... im Beispiel:

$$
\begin{array}{lll}
S & \rightarrow & \mathsf{if}\ (\ E\ )\ S\ \mathsf{else}\ S\ ^{0} \quad | \\
 & & \mathsf{while}\ (\ E\ )\ S\ ^{1} \quad | \\
 & & E\ ;\ ^{2} \\
E & \rightarrow & \mathsf{id}\ ^{0}
\end{array}
$$

Zustände: Items

Tabelle:

	if	while	id
$[\ldots \rightarrow \ldots \bullet S \ldots]$	0	1	2
$[\ldots \rightarrow \ldots \bullet E \ldots]$	–	–	0

Im Allgemeinen ...

- ist die Menge der möglichen nächsten k Zeichen gegeben durch:

$$\mathsf{First}_k(\alpha\,\beta) \;=\; \mathsf{First}_k(\alpha) \odot \mathsf{First}_k(\beta)$$

  wobei:

  (1) α die rechte Seite der passenden Regel;

  (2) β ein möglicher rechter Kontext von A ist :-)

- $\mathsf{First}_k(\beta)$ müssen wir dynamisch akkumulieren.

$\Longrightarrow$ Wir erweitern Items um Vorausschau-Mengen ...

Ein erweitertes Item ist ein Paar: $[A \to \alpha \bullet \beta\, ,\; L] \quad (A \to \alpha\, \beta \;\in\; P,\; L \subseteq T^{\leq k})$

Die Menge L benutzen wir, um $\mathsf{First}_k(\beta)$ für den rechten Kontext β von A zu repräsentieren :-)

Ein erweitertes Item ist ein Paar: $[A \to \alpha \bullet \beta\,,\; L]$ $\quad (A \to \alpha\,\beta \;\in\; P,\; L \subseteq T^{\leq k})$

Die Menge L benutzen wir, um $\mathsf{First}_k(\beta)$ für den rechten Kontext β von A zu repräsentieren :-)

Konstruktion:

Zustände: erweiterte Items

Anfangszustand: $[S' \to \bullet\; S,\; \{\epsilon\}]$

Endzustand: $[S' \to S \bullet,\; \{\epsilon\}]$

Übergänge:

Ein erweitertes Item ist ein Paar: $[A \to \alpha \bullet \beta\,,\; L]$ $(A \to \alpha\,\beta \;\in\; P,\; L \subseteq T^{\leq k})$

Die Menge L benutzen wir, um $\text{First}_k(\beta)$ für den rechten Kontext β von A zu repräsentieren :-)

Konstruktion:

Zustände: erweiterte Items

Anfangszustand: $[S' \to \bullet\; S,\; \{\epsilon\}]$

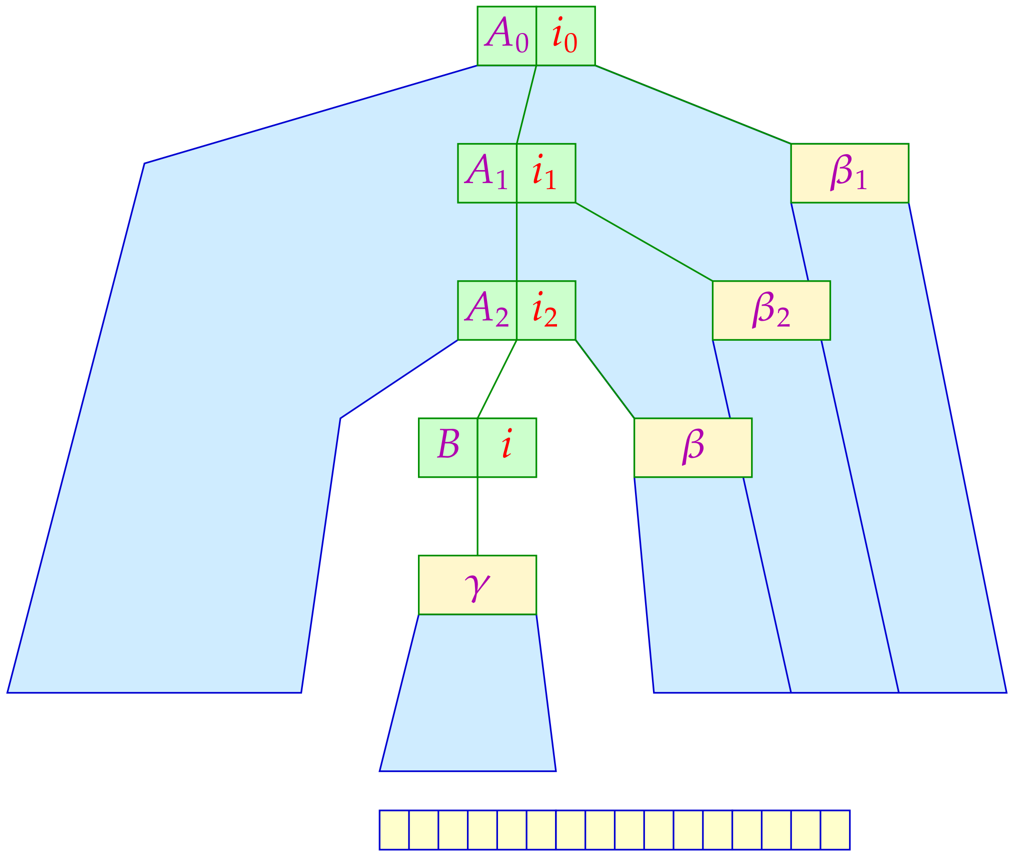
Endzustand: $[S' \to S\,\bullet,\; \{\epsilon\}]$

