Sei $k > 0$.

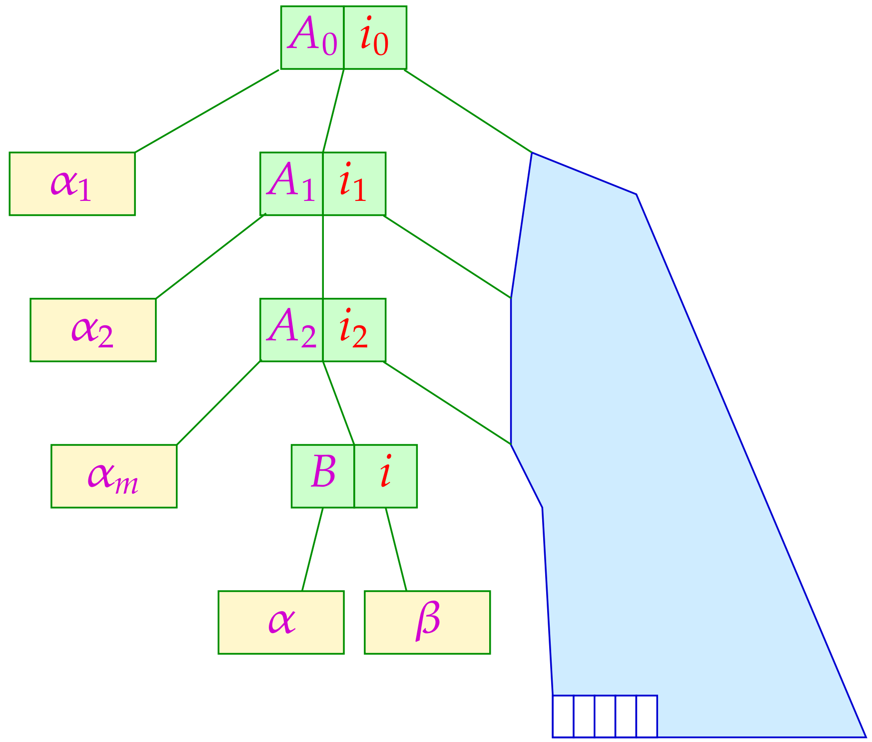
Idee: Wir statten Items mit k-Vorausschau aus :-)

Ein $LR(k)$-Item ist dann ein Paar:

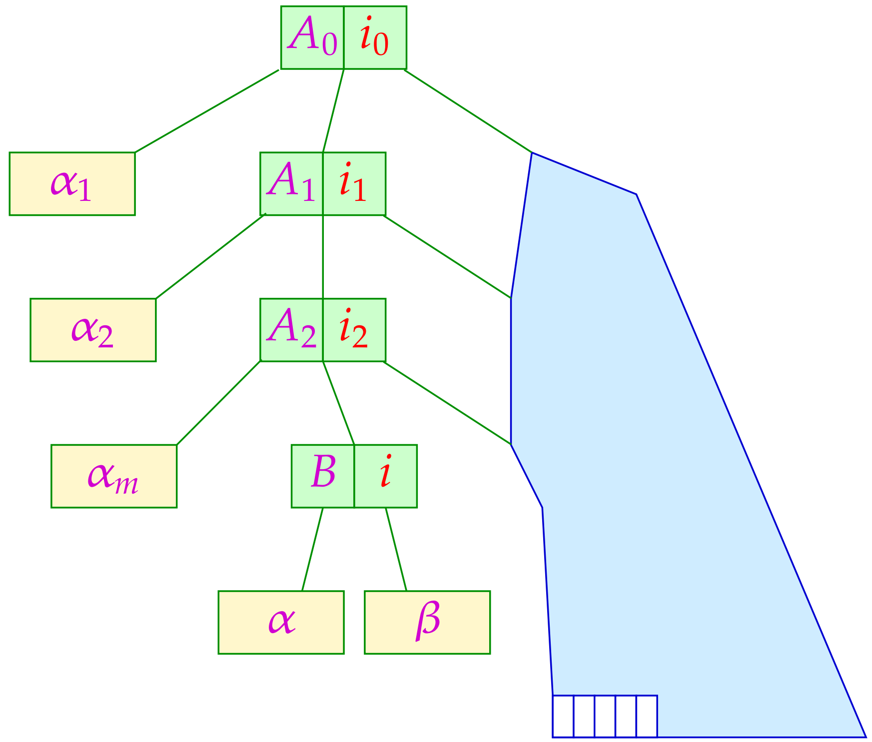
$$[B \to \alpha \bullet \beta,\, x]\,, \qquad x \in \mathsf{Follow}_k(B)$$

Dieses Item ist gültig für $\gamma\,\alpha$ falls:

$$S \to_R^* \gamma\, B\, w \qquad \text{mit} \qquad \{x\} = \mathsf{First}_k(w)$$



