Gesucht: möglichst kleine Lösung für:

$$x_i \sqsupseteq f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n \qquad (*)$$

wobei alle $f_i : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$ monoton sind.

Gesucht: möglichst kleine Lösung für:

$$x_i \sqsupseteq f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n \qquad (*)$$

wobei alle $f_i : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$ monoton sind.

Idee:

- Betrachte $F : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ mit

$$F(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \quad \text{wobei} \quad y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n).$$

Gesucht: möglichst kleine Lösung für:

$$x_i \sqsupseteq f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n \qquad (*)$$

wobei alle $f_i : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$ monoton sind.

Idee:

- Betrachte $F : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ mit

  $$F(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \quad \text{wobei} \quad y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n).$$

- Sind alle f_i monoton, dann auch F :-)

Gesucht: möglichst kleine Lösung für:

$$x_i \sqsupseteq f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n \qquad (*)$$

wobei alle $f_i : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$ monoton sind.

Idee:

- Betrachte $F : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ mit

  $$F(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \quad \text{wobei} \quad y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n).$$

- Sind alle f_i monoton, dann auch F :-)
- Wir approximieren sukzessive eine Lösung. Wir konstruieren:

  $$\underline{\bot}, \quad F\,\underline{\bot}, \quad F^2\,\underline{\bot}, \quad F^3\,\underline{\bot}, \quad \ldots$$

Hoffnung: Wir erreichen irgendwann eine Lösung ... ???

Beispiel:

$\mathbb{D} = 2^{\{a,b,c\}}, \quad \sqsubseteq = \subseteq$

$$\begin{array}{lcl} x_1 & \supseteq & \{a\} \cup x_3 \\ x_2 & \supseteq & x_3 \cap \{a, b\} \\ x_3 & \supseteq & x_1 \cup \{c\} \end{array}$$

Beispiel:

$$\mathbb{D} = 2^{\{a,b,c\}}, \quad \sqsubseteq = \subseteq$$

$$\begin{array}{lcl} x_1 & \supseteq & \{a\} \cup x_3 \\ x_2 & \supseteq & x_3 \cap \{a, b\} \\ x_3 & \supseteq & x_1 \cup \{c\} \end{array}$$

Die Iteration:

	0	1	2	3	4
x_1	$\emptyset$				
x_2	$\emptyset$				
x_3	$\emptyset$				

Beispiel:

$$\mathbb{D} = 2^{\{a,b,c\}}, \quad \sqsubseteq = \subseteq$$

$$\begin{array}{lcl} x_1 & \supseteq & \{a\} \cup x_3 \\ x_2 & \supseteq & x_3 \cap \{a, b\} \\ x_3 & \supseteq & x_1 \cup \{c\} \end{array}$$

Die Iteration:

	0	1	2	3	4
x_1	$\emptyset$	$\{a\}$			
x_2	$\emptyset$	$\emptyset$			
x_3	$\emptyset$	$\{c\}$			

Beispiel:

$$\mathbb{D} = 2^{\{a,b,c\}}, \quad \sqsubseteq = \subseteq$$

$$\begin{array}{lcl} x_1 & \supseteq & \{a\} \cup x_3 \\ x_2 & \supseteq & x_3 \cap \{a, b\} \\ x_3 & \supseteq & x_1 \cup \{c\} \end{array}$$

Die Iteration:

	0	1	2	3	4
x_1	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{a, c\}$		
x_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
x_3	$\emptyset$	$\{c\}$	$\{a, c\}$		

Beispiel:

$$\mathbb{D} = 2^{\{a,b,c\}}, \quad \sqsubseteq = \subseteq$$

$$\begin{array}{lcl} x_1 & \supseteq & \{a\} \cup x_3 \\ x_2 & \supseteq & x_3 \cap \{a, b\} \\ x_3 & \supseteq & x_1 \cup \{c\} \end{array}$$

Die Iteration:

	0	1	2	3	4
x_1	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{a, c\}$	$\{a, c\}$	
x_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{a\}$	
x_3	$\emptyset$	$\{c\}$	$\{a, c\}$	$\{a, c\}$	