Übergänge:

Expansionen: $([A \to \alpha \bullet B\,\beta\,,\; L], \epsilon, [A \to \alpha \bullet B\,\beta\,,\; L]\,[B \to \bullet\,\gamma\,,\; \boxed{\text{First}_k(\beta) \odot L}])$ für $A \to \alpha\,B\,\beta,\; B \to \gamma \;\in\; P$

Shifts: $([A \to \alpha \bullet a\,\beta\,,\; L], a, [A \to \alpha\,a \bullet \beta\,,\; L])$ für $A \to \alpha\,a\,\beta \;\in\; P$

Reduce: $([A \to \alpha \bullet B\,\beta\,,\; L]\,[B \to \gamma \bullet,\; L'], \epsilon, [A \to \alpha\,B \bullet \beta\,,\; L])$ für $A \to \alpha\,B\,\beta,\; B \to \gamma \;\in\; P$



Die Vorausschau-Tabelle:

Wir setzen $M[\,[A \to \alpha \bullet B\,\beta\,,\,L],\,w] \;=\; i$ genau dann wenn (B, i) die Regel $B \to \gamma$ ist und: $w \in \mathsf{First}_k(\gamma) \odot \mathsf{First}_k(\beta) \odot L$

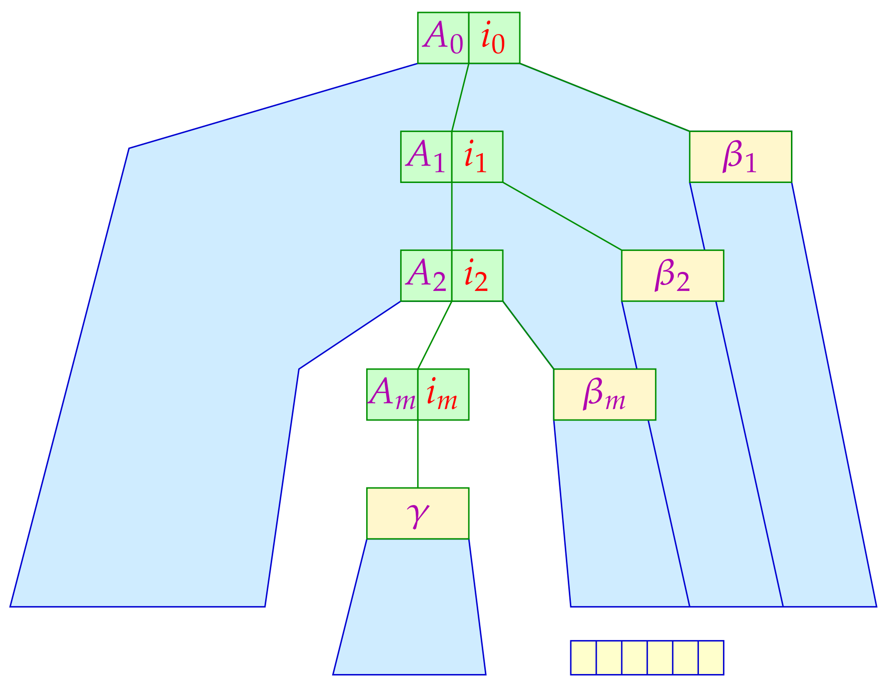
$$([A_0 \to \bullet\, \alpha_1\, A_1\, \beta_1,\ L_1],\ uv) \quad \vdash^* \quad ([A_0 \to \alpha_1 \bullet A_1\, \beta_1,\ L_1] \ldots [A_{m-1} \to \alpha_m \bullet A_m\, \beta_m,\ L_m],\ v)$$

