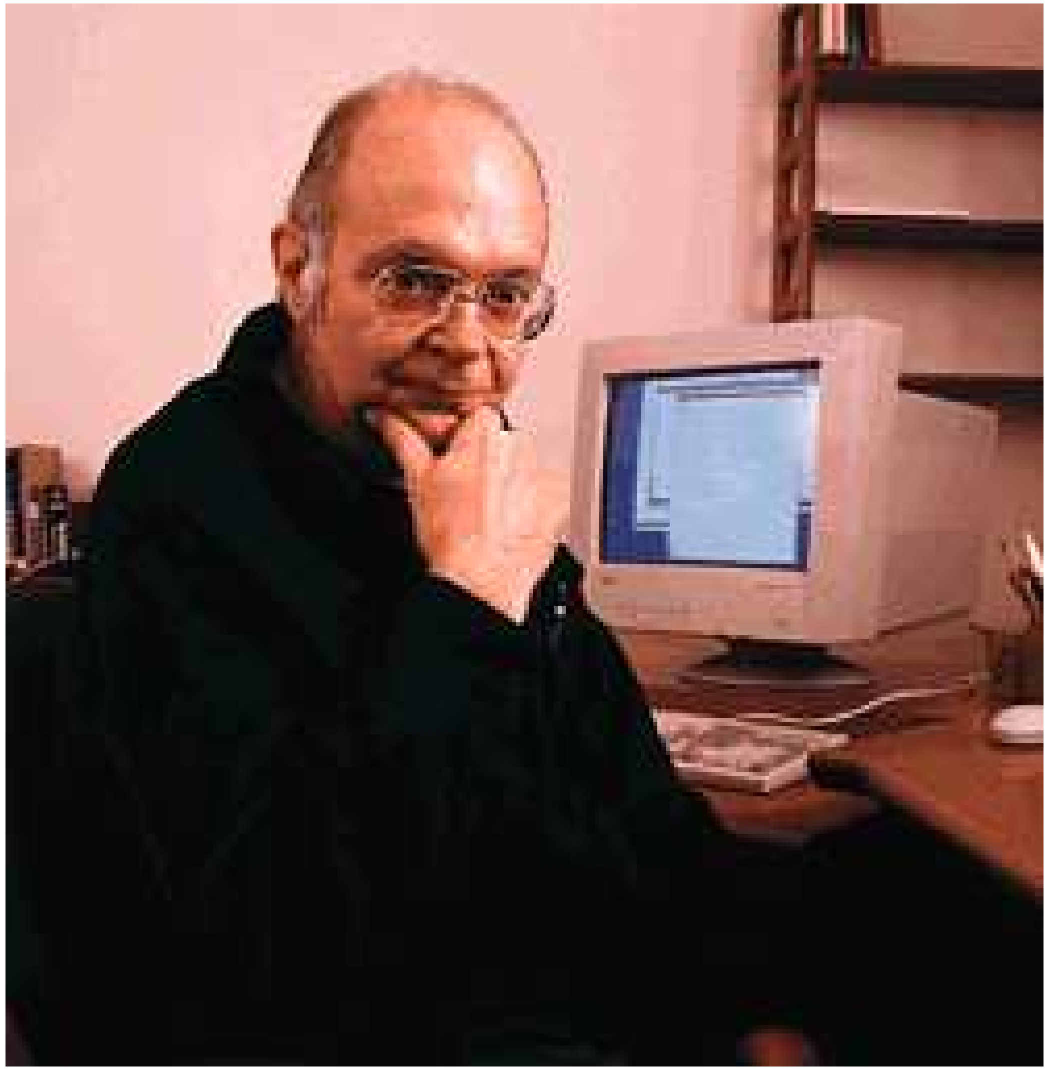


Donald E. Knuth, Stanford

Konstruktion 2: Item-Kellerautomat

- Rekonstruiere eine Linksableitung.
- Expandiere Nichtterminale mithilfe einer Regel.
- Verifiziere sukzessive, dass die gewählte Regel mit der Eingabe übereinstimmt.

  $\Longrightarrow$ Die Zustände sind jetzt Items.
- Ein Item ist eine Regel mit Punkt:

$$[A \to \alpha \bullet \beta]\,, \quad A \to \alpha\,\beta \in P$$

Der Punkt gibt an, wieweit die Regel bereits abgearbeitet wurde :-)

Unser Beispiel:

$$S \rightarrow A\,B \qquad A \rightarrow a \qquad B \rightarrow b$$

Wir fügen eine Regel: $S' \rightarrow S$ hinzu ;-)

Dann konstruieren wir:

Anfangszustand: $[S' \rightarrow \bullet\, S]$

Endzustand: $[S' \rightarrow S\, \bullet]$

$[S' \rightarrow \bullet\, S]$	ϵ	$[S' \rightarrow \bullet\, S]\,[S \rightarrow \bullet\, A\,B]$
$[S \rightarrow \bullet\, A\,B]$	ϵ	$[S \rightarrow \bullet\, A\,B]\,[A \rightarrow \bullet\, a]$
$[A \rightarrow \bullet\, a]$	a	$[A \rightarrow a\, \bullet]$
$[S \rightarrow \bullet\, A\,B]\,[A \rightarrow a\, \bullet]$	ϵ	$[S \rightarrow A\, \bullet\, B]$
$[S \rightarrow A\, \bullet\, B]$	ϵ	$[S \rightarrow A\, \bullet\, B]\,[B \rightarrow \bullet\, b]$
$[B \rightarrow \bullet\, b]$	b	$[B \rightarrow b\, \bullet]$
$[S \rightarrow A\, \bullet\, B]\,[B \rightarrow b\, \bullet]$	ϵ	$[S \rightarrow A\,B\, \bullet]$
$[S' \rightarrow \bullet\, S]\,[S \rightarrow A\,B\, \bullet]$	ϵ	$[S' \rightarrow S\, \bullet]$

Der Item-Kellerautomat $M_G^{(2)}$ hat drei Arten von Übergängen:

Expansionen: $([A \to \alpha \bullet B\,\beta], \epsilon, [A \to \alpha \bullet B\,\beta]\,[B \to \bullet\,\gamma])$ für $A \to \alpha\,B\,\beta,\; B \to \gamma \;\in\; P$