Beispiel:

$$\mathbb{D} = 2^{\{a,b,c\}}, \quad \sqsubseteq = \subseteq$$

$$\begin{array}{lcl} x_1 & \supseteq & \{a\} \cup x_3 \\ x_2 & \supseteq & x_3 \cap \{a, b\} \\ x_3 & \supseteq & x_1 \cup \{c\} \end{array}$$

Die Iteration:

	0	1	2	3	4
x_1	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{a, c\}$	$\{a, c\}$	dito
x_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{a\}$	
x_3	$\emptyset$	$\{c\}$	$\{a, c\}$	$\{a, c\}$	

Offenbar gilt:

- Gilt $F^k \underline{\bot} = F^{k+1} \underline{\bot}$, ist eine Lösung gefunden :-)
- $\underline{\bot}, F \underline{\bot}, F^2 \underline{\bot}, \ldots$ bilden eine aufsteigende Kette :

$$\underline{\bot} \quad \sqsubseteq \quad F \underline{\bot} \quad \sqsubseteq \quad F^2 \underline{\bot} \quad \sqsubseteq \quad \ldots$$

- Sind alle aufsteigenden Ketten endlich, gibt es k immer.

Offenbar gilt:

- Gilt $F^k \underline{\bot} = F^{k+1} \underline{\bot}$, ist eine Lösung gefunden :-)
- $\underline{\bot}, F \underline{\bot}, F^2 \underline{\bot}, \ldots$ bilden eine aufsteigende Kette :

$$\underline{\bot} \quad \sqsubseteq \quad F \underline{\bot} \quad \sqsubseteq \quad F^2 \underline{\bot} \quad \sqsubseteq \quad \ldots$$

- Sind alle aufsteigenden Ketten endlich, gibt es k immer.

Die zweite Aussage folgt mit vollständiger Induktion:

Offenbar gilt:

- Gilt $F^k\,\underline{\bot} = F^{k+1}\,\underline{\bot}$, ist eine Lösung gefunden :-)
- $\underline{\bot}, F\,\underline{\bot}, F^2\,\underline{\bot}, \ldots$ bilden eine aufsteigende Kette :

$$\underline{\bot} \quad \sqsubseteq \quad F\,\underline{\bot} \quad \sqsubseteq \quad F^2\,\underline{\bot} \quad \sqsubseteq \quad \ldots$$

- Sind alle aufsteigenden Ketten endlich, gibt es k immer.

Die zweite Aussage folgt mit vollständiger Induktion:

Anfang: $F^0\,\underline{\bot} = \underline{\bot} \sqsubseteq F^1\,\underline{\bot}$:-)

Offenbar gilt:

- Gilt $F^k \underline{\bot} = F^{k+1} \underline{\bot}$, ist eine Lösung gefunden :-)
- $\underline{\bot}, F \underline{\bot}, F^2 \underline{\bot}, \ldots$ bilden eine aufsteigende Kette :

$$\underline{\bot} \quad \sqsubseteq \quad F \underline{\bot} \quad \sqsubseteq \quad F^2 \underline{\bot} \quad \sqsubseteq \quad \ldots$$

- Sind alle aufsteigenden Ketten endlich, gibt es k immer.

Die zweite Aussage folgt mit vollständiger Induktion:

Anfang: $F^0 \underline{\bot} = \underline{\bot} \sqsubseteq F^1 \underline{\bot}$:-)

Schluss: Gelte bereits $F^{i-1} \underline{\bot} \sqsubseteq F^i \underline{\bot}$. Dann

$$F^i \underline{\bot} = F\,(F^{i-1} \underline{\bot}) \sqsubseteq F\,(F^i \underline{\bot}) = F^{i+1} \underline{\bot}$$

da F monoton ist :-)

Fazit:

Wenn $\mathbb{D}$ endlich ist, finden wir mit Sicherheit eine Lösung :-)

Fragen:

Fazit:

Wenn $\mathbb{D}$ endlich ist, finden wir mit Sicherheit eine Lösung :-)

Fragen:

1. Gibt es eine kleinste Lösung ?

Fazit:

Wenn $\mathbb{D}$ endlich ist, finden wir mit Sicherheit eine Lösung :-)

Fragen:

1. Gibt es eine kleinste Lösung ?
2. Wenn ja: findet Iteration die kleinste Lösung ??

Fazit:

Wenn $\mathbb{D}$ endlich ist, finden wir mit Sicherheit eine Lösung :-)

Fragen:

1. Gibt es eine kleinste Lösung ?
2. Wenn ja: findet Iteration die kleinste Lösung ??
3. Was, wenn $\mathbb{D}$ nicht endlich ist ???