$$\vdash^* \quad ([A_0 \to \alpha_1\, A_1\, \beta_1 \bullet,\ L_1],\ \epsilon) \quad \ldots \quad \text{gilt genau dann wenn:}$$

(1) $\alpha_1 \ldots \alpha_m \to^* u$

(2) $A_m\, \beta_m \ldots \beta_1 \to^* v$

(3) $L_m = \mathsf{First}_k(\beta_{m-1}) \odot \ldots \odot \mathsf{First}_k(\beta_1) \odot L_1$



Satz

Die reduzierte kontextfreie Grammatik G ist LL(k) genau dann wenn die k-Vorausschau-Tabelle für alle benötigten erweiterten Items wohl-definiert ist.

Diskussion:

- Der erweiterte Item-Kellerautomat zusammen mit einer k-Vorausschau-Tabelle erlaubt die deterministische Rekonstruktion einer Links-Ableitung :-)
- Die Anzahl der Vorausschau-Mengen L kann sehr groß sein :-(
- ...

Beispiel:

$$S \to \epsilon \quad | \quad a\,S\,b$$

Die Übergänge des erweiterten Item-Kellerautomat $\quad (k = 1)$:

0	$[S' \to \bullet\, S, \{\epsilon\}]$	ϵ	$[S' \to \bullet\, S, \{\epsilon\}]\,[S \to \bullet, \{\epsilon\}]$
1	$[S' \to \bullet\, S, \{\epsilon\}]$	ϵ	$[S' \to \bullet\, S, \{\epsilon\}]\,[S \to \bullet\, a\,S\,b, \{\epsilon\}]$
2	$[S \to \bullet\, a\,S\,b, \{\epsilon\}]$ $[S \to \bullet\, a\,S\,b, \{b\}]$	a a	$[S \to a \bullet S\,b, \{\epsilon\}]$ $[S \to a \bullet S\,b, \{b\}]$
3	$[S \to a \bullet S\,b, \{\epsilon\}]$ $[S \to a \bullet S\,b, \{b\}]$	ϵ ϵ	$[S \to a \bullet S\,b, \{\epsilon\}]\,[S \to \bullet, \{b\}]$ $[S \to a \bullet S\,b, \{b\}]\,[S \to \bullet, \{b\}]$
4	$[S \to a \bullet S\,b.\{\epsilon\}]$ $[S \to a \bullet S\,b.\{b\}]$	ϵ ϵ	$[S \to a \bullet S\,b.\{\epsilon\}]\,[S \to \bullet\, a\,S\,b, \{b\}]$ $[S \to a \bullet S\,b.\{b\}]\,[S \to \bullet\, a\,S\,b, \{b\}]$
5	$[S \to a \bullet S\,b, \{\epsilon\}]\,[S \to \bullet, \{b\}]$ $[S \to a \bullet S\,b, \{b\}]\,[S \to \bullet, \{b\}]$	ϵ ϵ	$[S \to a\,S \bullet b, \{\epsilon\}]$ $[S \to a\,S \bullet b, \{b\}]$
	$\ldots$		$\ldots$

	…		…
6	$[S \to a \bullet S\, b, \{\epsilon\}]\ [S \to a\, S\, b \bullet, \{b\}]$	ϵ	$[S \to a\, S \bullet b, \{\epsilon\}]$
	$[S \to a \bullet S\, b, \{b\}]\ [S \to a\, S\, b \bullet, \{b\}]$	ϵ	$[S \to a\, S \bullet b, \{b\}]$
7	$[S \to a\, S \bullet b, \{\epsilon\}]$	b	$[S \to a\, S\, b \bullet, \{\epsilon\}]$
	$[S \to a\, S \bullet b, \{b\}]$	b	$[S \to a\, S\, b \bullet, \{b\}]$
8	$[S' \to \bullet\, S, \{\epsilon\}]\ [S \to \bullet, \{\epsilon\}]$	ϵ	$[S' \to S \bullet, \{\epsilon\}]$
9	$[S' \to \bullet\, S, \{\epsilon\}]\ [S \to a\, S\, b \bullet, \{\epsilon\}]$	ϵ	$[S' \to S \bullet, \{\epsilon\}]$

