung :-)
- In Form von Templates hält es in Java 1.5 Einzug.
- In der Programmiersprache Haskell hat man Polymorphie in Richtung bedingter Polymorphie weiter entwickelt ...

Schlussbemerkung:

- Polymorphie ist ein sehr nützliches Hilfsmittel bei der Programmierung :-)
- In Form von Templates hält es in Java 1.5 Einzug.
- In der Programmiersprache Haskell hat man Polymorphie in Richtung bedingter Polymorphie weiter entwickelt ...

Beispiel:

$$
\begin{array}{llll}
\textbf{fun}\ \ \mathsf{member}\ x\ \mathsf{list} & = & \textbf{case}\ \ \mathsf{list} & \\
 & \textbf{of} & [\,] & \to\ \textbf{false} \\
 & \mid & h{::}t & \to\ \textbf{if}\ \ x = h\ \ \textbf{then}\ \ \textbf{true} \\
 & & & \ \ \textbf{else}\ \ \mathsf{member}\ x\ t
\end{array}
$$

Schlussbemerkung:

- Polymorphie ist ein sehr nützliches Hilfsmittel bei der Programmierung :-)
- In Form von Templates hält es in Java 1.5 Einzug.
- In der Programmiersprache Haskell hat man Polymorphie in Richtung bedingter Polymorphie weiter entwickelt ...

Beispiel:

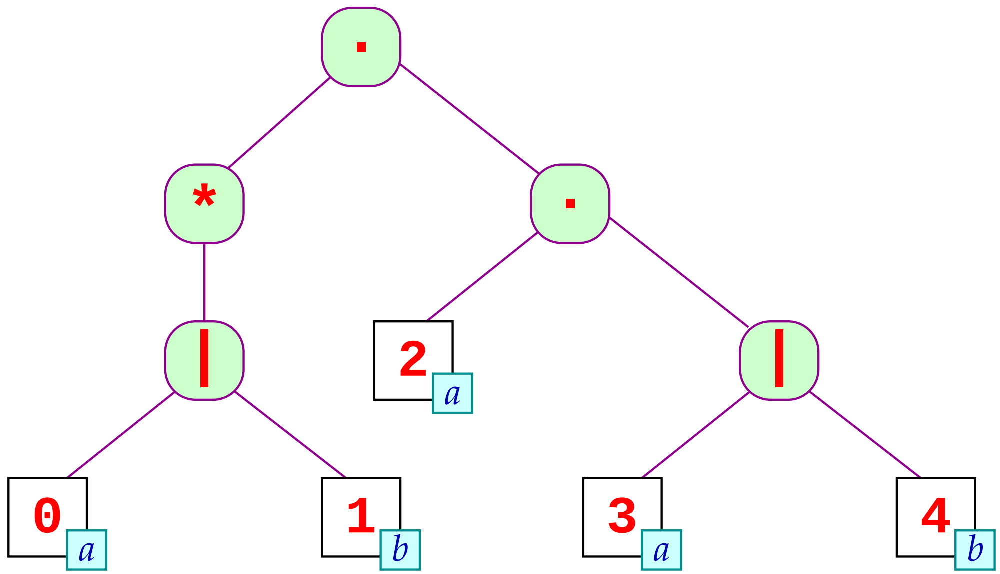
$$
\begin{array}{llll}
\textbf{fun}\ \ \mathsf{member}\ x\ \mathsf{list} & = & \textbf{case}\ \ \mathsf{list} & \\
 & & \textbf{of}\quad [\,] & \to\ \ \textbf{false} \\
 & & \mid\quad h{::}t & \to\ \ \textbf{if}\ \ x = h\ \ \textbf{then}\ \ \textbf{true} \\
 & & & \qquad \textbf{else}\ \ \mathsf{member}\ x\ t
\end{array}
$$

member hat den Typ: $\alpha' \to \mathsf{list}\ \alpha' \to \textbf{bool}$ für jedes α' mit Gleichheit !!