Satz — Kleene

In einer vollständigen Halbordnung $\mathbb{D}$ hat jede stetige Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ einen kleinsten Fixpunkt d_0.

Dieser ist gegeben durch $d_0 = \bigsqcup_{k \geq 0} f^k \bot$.

Satz — Kleene

In einer vollständigen Halbordnung $\mathbb{D}$ hat jede stetige Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ einen kleinsten Fixpunkt d_0.

Dieser ist gegeben durch $d_0 = \bigsqcup_{k \geq 0} f^k \bot$.

Bemerkung:

- Eine Funktion f heißt stetig, falls für jede aufsteigende Kette $d_0 \sqsubseteq \ldots \sqsubseteq d_m \sqsubseteq \ldots$ gilt: $f\,(\bigsqcup_{m \geq 0} d_m) = \bigsqcup_{m \geq 0} (f\, d_m)$.
- Werden alle aufsteigenden Ketten irgendwann stabil, ist jede monotone Funktion automatisch stetig :-)

Satz — Kleene

In einer vollständigen Halbordnung $\mathbb{D}$ hat jede stetige Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ einen kleinsten Fixpunkt d_0.

Dieser ist gegeben durch $d_0 = \bigsqcup_{k \geq 0} f^k \bot$.

Bemerkung:

- Eine Funktion f heißt stetig, falls für jede aufsteigende Kette $d_0 \sqsubseteq \ldots \sqsubseteq d_m \sqsubseteq \ldots$ gilt: $f\,(\bigsqcup_{m \geq 0} d_m) = \bigsqcup_{m \geq 0} (f\, d_m)$.
- Werden alle aufsteigenden Ketten irgendwann stabil, ist jede monotone Funktion automatisch stetig :-)
- Eine Halbordnung heißt vollständig (CPO), falls alle aufsteigenden Ketten kleinste obere Schranken haben :-)
- Jeder vollständige Verband ist auch eine vollständige Halbordnung :-)

Beweis:

(1) $f\,d_0 = d_0$:

$$\begin{aligned} f\,d_0 &= f\left(\bigsqcup_{m\geq 0}(f^m \bot)\right) \\ &= \bigsqcup_{m\geq 0}(f^{m+1}\bot) \qquad \text{wegen Stetigkeit} \quad \text{:-)} \\ &= \bot \sqcup \left(\bigsqcup_{m\geq 0}(f^{m+1}\bot)\right) \\ &= \bigsqcup_{m\geq 0}(f^m \bot) \\ &= d_0 \end{aligned}$$

(2) d_0 ist kleinster Fixpunkt:

Sei $f\,d_1 = d_1$ weiterer Fixpunkt. Wir zeigen: $\forall\, m \geq 0 :\ f^m \bot \sqsubseteq d_1$.

$m = 0$: $\quad \bot \sqsubseteq d_1$ nach Definition

$m > 0$: Gelte $f^{m-1}\bot \sqsubseteq d_1$ Dann folgt:

$$\begin{aligned} f^m \bot &= f\,(f^{m-1}\bot) \\ &\sqsubseteq f\,d_1 \qquad \text{wegen Monotonie} \quad \text{:-)} \\ &= d_1 \end{aligned}$$

Bemerkung:

- Jede stetige Funktion ist auch monoton :-)
- Betrachte die Menge der Postfixpunkte:

$$P = \{x \in \mathbb{D} \mid x \sqsupseteq f\, x\}$$

Der kleinste Fixpunkt d_0 ist in P und untere Schranke :-)

$\Longrightarrow$ d_0 ist der kleinste Wert x mit $x \sqsupseteq f\, x$

Bemerkung:

- Jede stetige Funktion ist auch monoton :-)
- Betrachte die Menge der Postfixpunkte:

$$P = \{x \in \mathbb{D} \mid x \sqsupseteq f\, x\}$$

Der kleinste Fixpunkt d_0 ist in P und untere Schranke :-)

$\Longrightarrow$ d_0 ist der kleinste Wert x mit $x \sqsupseteq f\, x$

Anwendung:

Sei $$x_i \sqsupseteq f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n \qquad (*)$$

ein Ungleichungssystem, wobei alle $f_i : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$ monoton sind.