Die Vorausschau-Tabelle:

	ϵ	a	b
$[S' \to \bullet\, S, \{\epsilon\}]$	0	1	–
$[S \to a \bullet S\, b, \{\epsilon\}]$	–	1	0
$[S \to a \bullet S\, b, \{b\}]$	–	1	0

Beobachtung:

- Die auszuwählende Regel hängt hier ja gar nicht von den Erweiterungen der Items ab !!!
- Unter dieser Voraussetzung können wir den Item-Kellerautomaten ohne Erweiterung benutzen :-)
- Hängt die auszuwählende Regel nur von der aktuellen Vorausschau w ab, nennen wir G auch stark LL(k) ...

Beobachtung:

- Die auszuwählende Regel hängt hier ja gar nicht von den Erweiterungen der Items ab !!!
- Unter dieser Voraussetzung können wir den Item-Kellerautomaten ohne Erweiterung benutzen :-)
- Hängt die auszuwählende Regel nur von der aktuellen Vorausschau w ab, nennen wir G auch stark LL(k) ...

Wir definieren:

$$\mathsf{Follow}_k(A) = \bigcup\{\mathsf{First}_k(\beta) \mid S \rightarrow_L^* u\,A\,\beta\}\,.$$

Beobachtung:

- Die auszuwählende Regel hängt hier ja gar nicht von den Erweiterungen der Items ab !!!
- Unter dieser Voraussetzung können wir den Item-Kellerautomaten ohne Erweiterung benutzen :-)
- Hängt die auszuwählende Regel nur von der aktuellen Vorausschau w ab, nennen wir G auch stark LL(k) ...

Wir definieren:

$$\mathsf{Follow}_k(A) \;=\; \bigcup\{\mathsf{First}_k(\beta) \mid S \to_L^* u\, A\, \beta\}\,.$$

Die reduzierte kontextfreie Grammatik G heißt stark LL(k), falls für je zwei verschiedene $A \to \alpha\,,\; A \to \alpha' \;\in\; P$:

$$\mathsf{First}_k(\alpha) \odot \mathsf{Follow}_k(A) \;\cap\; \mathsf{First}_k(\alpha') \odot \mathsf{Follow}_k(A) \;=\; \emptyset$$

... im Beispiel:

$$S \to \epsilon \quad | \quad a\,S\,b$$

$$\begin{array}{lcl}
\mathsf{Follow}_1(S) & = & \{\epsilon, b\} \\
\\
\mathsf{First}_1(\epsilon) \odot \mathsf{Follow}_1(S) & = & \{\epsilon\} \odot \{\epsilon, b\} \quad = \quad \{\epsilon, b\} \\
\mathsf{First}_1(a\,S\,b) \odot \mathsf{Follow}_1(S) & = & \{a\} \odot \{\epsilon, b\} \quad = \quad \{a\}
\end{array}$$

Wir schließen: Die Grammatik ist in der Tat stark LL(1) :-)

Ist G eine starke LL(k)-Grammatik, können wir die Vorausschau-Tabelle statt mit (erweiterten) Items mit Nichtterminalen indizieren :-)

Wir setzen $M[B,\ w] = i$ genau dann wenn (B, i) die Regel $B \to \gamma$ ist und: $w \in \mathsf{First}_k(\gamma) \odot \mathsf{Follow}_k(B)$.

... im Beispiel:

$$S \to \epsilon \quad | \quad a\, S\, b$$

	ϵ	a	b
S	0	1	0

Ist G eine starke LL(k)-Grammatik, können wir die Vorausschau-Tabelle statt mit (erweiterten) Items mit Nichtterminalen indizieren :-)

Wir setzen $M[B,\ w] = i$ genau dann wenn (B, i) die Regel $B \to \gamma$ ist und: $w \in \mathsf{First}_k(\gamma) \odot \mathsf{Follow}_k(B)$.

... im Beispiel: $S \to \epsilon \quad | \quad a\, S\, b$

	ϵ	a	b
S	0	1	0

Satz

- Jede starke LL(k)-Grammatik ist auch LL(k) :-)
- Jede LL(1)-Grammatik ist bereits stark LL(1) :-))

Beweis:

Sei G stark LL(k).