... wobei $\alpha_1 \ldots \alpha_m = \gamma$



... wobei $\alpha_1 \ldots \alpha_m = \gamma$

Die Menge der gültigen $LR(k)$-Items für zuverlässige Präfixe berechnen wir wieder mithilfe eines endlichen Automaten :-)

Der Automat $c(G,k)$:

Zustände: $LR(k)$-Items :-)

Anfangszustand: $[S' \to \bullet\, S,\ \epsilon]$

Endzustände: $\{[B \to \gamma\bullet,\ x] \mid B \to \gamma \in P, x \in \mathsf{Follow}_k(B)\}$

Übergänge:

(1) $([A \to \alpha \bullet X\, \beta,\ x], X, [A \to \alpha\, X \bullet \beta,\ x]), \quad X \in (N \cup T)$

(2) $([A \to \alpha \bullet B\, \beta,\ x], \epsilon, [B \to \bullet\, \gamma,\ x']),$

$A \to \alpha\, B\, \beta\ , \quad B \to \gamma \in P, x' \in \mathsf{First}_k(\beta) \odot \{x\};$

Der Automat $c(G,k)$:

Zustände: $LR(k)$-Items :-)

Anfangszustand: $[S' \to \bullet\, S,\ \epsilon]$

Endzustände: $\{[B \to \gamma \bullet,\ x] \mid B \to \gamma \in P, x \in \mathsf{Follow}_k(B)\}$

Übergänge:

(1) $([A \to \alpha \bullet X\, \beta,\ x], X, [A \to \alpha\, X \bullet \beta,\ x]), \quad X \in (N \cup T)$

(2) $([A \to \alpha \bullet B\, \beta,\ x], \epsilon,\ [B \to \bullet\, \gamma,\ x']),$

$$A \to \alpha\, B\, \beta\ , \quad B \to \gamma \in P, x' \in \mathsf{First}_k(\beta) \odot \{x\};$$

Dieser Automat arbeitet wie $c(G)$ — verwaltet aber zusätzlich ein k-Präfix aus dem Follow_k der linken Seiten.

Den kanonischen $LR(k)$-Automaten $LR(G,k)$ erhält man aus $c(G,k)$, indem man nach jedem Übergang beliebig viele ϵ liest und dann den Automaten deterministisch macht ...

Den kanonischen $LR(k)$-Automaten $LR(G,k)$ erhält man aus $c(G,k)$, indem man nach jedem Übergang beliebig viele ϵ liest und dann den Automaten deterministisch macht ...

Man kann ihn aber auch direkt aus der Grammatik konstruieren werden :-)

Wie bei $LR(0)$ benötigt man eine Hilfsfunktion:

$$\begin{aligned}\delta^*_\epsilon(q) = q \cup \{[B \to \bullet\gamma, x] \mid \quad & \exists\, [A \to \alpha \bullet B'\,\beta', x'] \in q\,, \\ & \beta \in (N \cup T)^* : \quad B' \to^* B\,\beta\} \wedge \\ & x \in \mathsf{First}_k(\beta\,\beta') \odot \{x'\}\}\end{aligned}$$

Den kanonischen $LR(k)$-Automaten $LR(G,k)$ erhält man aus $c(G,k)$, indem man nach jedem Übergang beliebig viele ϵ liest und dann den Automaten deterministisch macht ...

Man kann ihn aber auch direkt aus der Grammatik konstruieren werden :-)

Wie bei $LR(0)$ benötigt man eine Hilfsfunktion:

$$\begin{aligned}\delta^*_\epsilon(q) = q \cup \{[B \to \bullet\, \gamma,\, x] \mid\ & \exists\, [A \to \alpha \bullet B'\, \beta',\, x'] \in q,\\ & \beta \in (N \cup T)^* :\quad B' \to^* B\, \beta\} \wedge \\ & x \in \mathsf{First}_k(\beta\, \beta') \odot \{x'\}\}\end{aligned}$$

Zustände: Mengen von $LR(k)$-Items;

Anfangszustand: $\delta^*_\epsilon\, \{[S' \to \bullet\, S,\, \epsilon]\}$

Endzustände: $\{q \mid \exists\, A \to \alpha \in P :\ [A \to \alpha \bullet,\, x] \in q\}$

Übergänge: $\delta(q, X) = \delta^*_\epsilon\, \{[A \to \alpha\, X \bullet\, \beta,\, x] \mid [A \to \alpha \bullet X\, \beta,\, x] \in q\}$