Bemerkung:

- Jede stetige Funktion ist auch monoton :-)
- Betrachte die Menge der Postfixpunkte:

$$P = \{x \in \mathbb{D} \mid x \sqsupseteq f\, x\}$$

Der kleinste Fixpunkt d_0 ist in P und untere Schranke :-)

$\Longrightarrow$ d_0 ist der kleinste Wert x mit $x \sqsupseteq f\, x$

Anwendung:

Sei $$x_i \sqsupseteq f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n \qquad (*)$$

ein Ungleichungssystem, wobei alle $f_i : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$ monoton sind.

$\Longrightarrow$ kleinste Lösung von $(*)$ $=$ kleinster Fixpunkt von F :-)

Der Kleenesche Fixpunkt-Satz liefert uns nicht nur die Existenz einer kleinsten Lösung sondern auch eine Charakterisierung :-)

Satz

Die Mengen $\mathsf{First}_k(\{w \in T^* \mid A \to^* w\})$, $A \in N$, sind die kleinste Lösung des Ungleichungssystems:

$$\mathsf{First}_k(A) \quad \supseteq \quad \mathsf{First}_k(X_1) \odot \ldots \odot \mathsf{First}_k(X_m) \;, \quad A \to X_1 \ldots X_m \quad \in \quad P$$

Der Kleenesche Fixpunkt-Satz liefert uns nicht nur die Existenz einer kleinsten Lösung sondern auch eine Charakterisierung :-)

Satz

Die Mengen $\mathsf{First}_k(\{w \in T^* \mid A \to^* w\})$, $A \in N$, sind die kleinste Lösung des Ungleichungssystems:

$$\mathsf{First}_k(A) \quad \supseteq \quad \mathsf{First}_k(X_1) \odot \ldots \odot \mathsf{First}_k(X_m) \ , \quad A \to X_1 \ldots X_m \ \in \ P$$

Beweis-Idee:

Sei $\mathsf{F}^{(m)}(A)$ die m-te Approximation an den Fixpunkt.

(1) Falls $A \to^m u$, dann $\mathsf{First}_k(u) \subseteq \mathsf{F}^{(m)}(A)$.

(2) Falls $w \in \mathsf{F}^{(m)}(A)$, dann $A \to^* u$ für $u \in T^*$ mit $\mathsf{First}_k(u) = \{w\}$:-)

Fazit:

Wir können First_k durch Fixpunkt-Iteration berechnen, d.h. durch wiederholtes Einsetzen :-)

Fazit:

Wir können First_k durch Fixpunkt-Iteration berechnen, d.h. durch wiederholtes Einsetzen :-)

Achtung:

Naive Fixpunkt-Iteration ist ziemlich ineffizient :-(

Fazit:

Wir können First_k durch Fixpunkt-Iteration berechnen, d.h. durch wiederholtes Einsetzen :-)

Achtung: Naive Fixpunkt-Iteration ist ziemlich ineffizient :-(

Idee: Round Robin Iteration

Benutze bei der Iteration nicht die Werte der letzten Iteration, sondern die jeweils aktuellen :-)

Unser Mini-Beispiel:

$\mathbb{D} = 2^{\{a,b,c\}}, \quad \sqsubseteq = \subseteq$

$$\begin{array}{lcl} x_1 & \supseteq & \{a\} \cup x_3 \\ x_2 & \supseteq & x_3 \cap \{a, b\} \\ x_3 & \supseteq & x_1 \cup \{c\} \end{array}$$

Die Round-Robin-Iteration:

	1	2	3
x_1	$\{a\}$	$\{a, c\}$	dito
x_2	$\emptyset$	$\{a\}$	
x_3	$\{a, c\}$	$\{a, c\}$	

Der Code für Round Robin Iteration sieht in Java so aus:

```
for (i = 1; i ≤ n; i++) x_i = ⊥;
do {
        finished = true;
        for (i = 1; i ≤ n; i++) {
                new = f_i(x_1, ..., x_n);
                if (!(x_i ⊒ new)) {
                        finished = false;
                        x_i = x_i ⊔ new;
                }
        }
} while (!finished);
```

Zur Korrektheit:

Sei $y_i^{(d)}$ die i-te Komponente von $F^d \underline{\perp}$.