Betrachte eine Ableitung $S \rightarrow_L^* u\, A\, \beta$ und Regeln $A \rightarrow \alpha\,,\; A \rightarrow \alpha' \;\in\; P$.

Dann haben wir:

$$\begin{array}{lll} \mathsf{First}_k(\alpha\,\beta) \;\cap\; \mathsf{First}_k(\alpha'\,\beta) & = & \mathsf{First}_k(\alpha) \odot \mathsf{First}_k(\beta) \;\cap\; \mathsf{First}_k(\alpha') \odot \mathsf{First}_k(\beta) \\ & \subseteq & \mathsf{First}_k(\alpha) \odot \mathsf{Follow}_k(A) \;\cap\; \mathsf{First}_k(\alpha') \odot \mathsf{Follow}_k(A) \\ & = & \emptyset \end{array}$$

Folglich ist G auch LL(k) :-)

Sei G LL(1).

Betrachte zwei verschiedene Regeln $A \to \alpha\,,\; A \to \alpha' \;\in\; P$.

Fall 1: $\epsilon \in \text{First}_1(\alpha) \cap \text{First}_1(\alpha')$.

Dann kann G nicht LL(1) sein :-)

Sei G LL(1).

Betrachte zwei verschiedene Regeln $A \to \alpha\,,\; A \to \alpha' \;\in\; P$.

Fall 1: $\epsilon \in \mathsf{First}_1(\alpha) \cap \mathsf{First}_1(\alpha')$.

Dann kann G nicht LL(1) sein :-)

Fall 2: $\epsilon \not\in \mathsf{First}_1(\alpha) \cup \mathsf{First}_1(\alpha')$.

Sei $S \to_L^* u\, A\, \beta$. Da G LL(1) ist, gilt:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{First}_1(\alpha) \odot \mathsf{Follow}_1(A) \cap \mathsf{First}_1(\alpha') \odot \mathsf{Follow}_1(A) \\
&= \mathsf{First}_1(\alpha) \cap \mathsf{First}_1(\alpha') \\
&= \mathsf{First}_1(\alpha) \odot \mathsf{First}_1(\beta) \cap \mathsf{First}_1(\alpha') \odot \mathsf{First}_1(\beta) \\
&= \emptyset
\end{aligned}
$$

Fall 3: $\epsilon \in \mathsf{First}_1(\alpha)$ und $\epsilon \notin \mathsf{First}_1(\alpha')$.

Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{First}_1(\alpha) \odot \mathsf{Follow}_1(A) \cap \mathsf{First}_1(\alpha') \odot \mathsf{Follow}_1(A) \\
&\quad = \mathsf{First}_1(\alpha) \odot \mathsf{Follow}_1(A) \cap \mathsf{First}_1(\alpha') \\
&\quad = \mathsf{First}_1(\alpha) \odot (\bigcup\{\mathsf{First}_1(\beta) \mid S \rightarrow_L^* u\, A\, \beta\}) \cap \mathsf{First}_1(\alpha') \\
&\quad = (\bigcup\{\mathsf{First}_1(\alpha) \odot \mathsf{First}_1(\beta) \mid S \rightarrow_L^* u\, A\, \beta\}) \cap \mathsf{First}_1(\alpha') \\
&\quad = \bigcup\{\mathsf{First}_1(\alpha) \odot \mathsf{First}_1(\beta) \cap \mathsf{First}_1(\alpha') \mid S \rightarrow_L^* u\, A\, \beta\} \\
&\quad = \bigcup\{\emptyset \mid S \rightarrow_L^* u\, A\, \beta\} \\
&\quad = \emptyset
\end{aligned}
$$

Fall 3: $\epsilon \in \mathsf{First}_1(\alpha)$ und $\epsilon \notin \mathsf{First}_1(\alpha')$.

Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
& \mathsf{First}_1(\alpha) \odot \mathsf{Follow}_1(A) \cap \mathsf{First}_1(\alpha') \odot \mathsf{Follow}_1(A) \\
& \quad = \mathsf{First}_1(\alpha) \odot \mathsf{Follow}_1(A) \cap \mathsf{First}_1(\alpha') \\
& \quad = \mathsf{First}_1(\alpha) \odot (\bigcup\{\mathsf{First}_1(\beta) \mid S \to_L^* u\, A\, \beta\}) \cap \mathsf{First}_1(\alpha') \\
& \quad = (\bigcup\{\mathsf{First}_1(\alpha) \odot \mathsf{First}_1(\beta) \mid S \to_L^* u\, A\, \beta\}) \cap \mathsf{First}_1(\alpha') \\
& \quad = \bigcup\{\mathsf{First}_1(\alpha) \odot \mathsf{First}_1(\beta) \cap \mathsf{First}_1(\alpha') \mid S \to_L^* u\, A\, \beta\} \\
& \quad = \bigcup\{\emptyset \mid S \to_L^* u\, A\, \beta\} \\
& \quad = \emptyset
\end{aligned}
$$

Fall 4: $\epsilon \notin \mathsf{First}_1(\alpha)$ und $\epsilon \in \mathsf{First}_1(\alpha')$: analog :-)

Beispiel:

$$\begin{array}{lll} S & \to & a\,A\,a\,a^{\,0} \;\mid\; b\,A\,b\,a^{\,1} \\ A & \to & b^{\,0} \;\mid\; \epsilon^{\,1} \end{array}$$

Offenbar ist die Grammatik LL(2) :-) Andererseits gilt:

$$\begin{array}{rl} \multicolumn{2}{l}{\mathsf{First}_2(b) \odot \mathsf{Follow}_2(A) \;\cap\; \mathsf{First}_2(\epsilon) \odot \mathsf{Follow}_2(A)} \\ = & \{b\} \odot \{a\,a\,,\; b\,a\} \;\cap\; \{\epsilon\} \odot \{a\,a\,,\; b\,a\} \\ = & \{b\,a\,,\; b\,b\} \;\cap\; \{a\,a\,,\; b\,a\} \\ \neq & \emptyset \end{array}$$

Folglich ist die Grammatik nicht stark LL(2) :-(

Beispiel:

$$
\begin{array}{lll}
S & \rightarrow & a\,A\,a\,a^{\,0} \;\mid\; b\,A\,b\,a^{\,1} \\
A & \rightarrow & b^{\,0} \;\mid\; \epsilon^{\,1}
\end{array}
$$

Offenbar ist die Grammatik LL(2) :-) Andererseits gilt:

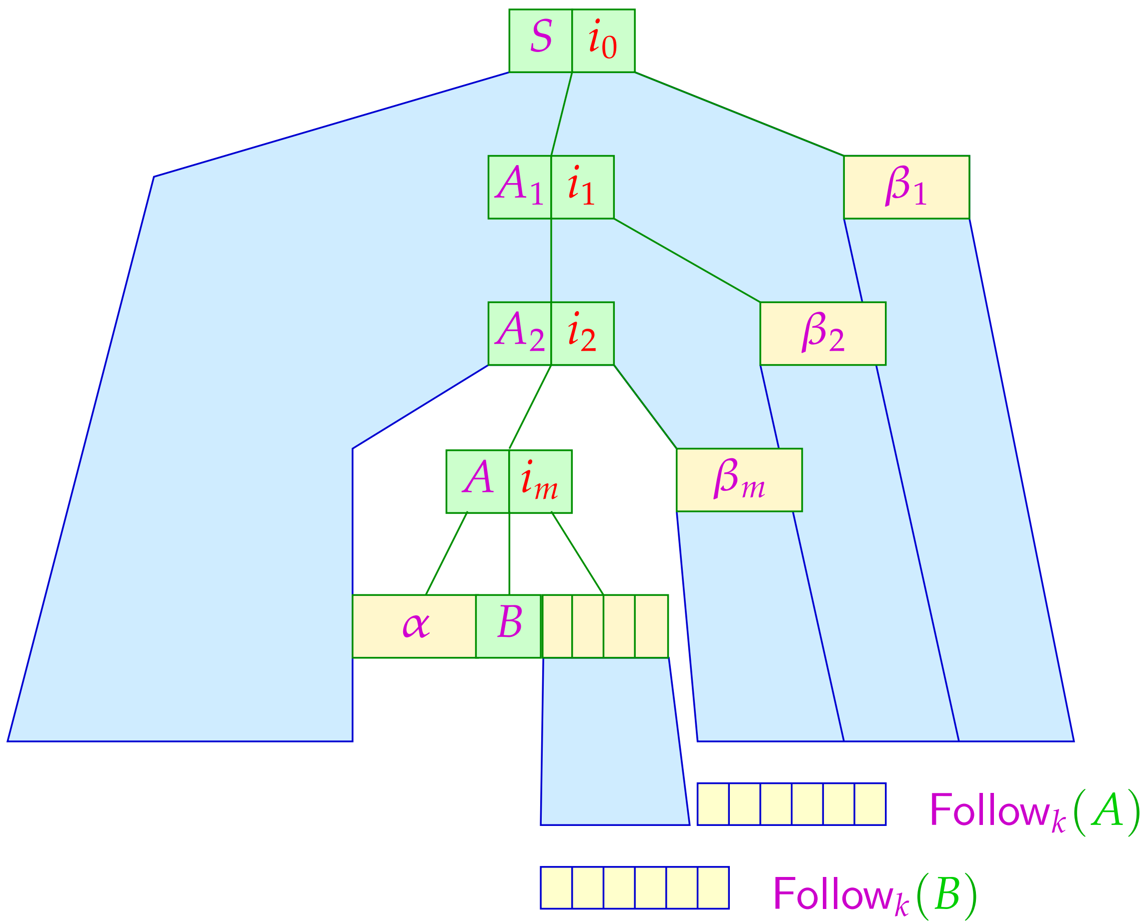
$$
\begin{array}{ll}
\multicolumn{2}{l}{\mathsf{First}_2(b) \odot \mathsf{Follow}_2(A) \;\cap\; \mathsf{First}_2(\epsilon) \odot \mathsf{Follow}_2(A)} \\
= & \{b\} \odot \{a\,a\,,\;b\,a\} \;\cap\; \{\epsilon\} \odot \{a\,a\,,\;b\,a\} \\
= & \{b\,a\,,\;b\,b\} \;\cap\; \{a\,a\,,\;b\,a\} \\
\neq & \emptyset
\end{array}
$$