Im Beispiel:

$$q_0 = \{[S' \to \bullet\, E], [E \to \bullet\, E + T], [E \to \bullet\, T], [T \to \bullet\, T * F], [T \to \bullet\, F], [F \to \bullet\, (\, E\,)], [F \to \bullet\, \texttt{int}]\}$$

$$q_1 = \delta(q_0, E) = \{[S' \to E\, \bullet], [E \to E\, \bullet + T]\}$$

$$q_2 = \delta(q_0, T) = \{[E \to T\, \bullet], [T \to T\, \bullet * F]\}$$

$$q_3 = \delta(q_0, F) = \{[T \to F\, \bullet]\}$$

$$q_4 = \delta(q_0, \texttt{int}) \quad \{[F \to \texttt{int}\, \bullet]\}$$

$$q_5 = \delta(q_0, (\,) = \{[F \to (\, \bullet\, E\,)], [E \to \bullet\, E + T], [E \to \bullet\, T], [T \to \bullet\, T * F], [T \to \bullet\, F], [F \to \bullet\, (\, E\,)], [F \to \bullet\, \texttt{int}]\}$$

Im Beispiel:

$$\begin{array}{lllll} q_0 & = & & & \{[S' \to \bullet\, E,\ \{\epsilon\}], \\ & & & & [E \to \bullet\, E + T,\ \{\epsilon, +\}], \\ & & & & [E \to \bullet\, T,\ \{\epsilon, +\}], \\ & & & & [T \to \bullet\, T * F,\ \{\epsilon, +, *\}], \\ & & & & [T \to \bullet\, F,\ \{\epsilon, +, *\}], \\ & & & & [F \to \bullet\, (\, E\,),\ \{\epsilon, +, *\}], \\ & & & & [F \to \bullet\, \mathsf{int}, \{\epsilon, +, *\}]\} \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} q_1 & = & \delta(q_0, E) & = & \{[S' \to E\, \bullet\quad], \\ & & & & [E \to E\, \bullet + T\quad]\} \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} q_2 & = & \delta(q_0, T) & = & \{[E \to T\, \bullet\quad], \\ & & & & [T \to T\, \bullet * F\quad]\} \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} q_3 & = & \delta(q_0, F) & = & \{[T \to F\, \bullet\quad]\} \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} q_4 & = & \delta(q_0, \mathsf{int}) & & \{[F \to \mathsf{int}\, \bullet\quad]\} \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} q_5 & = & \delta(q_0, (\,) & = & \{[F \to (\, \bullet\, E\,)\quad], \\ & & & & [E \to \bullet\, E + T\quad], \\ & & & & [E \to \bullet\, T\quad], \\ & & & & [T \to \bullet\, T * F\quad], \\ & & & & [T \to \bullet\, F\quad], \\ & & & & [F \to \bullet\, (\, E\,)\quad], \\ & & & & [F \to \bullet\, \mathsf{int}\quad]\} \end{array}$$

Im Beispiel:

$$
\begin{array}{lllll}
q_0 & = & & & \{[S' \to \bullet\, E,\ \{\epsilon\}], \\
& & & & [E \to \bullet\, E + T,\ \{\epsilon, +\}], \\
& & & & [E \to \bullet\, T,\ \{\epsilon, +\}], \\
& & & & [T \to \bullet\, T * F,\ \{\epsilon, +, *\}], \\
& & & & [T \to \bullet\, F,\ \{\epsilon, +, *\}], \\
& & & & [F \to \bullet\, (\, E\,),\ \{\epsilon, +, *\}], \\
& & & & [F \to \bullet\, \mathsf{int},\ \{\epsilon, +, *\}]\} \\
\\
q_1 & = & \delta(q_0, E) & = & \{[S' \to E \bullet,\ \{\epsilon\}], \\
& & & & [E \to E \bullet + T,\ \{\epsilon, +\}]\} \\
\\
q_2 & = & \delta(q_0, T) & = & \{[E \to T \bullet,\ \{\epsilon, +\}], \\
& & & & [T \to T \bullet * F,\ \{\epsilon, +, *\}]\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
q_3 & = & \delta(q_0, F) & = & \{[T \to F \bullet,\ \{\epsilon, +, *\}]\} \\
\\
q_4 & = & \delta(q_0, \mathsf{int}) & & \{[F \to \mathsf{int} \bullet,\ \{\epsilon, +, *\}]\} \\
\\
q_5 & = & \delta(q_0, (\,) & = & \{[F \to (\, \bullet\, E\,) \quad], \\
& & & & [E \to \bullet\, E + T \quad], \\
& & & & [E \to \bullet\, T \quad], \\
& & & & [T \to \bullet\, T * F \quad], \\
& & & & [T \to \bullet\, F \quad], \\
& & & & [F \to \bullet\, (\, E\,) \quad], \\
& & & & [F \to \bullet\, \mathsf{int} \quad]\}
\end{array}
$$