Sei $x_i^{(d)}$ der Wert von x_i nach der i-ten RR-Iteration.

Zur Korrektheit:

Sei $y_i^{(d)}$ die i-te Komponente von $F^d \underline{\bot}$.

Sei $x_i^{(d)}$ der Wert von x_i nach der i-ten RR-Iteration.

Man zeigt:

(1) $y_i^{(d)} \sqsubseteq x_i^{(d)}$:-)

Zur Korrektheit:

Sei $y_i^{(d)}$ die i-te Komponente von $F^d \underline{\bot}$.

Sei $x_i^{(d)}$ der Wert von x_i nach der i-ten RR-Iteration.

Man zeigt:

(1) $y_i^{(d)} \sqsubseteq x_i^{(d)}$:-)

(2) $x_i^{(d)} \sqsubseteq z_i$ für jede Lösung $(z_1, \ldots, z_n)$:-)

Zur Korrektheit:

Sei $y_i^{(d)}$ die i-te Komponente von $F^d \underline{\bot}$.

Sei $x_i^{(d)}$ der Wert von x_i nach der i-ten RR-Iteration.

Man zeigt:

(1) $y_i^{(d)} \sqsubseteq x_i^{(d)}$:-)

(2) $x_i^{(d)} \sqsubseteq z_i$ für jede Lösung $(z_1, \ldots, z_n)$:-)

(3) Terminiert RR-Iteration nach d Runden, ist $(x_1^{(d)}, \ldots, x_n^{(d)})$ eine Lösung :-))

Unsere Anwendung:

$$
\begin{array}{lcll}
\mathsf{First}_2(E) & \supseteq & \mathsf{First}_2(E) \odot \{+\} \odot \mathsf{First}_2(T) & \cup \quad \mathsf{First}_2(T) \\
\mathsf{First}_2(T) & \supseteq & \mathsf{First}_2(T) \odot \{*\} \odot \mathsf{First}_2(F) & \cup \quad \mathsf{First}_2(F) \\
\mathsf{First}_2(F) & \supseteq & \{(\} \odot \mathsf{First}_2(E) \odot \{)\} & \cup \quad \{\mathsf{name}, \mathsf{int}\}
\end{array}
$$

Die RR-Iteration:

First_2	1	2	3
F	name, int	(name, (int	((
T	name, int	(name, (int, name $*$, int $*$	((
E	name, int	(name, (int, name $*$, int $*$, name $+$, int $+$	((

Der Einfachkeit halber haben wir in jeder Iteration nur die neuen Elemente vermerkt :-)

Diskussion:

- Die Länge h der längsten echt aufsteigenden Kette nennen wir auch Höhe von $\mathbb{D}$ ...
- Im Falle von First_k ist die Höhe des Verbands exponentiell in k :-(
- Die Anzahl der Runden von RR-Iteration ist beschränkt durch $\mathcal{O}(n \cdot h)$ (n die Anzahl der Variablen)
- Die praktische Effizienz von RR-Iteration hängt allerdings auch von der Anordnung der Variablen ab :-)
- Anstelle von RR-Iteration gibt es auch schnellere Fixpunkt-Verfahren, die aber im schlimmsten Fall immer noch exponentiell sind :-((

$\Longrightarrow$ Man beschränkt sich i.a. auf kleine k !!!

2.4 Topdown Parsing

Idee:

- Benutze den Item-Kellerautomaten.
- Benutze die nächsten k Zeichen, um die Regeln für die Expansionen zu bestimmen ;-)
- Eine Grammatik heißt LL(k) , falls dies immer eindeutig möglich ist.

2.4 Topdown Parsing

Idee:

- Benutze den Item-Kellerautomaten.
- Benutze die nächsten k Zeichen, um die Regeln für die Expansionen zu bestimmen ;-)
- Eine Grammatik heißt LL(k) , falls dies immer eindeutig möglich ist.