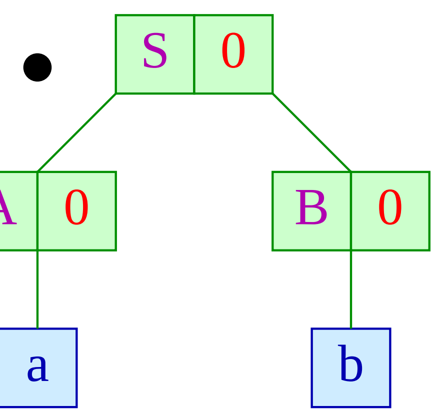
Shifts: $([A \to \alpha \bullet a\,\beta], a, [A \to \alpha\,a \bullet \beta])$ für $A \to \alpha\,a\,\beta \;\in\; P$

Reduce: $([A \to \alpha \bullet B\,\beta]\,[B \to \gamma \bullet], \epsilon, [A \to \alpha\,B \bullet \beta])$ für $A \to \alpha\,B\,\beta,\; B \to \gamma \;\in\; P$

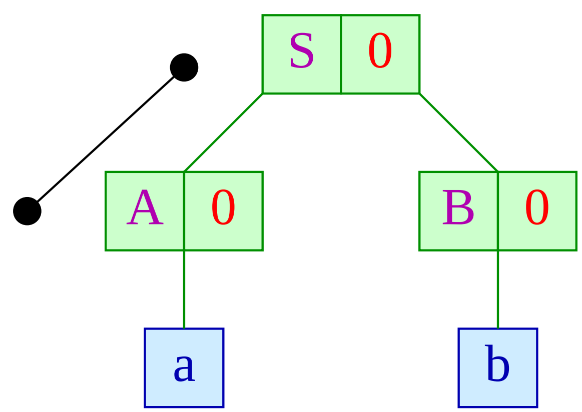
Items der Form: $[A \to \alpha\,\bullet]$ heißen auch vollständig :-)

Der Item-Kellerautomat schiebt den Punkt einmal um den Ableitungsbaum herum ...

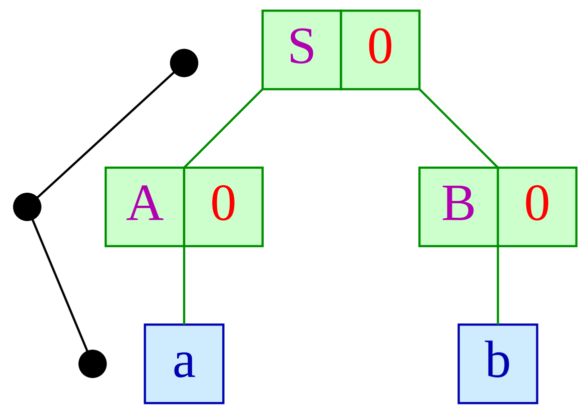
... im Beispiel:



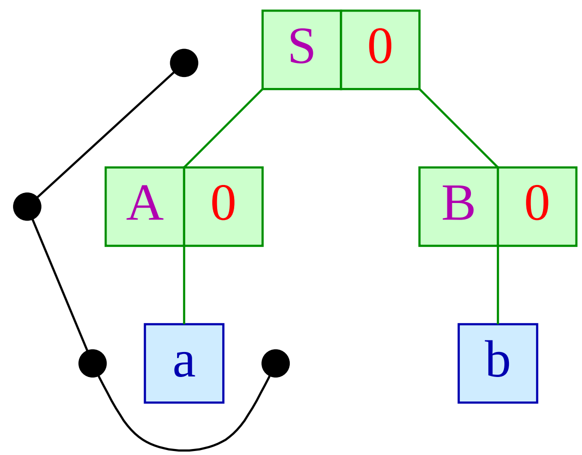
... im Beispiel:



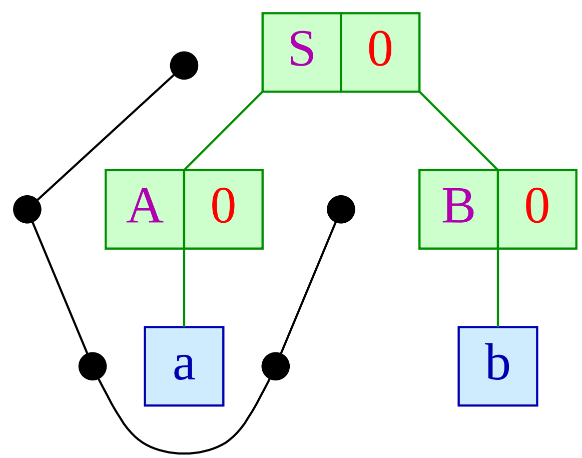
... im Beispiel:



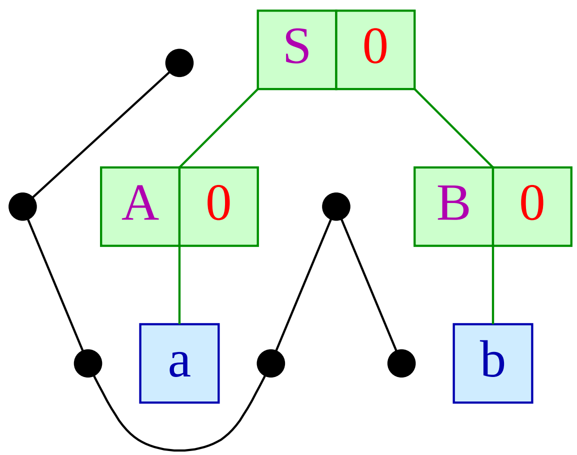
... im Beispiel:



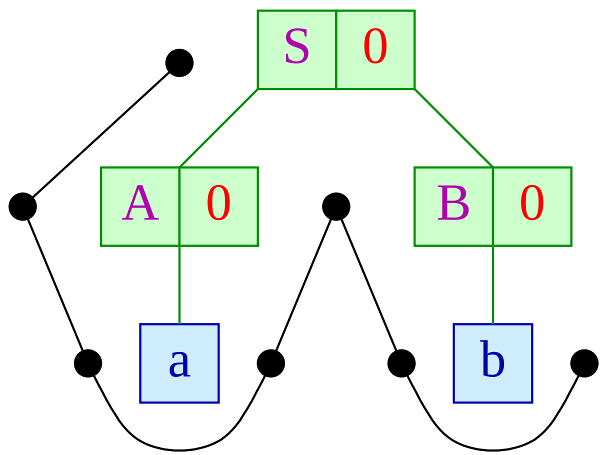
... im Beispiel:



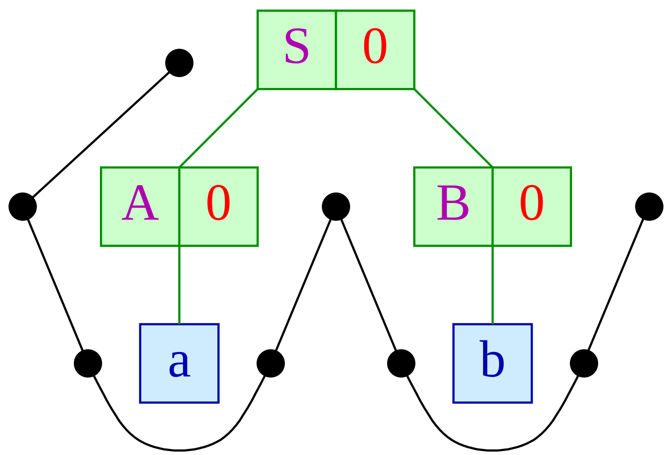
... im Beispiel:



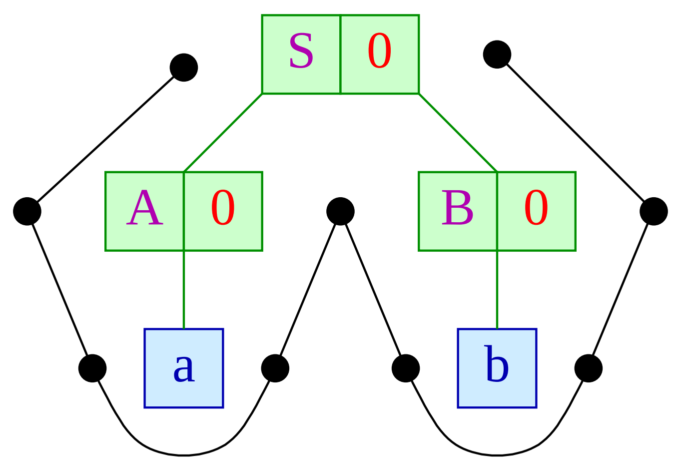
... im Beispiel:



... im Beispiel:



... im Beispiel:



Diskussion:

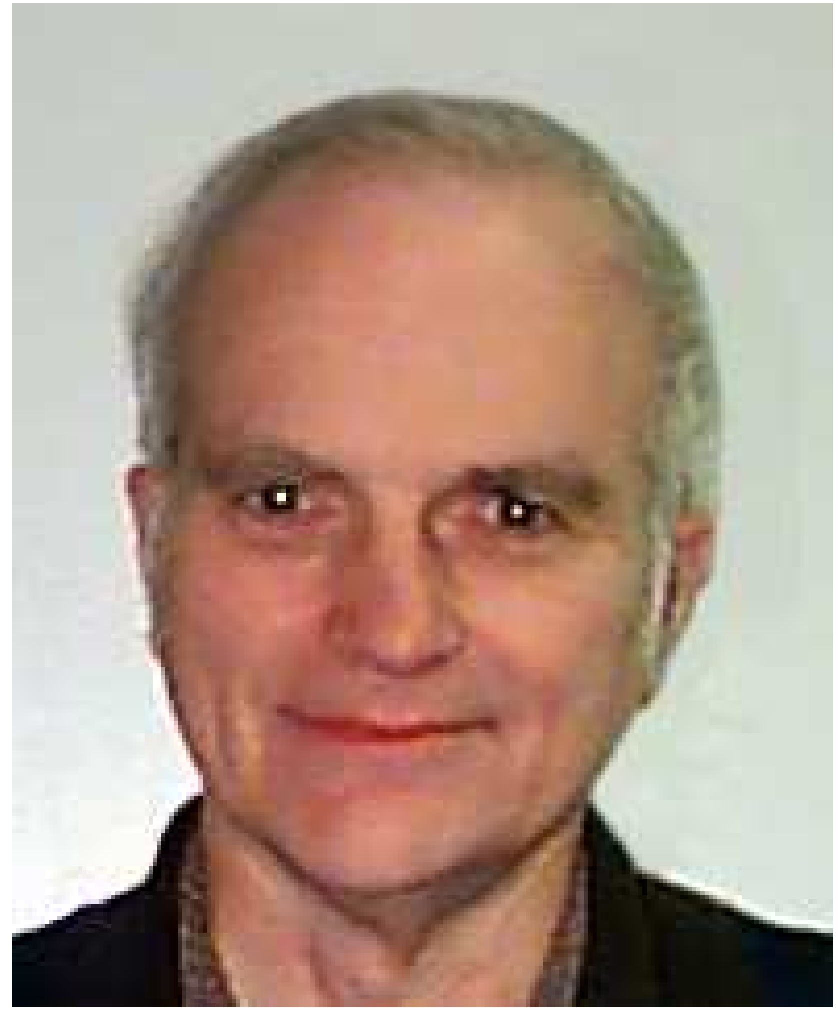
- Die Expansionen einer Berechnung bilden eine Linksableitung :-)
- Leider muss man bei den Expansionen nichtdeterministisch zwischen verschiedenen Regeln auswählen :-(

- Zur Korrektheit der Konstruktion zeigt man, dass für jedes Item $[A \to \alpha \bullet B\, \beta]$ gilt:

$$([A \to \alpha \bullet B\, \beta], w) \vdash^* ([A \to \alpha\, B \bullet \beta], \epsilon) \qquad \text{gdw.} \qquad B \to^* w$$

- LL-Parsing basiert auf dem Item-Kellerautomaten und versucht, die Expansionen durch Vorausschau deterministisch zu machen ...

Philip M. Lewis, SUNY



Richard E. Stearns, SUNY

Beispiel: $S \to \epsilon \quad | \quad a\,S\,b$

Die Übergänge des zugehörigen Item-Kellerautomat:

0	$[S' \to \bullet\, S]$	ϵ	$[S' \to \bullet\, S]\ [S \to \bullet]$
1	$[S' \to \bullet\, S]$	ϵ	$[S' \to \bullet\, S]\ [S \to \bullet\, a\,S\,b]$
2	$[S \to \bullet\, a\,S\,b]$	a	$[S \to a \bullet S\,b]$
3	$[S \to a \bullet S\,b]$	ϵ	$[S \to a \bullet S\,b]\ [S \to \bullet]$
4	$[S \to a \bullet S\,b]$	ϵ	$[S \to a \bullet S\,b]\ [S \to \bullet\, a\,S\,b]$
5	$[S \to a \bullet S\,b]\ [S \to \bullet]$	ϵ	$[S \to a\,S \bullet b]$
6	$[S \to a \bullet S\,b]\ [S \to a\,S\,b \bullet]$	ϵ	$[S \to a\,S \bullet b]$
7	$[S \to a\,S \bullet b]$	b	$[S \to a\,S\,b \bullet]$
8	$[S' \to \bullet\, S]\ [S \to \bullet]$	ϵ	$[S' \to S \bullet]$
9	$[S' \to \bullet\, S]\ [S \to a\,S\,b \bullet]$	ϵ	$[S' \to S \bullet]$