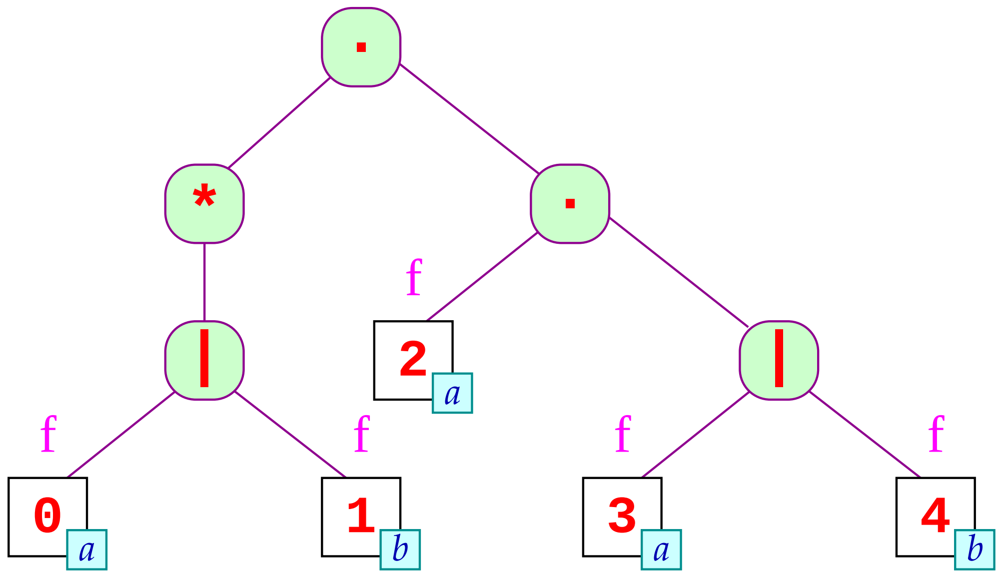
3.4 Attributierte Grammatiken

- Viele Berechnugen der semantischen Analyse wie während der Code-Generierung arbeiten auf über den Syntaxbaum.
- An jedem Knoten greifen sie auf bereits berechnete Informationen zu und berechnen daraus neue Informationen :-)
- Was lokal zu tun ist, hängt nur von der Sorte des Knotens ab !!!
- Damit die zu lesenden Werte an jedem Knoten bei jedem Lesen bereits vorliegen, müssen die Knoten des Syntaxbaums in einer bestimmten Reihenfolge durchlaufen werden ...

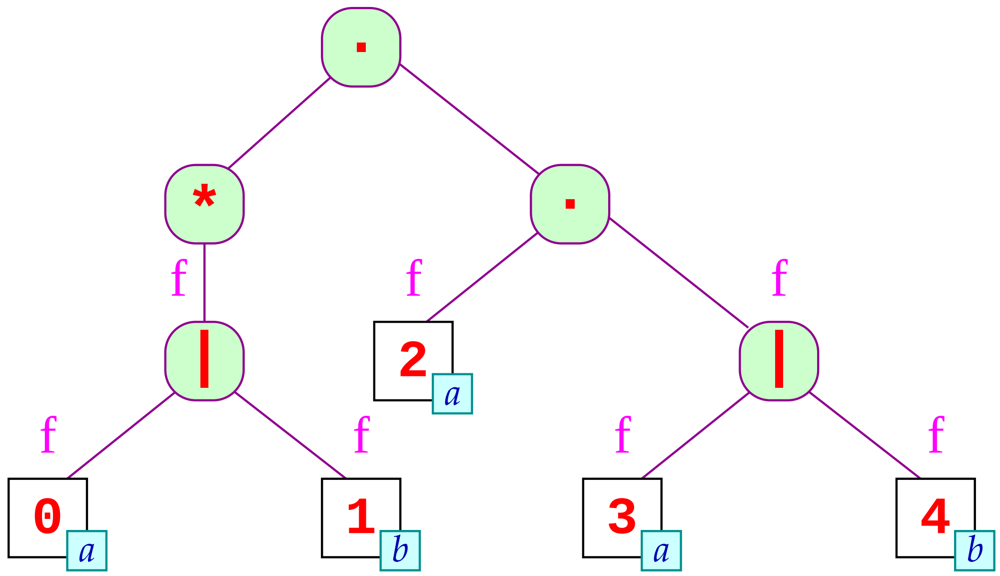
Beispiel: Berechnung des Prädikats $\textsf{empty}[r]$