Folglich ist die Grammatik nicht stark LL(2) :-(

Wir schließen:

- Für $k > 1$ ist nicht jede LL(k)-Grammatik automatisch stark LL(k).
- Zu jeder LL(k)-Grammatik kann jedoch eine äquivalente starke LL(k)-Grammatik konstruiert werden $\Longrightarrow$ Übung!

Berechnung von $\text{Follow}_k(B)$:



Berechnung von $\mathsf{Follow}_k(B)$:

Idee:

- Wir stellen ein Ungleichungssystem auf :-)
- ϵ ist ein möglicher rechter Kontext von S :-)
- Mögliche rechte Kontexte der linken Seite einer Regel propagieren wir ans Ende jeder rechten Seite ...

... im Beispiel: $S \to \epsilon \quad | \quad a\,S\,b$

$$\begin{array}{lll} \mathsf{Follow}_k(S) & \supseteq & \{\epsilon\} \\ \mathsf{Follow}_k(S) & \supseteq & \{b\} \odot \mathsf{Follow}_k(S) \end{array}$$

Allgemein:

$$
\begin{array}{lll}
\mathsf{Follow}_k(S) & \supseteq & \{\epsilon\} \\
\mathsf{Follow}_k(B) & \supseteq & \mathsf{First}_k(X_1) \odot \ldots \odot \mathsf{First}_k(X_m) \odot \mathsf{Follow}_k(A) \\
 & & \text{für} \quad A \to \alpha\, B\, X_1 \ldots X_m \in P
\end{array}
$$

Diskussion:

- Man überzeugt sich, dass die kleinste Lösung dieses Ungleichungssystems tatsächlich die Mengen $\mathsf{Follow}_k(B)$ liefert :-)
- Die Größe der auftretenden Mengen steigt mit k rapide :-(
- In praktischen Systemen wird darum meist nur der Fall $k = 1$ implementiert ...

2.5 Schnelle Berechnung von Vorausschau-Mengen

Im Fall $k = 1$ lassen sich First, Follow besonders effizient berechnen ;-)

Beobachtung:

Seinen $L_1, L_2 \subseteq T \cup \{\epsilon\}$ mit $L_1 \neq \emptyset \neq L_2$. Dann ist:

$$L_1 \odot L_2 = \begin{cases} L_1 & \text{falls} \quad \epsilon \in L_1 \\ (L_1 \backslash \{\epsilon\}) \cup L_2 & \text{sonst} \end{cases}$$

Ist G reduziert, sind alle Mengen $\text{First}_1(A)$ nichtleer :-)