Konflikte gibt es zwischen den Übergängen $(0, 1)$ bzw. zwischen $(3, 4)$ – die sich durch Betrachten des nächsten Zeichens lösen ließen :-)

2.3 Vorausschau-Mengen

Für eine Menge $L \subseteq T^*$ definieren wir:

$$\mathsf{First}_k(L) = \{u \in L \mid |u| < k\} \cup \{u \in T^k \mid \exists\, v \in T^* : \; uv \in L\}$$

Beispiel:

ϵ
$a\,b$
$a\,a\,b\,b$
$a\,a\,a\,b\,b\,b$

2.3 Vorausschau-Mengen

Für eine Menge $L \subseteq T^*$ definieren wir:

$$\mathsf{First}_k(L) = \{u \in L \mid |u| < k\} \cup \{u \in T^k \mid \exists\, v \in T^* : \; uv \in L\}$$

Beispiel:

ϵ
$a\, b$
$a\, a$
$a\, a$

die Präfixe der Länge 2 :-)

Rechenregeln:

$\mathsf{First}_k(\_)$ ist verträglich mit Vereinigung und Konkatenation:

$$\begin{array}{lcl}
\mathsf{First}_k(\emptyset) & = & \emptyset \\
\mathsf{First}_k(L_1 \cup L_2) & = & \mathsf{First}_k(L_1) \cup \mathsf{First}_k(L_2) \\
\mathsf{First}_k(L_1 \cdot L_2) & = & \mathsf{First}_k(\mathsf{First}_k(L_1) \cdot \mathsf{First}_k(L_2)) \\
 & := & \mathsf{First}_k(L_1) \odot \mathsf{First}_k(L_2)
\end{array}$$

k – Konkatenation

Beachte:

- Die Menge $\mathbb{D}_k = 2^{T^{\leq k}}$ ist endlich :-)
- Die Operation: $\odot : \mathbb{D}_k \times \mathbb{D}_k \to \mathbb{D}_k$ ist distributiv in jedem Argument:

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
L \odot \emptyset & = & \emptyset & L \odot (L_1 \cup L_2) & = & (L \odot L_1) \cup (L \odot L_2) \\
\emptyset \odot L & = & \emptyset & (L_1 \cup L_2) \odot L & = & (L_1 \odot L) \cup (L_2 \odot L)
\end{array}$$

Für $\alpha \in (N \cup T)^*$ sind wir interessiert an der Menge:

$$\mathsf{First}_k(\alpha) \;=\; \mathsf{First}_k(\{w \in T^* \mid \alpha \rightarrow^* w\})$$

Für $k \geq 1$ gilt:

$$\begin{array}{lcll} \mathsf{First}_k(x) & = & \{x\} & \text{für} \quad x \in T \cup \{\epsilon\} \\ \mathsf{First}_k(\alpha_1\,\alpha_2) & = & \mathsf{First}_k(\alpha_1) \odot \mathsf{First}_k(\alpha_2) & \end{array}$$

Für $\alpha \in (N \cup T)^*$ sind wir interessiert an der Menge:

$$\text{First}_k(\alpha) = \text{First}_k(\{w \in T^* \mid \alpha \rightarrow^* w\})$$

Für $k \geq 1$ gilt:

$$\begin{array}{lcll} \text{First}_k(x) & = & \{x\} & \text{für} \quad x \in T \cup \{\epsilon\} \\ \text{First}_k(\alpha_1\,\alpha_2) & = & \text{First}_k(\alpha_1) \odot \text{First}_k(\alpha_2) & \end{array}$$

Frage: Wie berechnet man $\text{First}_k(A)$??

Für $\alpha \in (N \cup T)^*$ sind wir interessiert an der Menge:

$$\mathsf{First}_k(\alpha) \;=\; \mathsf{First}_k(\{w \in T^* \mid \alpha \rightarrow^* w\})$$

Für $k \geq 1$ gilt:

$$\begin{array}{lcll} \mathsf{First}_k(x) & = & \{x\} & \text{für} \quad x \in T \cup \{\epsilon\} \\ \mathsf{First}_k(\alpha_1\,\alpha_2) & = & \mathsf{First}_k(\alpha_1) \odot \mathsf{First}_k(\alpha_2) & \end{array}$$

Frage: Wie berechnet man $\mathsf{First}_k(A)$??

Idee: Stelle ein Ungleichungssystem auf!

Beispiel: $k = 2$

$$
\begin{array}{lllll}
E & \to & E + T & \mid & T \\
T & \to & T * F & \mid & F \\
F & \to & (\ E\ ) & \mid & \mathsf{name} \quad \mid \quad \mathsf{int}
\end{array}
$$

Jede Regel gibt Anlass zu einer Inklusionsbeziehung:

$$
\begin{array}{lllllll}
\mathsf{First}_2(E) & \supseteq & \mathsf{First}_2(E + T) & \qquad & \mathsf{First}_2(E) & \supseteq & \mathsf{First}_2(T) \\
\mathsf{First}_2(T) & \supseteq & \mathsf{First}_2(T * F) & & \mathsf{First}_2(T) & \supseteq & \mathsf{First}_2(F) \\
\mathsf{First}_2(F) & \supseteq & \mathsf{First}_2((\ E\ )) & & \mathsf{First}_2(F) & \supseteq & \{\mathsf{name}, \mathsf{int}\}
\end{array}
$$

Beispiel: $k = 2$

$$\begin{array}{lllll} E & \rightarrow & E + T & \mid & T \\ T & \rightarrow & T * F & \mid & F \\ F & \rightarrow & (\ E\ ) & \mid & \mathsf{name} & \mid & \mathsf{int} \end{array}$$

Jede Regel gibt Anlass zu einer Inklusionsbeziehung:

$$\begin{array}{lllllll} \mathsf{First}_2(E) & \supseteq & \mathsf{First}_2(E+T) & \qquad & \mathsf{First}_2(E) & \supseteq & \mathsf{First}_2(T) \\ \mathsf{First}_2(T) & \supseteq & \mathsf{First}_2(T*F) & & \mathsf{First}_2(T) & \supseteq & \mathsf{First}_2(F) \\ \mathsf{First}_2(F) & \supseteq & \mathsf{First}_2((\ E\ )) & & \mathsf{First}_2(F) & \supseteq & \{\mathsf{name}, \mathsf{int}\} \end{array}$$