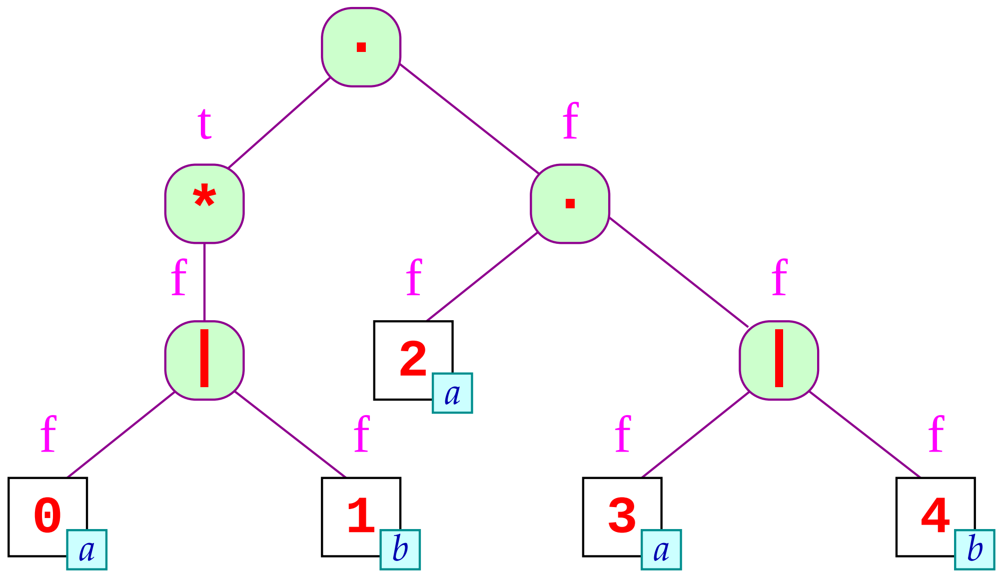
Beispiel: Berechnung des Prädikats $\mathsf{empty}[r]$



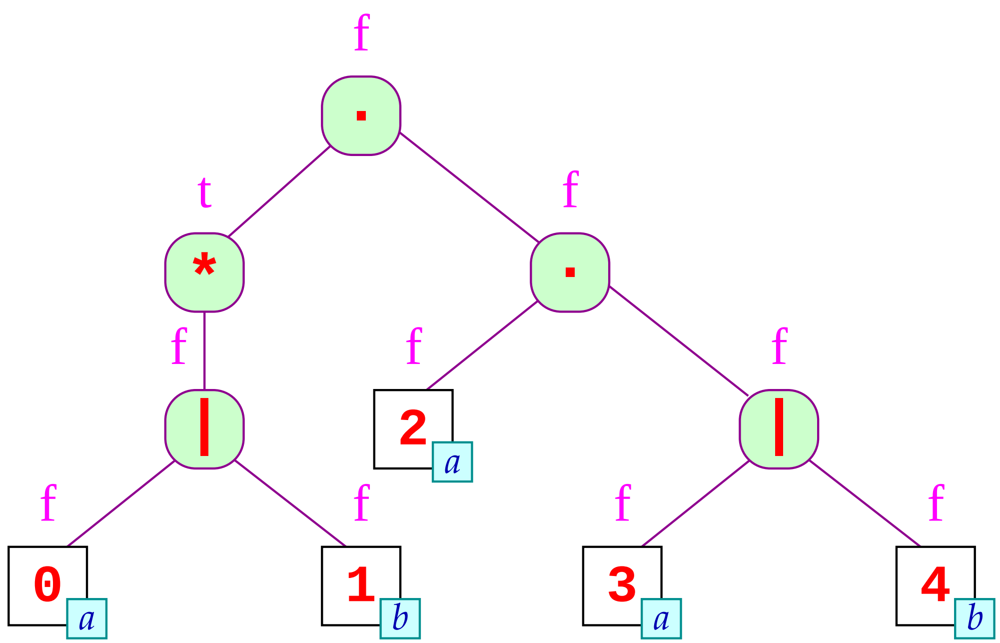
Beispiel: Berechnung des Prädikats empty$[r]$



Beispiel: Berechnung des Prädikats $\text{empty}[r]$



Beispiel: Berechnung des Prädikats empty$[r]$



Idee zur Implementierung:

- Für jeden Knoten führen wir ein Attribut empty ein.
- Die Attribute werden in einer DFS post-order Traversierung berechnet:
  - → An einem Blatt lässt sich der Wert des Attributs unmittelbar ermitteln ;-)
  - → Das Attribut an einem inneren Knoten hängt darum nur von den Attributen der Nachfolger ab :-)
- Wie das Attribut lokal zu berechnen ist, ergibt sich aus dem Typ des Knotens ...