Wir definieren:

Eine reduzierte Grammatik heißt dann LL(k), falls für je zwei verschiedene Regeln $A \to \alpha$, $A \to \alpha' \in P$ und jede Ableitung $S \to_L^* u\, A\, \beta$ mit $u \in T^*$ gilt:

$$\mathsf{First}_k(\alpha\,\beta) \cap \mathsf{First}_k(\alpha'\,\beta) = \emptyset$$

Beispiel 1:

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & \mathsf{if}\ (\ E\ )\ S\ \mathsf{else}\ S \quad | \\
 & & \mathsf{while}\ (\ E\ )\ S \quad | \\
 & & E\ ; \\
E & \rightarrow & \mathsf{id}
\end{array}
$$

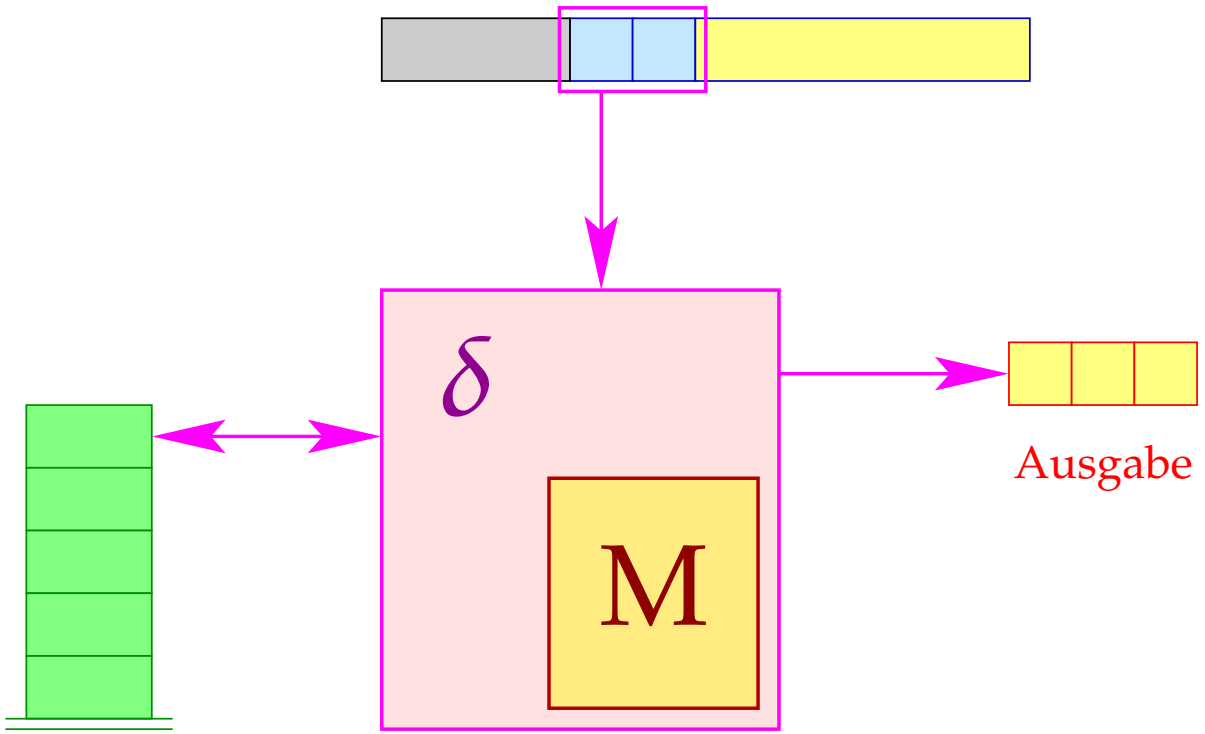
ist LL(1), da $\quad \mathsf{First}_k(E) = \{\mathsf{id}\} \quad$:-)

Beispiel 2:

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & \mathsf{if}\ (\ E\ )\ S\ \mathsf{else}\ S \quad | \\
 & & \mathsf{if}\ (\ E\ )\ S \quad | \\
 & & \mathsf{while}\ (\ E\ )\ S \quad | \\
 & & E\ ; \\
E & \rightarrow & \mathsf{id}
\end{array}
$$

... ist nicht LL(k) für jedes $k > 0$.

Struktur des Parsers:



- Der Parser sieht ein Fenster der Länge k der Eingabe;
- er realisiert im Wesentlichen den Item-Kellerautomaten;
- die Tabelle $M[q, w]$ enthält die jeweils zuwählende Regel – in Abhängigkeit von Zustand und Vorausschau :-)