Eine Inklusion $\mathsf{First}_2(E) \supseteq \mathsf{First}_2(E+T)$ kann weiter vereinfacht werden zu:

$$\mathsf{First}_2(E) \supseteq \mathsf{First}_2(E) \odot \{+\} \odot \mathsf{First}_2(T)$$

Insgesamt erhalten wir das Ungleichungssystem:

$$
\begin{array}{lllllll}
\mathsf{First}_2(E) & \supseteq & \mathsf{First}_2(E) \odot \{+\} \odot \mathsf{First}_2(T) & \qquad & \mathsf{First}_2(E) & \supseteq & \mathsf{First}_2(T) \\
\mathsf{First}_2(T) & \supseteq & \mathsf{First}_2(T) \odot \{*\} \odot \mathsf{First}_2(F) & \qquad & \mathsf{First}_2(T) & \supseteq & \mathsf{First}_2(F) \\
\mathsf{First}_2(F) & \supseteq & \{(\} \odot \mathsf{First}_2(E) \odot \{)\} & \qquad & \mathsf{First}_2(F) & \supseteq & \{\mathsf{name}, \mathsf{int}\}
\end{array}
$$

Insgesamt erhalten wir das Ungleichungssystem:

$$\begin{array}{lll} \mathsf{First}_2(E) & \supseteq & \mathsf{First}_2(E) \odot \{+\} \odot \mathsf{First}_2(T) \\ \mathsf{First}_2(T) & \supseteq & \mathsf{First}_2(T) \odot \{*\} \odot \mathsf{First}_2(F) \\ \mathsf{First}_2(F) & \supseteq & \{(\} \odot \mathsf{First}_2(E) \odot \{)\} \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \mathsf{First}_2(E) & \supseteq & \mathsf{First}_2(T) \\ \mathsf{First}_2(T) & \supseteq & \mathsf{First}_2(F) \\ \mathsf{First}_2(F) & \supseteq & \{\mathsf{name}, \mathsf{int}\} \end{array}$$

Allgemein:

$$\mathsf{First}_k(A) \quad \supseteq \quad \mathsf{First}_k(X_1) \odot \ldots \odot \mathsf{First}_k(X_m)$$

für jede Regel $A \to X_1 \ldots X_m \quad \in \quad P$ mit $X_i \in T \cup N$.

Gesucht:

- möglichst kleine Lösung (??)
- Algorithmus, der diese berechnet :-)

... im Beispiel:

$$
\begin{array}{lllllll}
\text{First}_2(E) & \supseteq & \text{First}_2(E) \odot \{+\} \odot \text{First}_2(T) & \quad & \text{First}_2(E) & \supseteq & \text{First}_2(T) \\
\text{First}_2(T) & \supseteq & \text{First}_2(T) \odot \{*\} \odot \text{First}_2(F) & \quad & \text{First}_2(T) & \supseteq & \text{First}_2(F) \\
\text{First}_2(F) & \supseteq & \{(\} \odot \text{First}_2(E) \odot \{)\} & \quad & \text{First}_2(F) & \supseteq & \{\text{name}, \text{int}\}
\end{array}
$$

... hat die Lösung:

E	name, int, (name, (int, ((, name $*$, int $*$, name $+$, int $+$
T	name, int, (name, (int, ((, name $*$, int $*$
F	name, int, (name, (int, ((

Beobachtung:

- Die Menge $\mathbb{D}_k$ der möglichen Werte für $\mathsf{First}_k(A)$ bilden einen vollständigen Verband :-)

- Die Operatoren auf den rechten Seiten der Ungleichungen sind monoton, d.h. verträglich mit "$\subseteq$" :-)

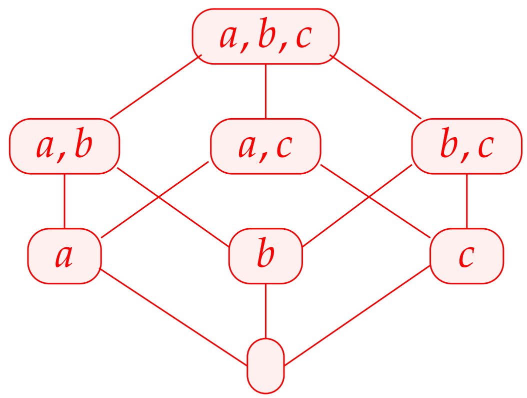
Exkurs: Vollständige Verbände

Eine Menge $\mathbb{D}$ mit einer Relation $\sqsubseteq \subseteq \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ ist eine Halbordnung falls für allea $a, b, c \in \mathbb{D}$ gilt:

$a \sqsubseteq a$	*Reflexivität*
$a \sqsubseteq b \wedge b \sqsubseteq a \implies a = b$	*Anti – Symmetrie*
$a \sqsubseteq b \wedge b \sqsubseteq c \implies a \sqsubseteq c$	*Transitivität*

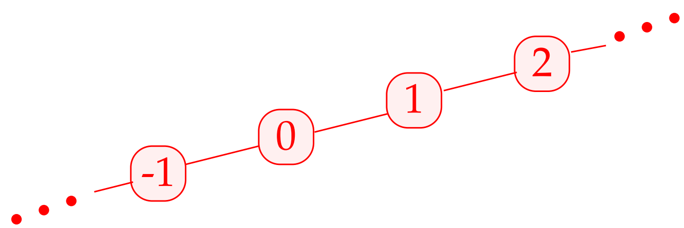
Beispiele:

1. $\mathbb{D} = 2^{\{a,b,c\}}$ mit der Relation "$\subseteq$" :

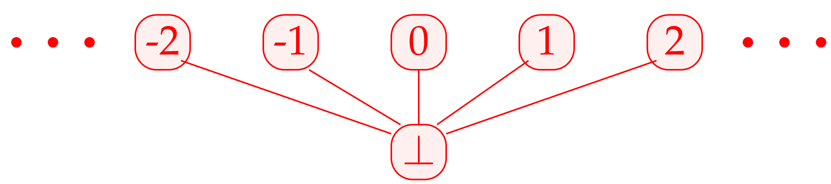


3. $\mathbb{Z}$ mit der Relation "$=$" :

3. $\mathbb{Z}$ mit der Relation "$\leq$" :



4. $\mathbb{Z}_\perp = \mathbb{Z} \cup \{\perp\}$ mit der Ordnung:



$d \in \mathbb{D}$ heißt obere Schranke für $X \subseteq \mathbb{D}$ falls

$$x \sqsubseteq d \qquad \text{für alle} \quad x \in X$$

$d \in \mathbb{D}$ heißt obere Schranke für $X \subseteq \mathbb{D}$ falls

$$x \sqsubseteq d \qquad \text{für alle} \qquad x \in X$$

d heißt kleinste obere Schranke (lub) falls

1. d eine obere Schranke ist und
2. $d \sqsubseteq y$ für jede obere Schranke y für X.