Für Blätter $r \equiv \boxed{i \mid x}$ ist $\mathsf{empty}[r] = (x \equiv \epsilon)$.

Andernfalls:

$$
\begin{array}{lll}
\mathsf{empty}[r_1 \mid r_2] & = & \mathsf{empty}[r_1] \vee \mathsf{empty}[r_2] \\
\mathsf{empty}[r_1 \cdot r_2] & = & \mathsf{empty}[r_1] \wedge \mathsf{empty}[r_2] \\
\mathsf{empty}[r_1^*] & = & t \\
\mathsf{empty}[r_1?] & = & t
\end{array}
$$

Diskussion:

- Wir benötigen einen einfachen und flexiblen Mechanismus, mit dem wir über die Attribute an einem Knoten und seinen Nachfolgern reden können.
- Der Einfachheit geben wir ihnen einen fortlaufenden Index:

  $\mathsf{empty}[0]$: das Attribut des Vater-Knotens

  $\mathsf{empty}[i]$: das Attribut des i-ten Sohns $\quad (i > 0)$

Diskussion:

- Wir benötigen einen einfachen und flexiblen Mechanismus, mit dem wir über die Attribute an einem Knoten und seinen Nachfolgern reden können.
- Der Einfachheit geben wir ihnen einen fortlaufenden Index:

$\text{empty}[0]$: das Attribut des Vater-Knotens

$\text{empty}[i]$: das Attribut des i-ten Sohns $(i > 0)$

... im Beispiel:

$$
\begin{array}{llll}
\boxed{x} & : & \text{empty}[0] & := & (x \equiv \epsilon) \\
\boxed{|} & : & \text{empty}[0] & := & \text{empty}[1] \vee \text{empty}[2] \\
\boxed{\cdot} & : & \text{empty}[0] & := & \text{empty}[1] \wedge \text{empty}[2] \\
\boxed{*} & : & \text{empty}[0] & := & t \\
\boxed{?} & : & \text{empty}[0] & := & t
\end{array}
$$

Diskussion:

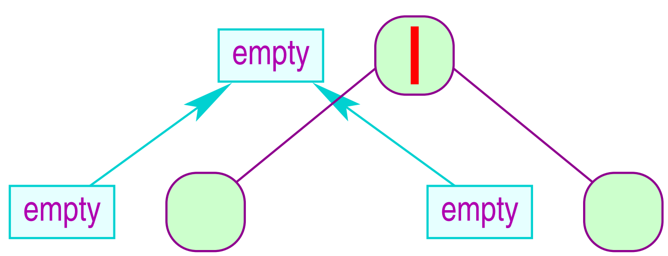
- Die lokalen Berechnungen der Attributwerte müssen zu einem globalen Algorithmus zusammen gesetzt werden :-)
- Dazu benötigen wir:

  (1) eine Besuchsreihenfolge der Knoten des Baums;

  (2) lokale Berechnungsreihenfolgen ...

- Die Auswertungsstrategie sollte aber mit den Attribut-Abhängigkeiten kompatibel sein :-)

... im Beispiel:



Achtung:

- Zur Ermittlung einer Auswertungsstrategie reicht es nicht, sich die lokalen Attribut-Abhängigkeiten anzusehen.
- Es kommt auch darauf an, wie sie sich global zu einem Abhängigkeitsgraphen zusammen setzen !!!
- Im Beispiel sind die Abhängigkeiten stets von den Attributen der Söhne zu den Attributen des Vaters gerichtet.

  $\Longrightarrow$ Postorder-DFS-Traversierung
- Die Variablen-Abhängigkeiten können aber auch komplizierter sein ...

Beispiel: Simultane Berechnung von empty, first, next :

$$
\boxed{x} : \quad
\begin{array}{lcl}
\text{empty}[0] & := & (x \equiv \epsilon) \\
\text{first}[0] & := & \{x \mid x \neq \epsilon\} \\
 & & // \quad \text{(keine Gleichung für next !!!)}
\end{array}
$$

$$
\boxed{\text{root:}} : \quad
\begin{array}{lcl}
\text{empty}[0] & := & \text{empty}[1] \\
\text{first}[0] & := & \text{first}[1] \\
\text{next}[0] & := & \emptyset \\
\text{next}[1] & := & \text{next}[0]
\end{array}
$$