$d \in \mathbb{D}$ heißt obere Schranke für $X \subseteq \mathbb{D}$ falls

$$x \sqsubseteq d \qquad \text{für alle} \qquad x \in X$$

d heißt kleinste obere Schranke (lub) falls

1. d eine obere Schranke ist und
2. $d \sqsubseteq y$ für jede obere Schranke y für X.

Achtung:

- $\{0, 2, 4, \ldots\} \subseteq \mathbb{Z}$ besitzt keine obere Schranke!
- $\{0, 2, 4\} \subseteq \mathbb{Z}$ besitzt die oberen Schranken $4, 5, 6, \ldots$

Ein vollständiger Verband (cl) $\mathbb{D}$ ist eine Halbordnung, in der jede Teilmenge $X \subseteq \mathbb{D}$ eine kleinste obere Schranke $\bigsqcup X \in \mathbb{D}$ besitzt.

Beachte:

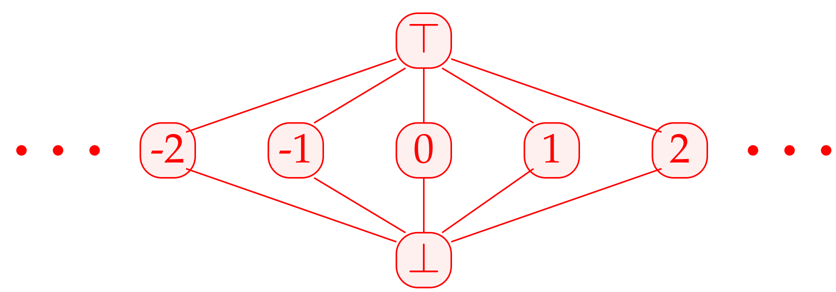
Jeder vollständige Verband besitzt

→ ein kleinstes Element $\bot = \bigsqcup \emptyset \quad \in \mathbb{D}$;

→ ein größtes Element $\top = \bigsqcup \mathbb{D} \quad \in \mathbb{D}$.

Beispiele:

1. $\mathbb{D} = 2^{\{a,b,c\}}$ ist ein cl :-)
2. $\mathbb{D} = \mathbb{Z}$ mit "$=$" ist keiner.
3. $\mathbb{D} = \mathbb{Z}$ mit "$\leq$" ebenfalls nicht.
4. $\mathbb{D} = \mathbb{Z}_\perp$ auch nicht :-(
5. Mit einem zusätzlichen Symbol $\top$ erhalten wir den flachen Verband $\mathbb{Z}_\perp^\top = \mathbb{Z} \cup \{\perp, \top\}$:



Es gilt:

Satz:

In jedem vollständigen Verband $\mathbb{D}$ besitzt jede Teilmenge $X \subseteq \mathbb{D}$ eine größte untere Schranke $\bigsqcap X$.

Es gilt:

Satz:

In jedem vollständigen Verband $\mathbb{D}$ besitzt jede Teilmenge $X \subseteq \mathbb{D}$ eine größte untere Schranke $\bigsqcap X$.

Beweis:

Konstruiere $U = \{u \in \mathbb{D} \mid \forall\, x \in X : \; u \sqsubseteq x\}$.

// die Menge der unteren Schranken von X :-)

Es gilt:

Satz:

In jedem vollständigen Verband $\mathbb{D}$ besitzt jede Teilmenge $X \subseteq \mathbb{D}$ eine größte untere Schranke $\bigsqcap X$.

Beweis:

Konstruiere $U = \{u \in \mathbb{D} \mid \forall\, x \in X : \; u \sqsubseteq x\}$.

// die Menge der unteren Schranken von X :-)

Setze: $g := \bigsqcup U$

Behauptung: $g = \bigsqcap X$

(1) g ist eine untere Schranke von X :

Für $x \in X$ gilt:

$u \sqsubseteq x$ für alle $u \in U$

$\Longrightarrow$ x ist obere Schranke von U

$\Longrightarrow$ $g \sqsubseteq x$:-)

(1) g ist eine untere Schranke von X :

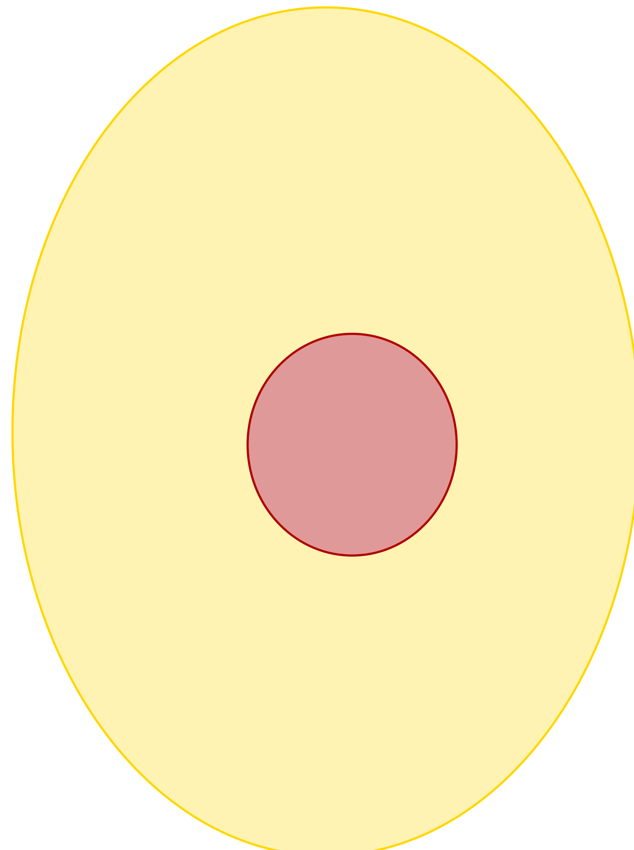
Für $x \in X$ gilt:

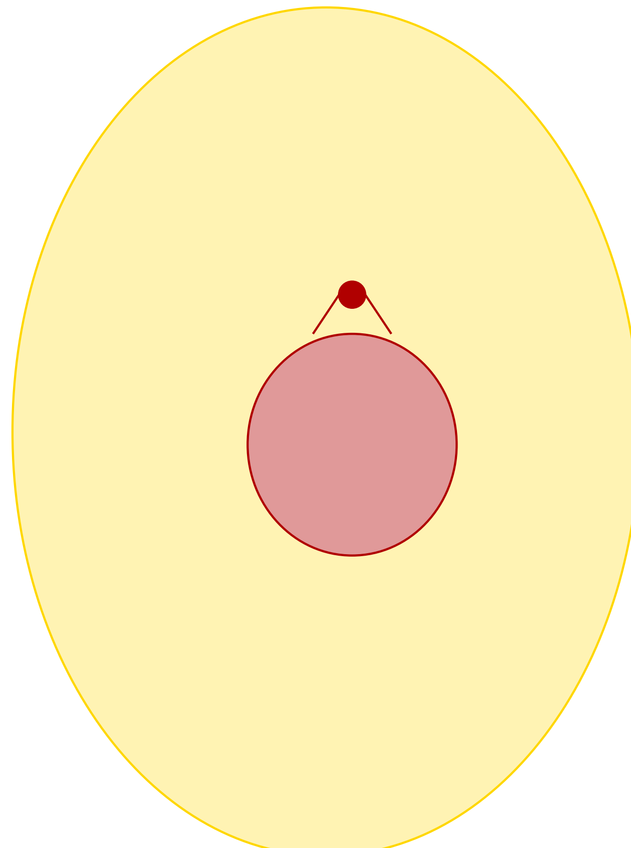
$$
\begin{array}{ll}
 & u \sqsubseteq x \text{ für alle } u \in U \\
\Longrightarrow & x \text{ ist obere Schranke von } U \\
\Longrightarrow & g \sqsubseteq x \qquad :\text{-)}
\end{array}
$$

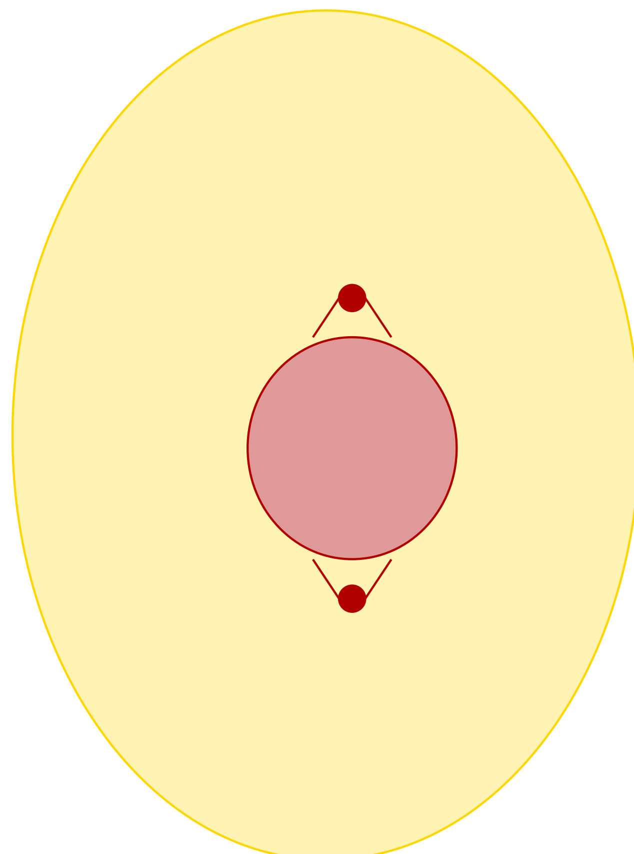
(2) g ist größte untere Schranke von X :

Für jede untere Schranke u von X gilt:

$$
\begin{array}{ll}
 & u \in U \\
\Longrightarrow & u \sqsubseteq g \qquad :\text{-))}
\end{array}
$$







Wir suchen Lösungen für Ungleichungssysteme der Form:

$$x_i \quad \sqsupseteq \quad f_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (*)$$

Wir suchen Lösungen für Ungleichungssysteme der Form:

$$x_i \quad \sqsupseteq \quad f_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad\qquad (*)$$

wobei:

x_i	Unbekannte	hier:	$\mathsf{First}_k(A)$
$\mathbb{D}$	Werte	hier:	$\mathbb{D}_k = 2^{T^{\leq k}}$
$\sqsubseteq \quad \subseteq \quad \mathbb{D} \times \mathbb{D}$	Ordnungsrelation	hier:	$\subseteq$
$f_i\colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$	Bedingung	hier:	...

Wir suchen Lösungen für Ungleichungssysteme der Form:

$$x_i \quad \sqsupseteq \quad f_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad\qquad (*)$$

wobei:

x_i	Unbekannte	hier:	$\mathsf{First}_k(A)$
$\mathbb{D}$	Werte	hier:	$\mathbb{D}_k = 2^{T^{\leq k}}$
$\sqsubseteq \;\subseteq\; \mathbb{D} \times \mathbb{D}$	Ordnungsrelation	hier:	$\subseteq$
$f_i\colon \mathbb{D}^n \longrightarrow \mathbb{D}$	Bedingung	hier:	...

Ungleichung für $\mathsf{First}_k(A)$:

$$\mathsf{First}_k(A) \quad \supseteq \quad \bigcup \{\mathsf{First}_k(X_1) \odot \ldots \odot \mathsf{First}_k(X_m) \mid A \rightarrow X_1 \ldots X_m \;\in\; P\}$$

Wir suchen Lösungen für Ungleichungssysteme der Form:

$$x_i \quad \sqsupseteq \quad f_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad\qquad (*)$$

wobei:

x_i	Unbekannte	hier:	$\text{First}_k(A)$
$\mathbb{D}$	Werte	hier:	$\mathbb{D}_k = 2^{T^{\leq k}}$
$\sqsubseteq \;\subseteq\; \mathbb{D} \times \mathbb{D}$	Ordnungsrelation	hier:	$\subseteq$
$f_i \colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$	Bedingung	hier:	...

Ungleichung für $\text{First}_k(A)$:

$$\text{First}_k(A) \quad \supseteq \quad \bigcup\{\text{First}_k(X_1) \odot \ldots \odot \text{First}_k(X_m) \mid A \to X_1 \ldots X_m \;\in\; P\}$$

Denn:

$$x \sqsupseteq d_1 \wedge \ldots \wedge x \sqsupseteq d_k \quad \text{gdw.} \quad x \sqsupseteq \bigsqcup\{d_1, \ldots, d_k\} \qquad \text{:-)}$$

Eine Abbildung $f : \mathbb{D}_1 \to \mathbb{D}_2$ heißt monoton, falls $f(a) \sqsubseteq f(b)$ für alle $a \sqsubseteq b$.

Eine Abbildung $f : \mathbb{D}_1 \to \mathbb{D}_2$ heißt monoton, falls $f(a) \sqsubseteq f(b)$ für alle $a \sqsubseteq b$.

Beispiele:

(1) $\mathbb{D}_1 = \mathbb{D}_2 = 2^U$ für eine Menge U und $f\,x = (x \cap a) \cup b$.

Offensichtlich ist jedes solche f monoton :-)

Eine Abbildung $f : \mathbb{D}_1 \to \mathbb{D}_2$ heißt monoton, falls $f(a) \sqsubseteq f(b)$ für alle $a \sqsubseteq b$.

Beispiele:

(1) $\mathbb{D}_1 = \mathbb{D}_2 = 2^U$ für eine Menge U und $f\,x = (x \cap a) \cup b$.

Offensichtlich ist jedes solche f monoton :-)

(2) $\mathbb{D}_1 = \mathbb{D}_2 = \mathbb{Z}$ (mit der Ordnung "$\leq$"). Dann gilt:

- $\mathsf{inc}\,x = x + 1$ ist monoton.
- $\mathsf{dec}\,x = x - 1$ ist monoton.

Eine Abbildung $f : \mathbb{D}_1 \to \mathbb{D}_2$ heißt monoton, falls $f(a) \sqsubseteq f(b)$ für alle $a \sqsubseteq b$.

Beispiele:

(1) $\mathbb{D}_1 = \mathbb{D}_2 = 2^U$ für eine Menge U und $f\,x = (x \cap a) \cup b$.

Offensichtlich ist jedes solche f monoton :-)

(2) $\mathbb{D}_1 = \mathbb{D}_2 = \mathbb{Z}$ (mit der Ordnung "$\leq$"). Dann gilt:

- $\mathsf{inc}\,x = x + 1$ ist monoton.
- $\mathsf{dec}\,x = x - 1$ ist monoton.
- $\mathsf{inv}\,x = -x$ ist nicht monoton :-)

Gesucht: möglichst kleine Lösung für:

$$x_i \sqsupseteq f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n \qquad (*)$$

wobei alle $f_i : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$ monoton sind.

Gesucht:

möglichst kleine Lösung für:

$$x_i \sqsupseteq f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n \qquad (*)$$

wobei alle $f_i : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$ monoton sind.

Idee:

- Betrachte $F : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ mit

$$F(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \quad \text{wobei} \quad y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n).$$

Gesucht: möglichst kleine Lösung für:

$$x_i \sqsupseteq f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n \qquad (*)$$

wobei alle $f_i : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$ monoton sind.

Idee:

- Betrachte $F : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ mit

  $$F(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \quad \text{wobei} \quad y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n).$$

- Sind alle f_i monoton, dann auch F :-)

Gesucht: möglichst kleine Lösung für:

$$x_i \sqsupseteq f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n \qquad (*)$$

wobei alle $f_i : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$ monoton sind.

Idee:

- Betrachte $F : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ mit

  $$F(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \quad \text{wobei} \quad y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n).$$

- Sind alle f_i monoton, dann auch F :-)
- Wir approximieren sukzessive eine Lösung. Wir konstruieren:

  $$\underline{\perp}, \quad F\,\underline{\perp}, \quad F^2\,\underline{\perp}, \quad F^3\,\underline{\perp}, \quad \ldots$$

Hoffnung: Wir erreichen irgendwann eine Lösung ... ???

Beispiel: $\mathbb{D} = 2^{\{a,b,c\}}, \quad \sqsubseteq \, = \, \subseteq$

$$\begin{array}{lll} x_1 & \supseteq & \{a\} \cup x_3 \\ x_2 & \supseteq & x_3 \cap \{a, b\} \\ x_3 & \supseteq & x_1 \cup \{c\} \end{array}$$

Beispiel: $\mathbb{D} = 2^{\{a,b,c\}}, \quad \sqsubseteq \, = \, \subseteq$

$$\begin{array}{lll} x_1 & \supseteq & \{a\} \cup x_3 \\ x_2 & \supseteq & x_3 \cap \{a, b\} \\ x_3 & \supseteq & x_1 \cup \{c\} \end{array}$$

Die Iteration:

	0	1	2	3	4
x_1	$\emptyset$				
x_2	$\emptyset$				
x_3	$\emptyset$				

Beispiel: $\mathbb{D} = 2^{\{a,b,c\}}, \quad \sqsubseteq = \subseteq$

$$\begin{array}{lll} x_1 & \supseteq & \{a\} \cup x_3 \\ x_2 & \supseteq & x_3 \cap \{a,b\} \\ x_3 & \supseteq & x_1 \cup \{c\} \end{array}$$

Die Iteration:

	0	1	2	3	4
x_1	$\emptyset$	$\{a\}$			
x_2	$\emptyset$	$\emptyset$			
x_3	$\emptyset$	$\{c\}$			

Beispiel: $\mathbb{D} = 2^{\{a,b,c\}}, \quad \sqsubseteq \; = \; \subseteq$

$$\begin{array}{lll} x_1 & \supseteq & \{a\} \cup x_3 \\ x_2 & \supseteq & x_3 \cap \{a, b\} \\ x_3 & \supseteq & x_1 \cup \{c\} \end{array}$$

Die Iteration:

	0	1	2	3	4
x_1	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{a, c\}$		
x_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$		
x_3	$\emptyset$	$\{c\}$	$\{a, c\}$		

Beispiel: $\mathbb{D} = 2^{\{a,b,c\}}, \quad \sqsubseteq \, = \, \subseteq$

$$\begin{array}{lll} x_1 & \supseteq & \{a\} \cup x_3 \\ x_2 & \supseteq & x_3 \cap \{a, b\} \\ x_3 & \supseteq & x_1 \cup \{c\} \end{array}$$

Die Iteration:

	0	1	2	3	4
x_1	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{a, c\}$	$\{a, c\}$	
x_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{a\}$	
x_3	$\emptyset$	$\{c\}$	$\{a, c\}$	$\{a, c\}$	

Beispiel: $\mathbb{D} = 2^{\{a,b,c\}}, \quad \sqsubseteq = \subseteq$

$$\begin{array}{lll} x_1 & \supseteq & \{a\} \cup x_3 \\ x_2 & \supseteq & x_3 \cap \{a, b\} \\ x_3 & \supseteq & x_1 \cup \{c\} \end{array}$$

Die Iteration:

	0	1	2	3	4
x_1	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{a, c\}$	$\{a, c\}$	dito
x_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{a\}$	
x_3	$\emptyset$	$\{c\}$	$\{a, c\}$	$\{a, c\}$	