Im Beispiel:

$$
\begin{aligned}
q_0 &= && \{[S' \to \bullet\, E,\ \{\epsilon\}],\\
&&& [E \to \bullet\, E + T,\ \{\epsilon, +\}],\\
&&& [E \to \bullet\, T,\ \{\epsilon, +\}],\\
&&& [T \to \bullet\, T * F,\ \{\epsilon, +, *\}],\\
&&& [T \to \bullet\, F,\ \{\epsilon, +, *\}],\\
&&& [F \to \bullet\, (\ E\ )\,,\ \{\epsilon, +, *\}],\\
&&& [F \to \bullet\, \mathsf{int}, \{\epsilon, +, *\}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \delta(q_0, E) &=& \{[S' \to E\bullet,\ \{\epsilon\}],\\
&&& [E \to E \bullet + T,\ \{\epsilon, +\}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_2 &= \delta(q_0, T) &=& \{[E \to T\bullet,\ \{\epsilon, +\}],\\
&&& [T \to T \bullet * F,\ \{\epsilon, +, *\}]\}
\end{aligned}
$$

$$
q_3 = \delta(q_0, F) = \{[T \to F\bullet,\ \{\epsilon, +, *\}]\}
$$

$$
q_4 = \delta(q_0, \mathsf{int}) \quad \{[F \to \mathsf{int}\,\bullet,\ \{\epsilon, +, *\}]\}
$$

$$
\begin{aligned}
q_5 &= \delta(q_0,\ (\ ) &=& \{[F \to (\ \bullet\, E\ )\,,\ \{\epsilon, +, *\}],\\
&&& [E \to \bullet\, E + T,\ \{\ )\ , +\}],\\
&&& [E \to \bullet\, T,\ \{\ )\ , +\}],\\
&&& [T \to \bullet\, T * F,\ \{\ )\ , +, *\}],\\
&&& [T \to \bullet\, F,\ \{\ )\ , +, *\}],\\
&&& [F \to \bullet\, (\ E\ )\,,\ \{\ )\ , +, *\}],\\
&&& [F \to \bullet\, \mathsf{int},\ \{\ )\ , +, *\}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_5' &= \delta(q_5, () = \{[F \longrightarrow (\bullet E)], \\
&\quad [E \longrightarrow \bullet E + T], \\
&\quad [E \longrightarrow \bullet T], \\
&\quad [T \longrightarrow \bullet T * F], \\
&\quad [T \longrightarrow \bullet F], \\
&\quad [F \longrightarrow \bullet (E)], \\
&\quad [F \longrightarrow \bullet \mathsf{int}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_6 &= \delta(q_1, +) = \{[E \longrightarrow E + \bullet T], \\
&\quad [T \longrightarrow \bullet T * F], \\
&\quad [T \longrightarrow \bullet F], \\
&\quad [F \longrightarrow \bullet (E)], \\
&\quad [F \longrightarrow \bullet \mathsf{int}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_7 &= \delta(q_2, *) = \{[T \longrightarrow T * \bullet F], \\
&\quad [F \longrightarrow \bullet (E)], \\
&\quad [F \longrightarrow \bullet \mathsf{int}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_8 &= \delta(q_5, E) = \{[F \longrightarrow (E \bullet)]\} \\
&\quad [E \longrightarrow E \bullet + T]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_9 &= \delta(q_6, T) = \{[E \longrightarrow E + T \bullet], \\
&\quad [T \longrightarrow T \bullet * F]\}
\end{aligned}
$$

$$
q_{10} = \delta(q_7, F) = \{[T \longrightarrow T * F \bullet]\}
$$

$$
q_{11} = \delta(q_8,)) = \{[F \longrightarrow (E) \bullet]\}
$$

$$
\begin{aligned}
q_5' &= \delta(q_5, () &= \{&[F \to (\bullet E), \{), +, *\}],\\
&&&[E \to \bullet E + T, \{), +\}],\\
&&&[E \to \bullet T, \{), +\}],\\
&&&[T \to \bullet T * F, \{), +, *\}],\\
&&&[T \to \bullet F, \{), +, *\}],\\
&&&[F \to \bullet (E), \{), +, *\}],\\
&&&[F \to \bullet \mathsf{int}, \{), +, *\}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_6 &= \delta(q_1, +) &= \{&[E \to E + \bullet T],\\
&&&[T \to \bullet T * F],\\
&&&[T \to \bullet F],\\
&&&[F \to \bullet (E)],\\
&&&[F \to \bullet \mathsf{int}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_7 &= \delta(q_2, *) &= \{&[T \to T * \bullet F],\\
&&&[F \to \bullet (E)],\\
&&&[F \to \bullet \mathsf{int}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_8 &= \delta(q_5, E) &= \{&[F \to (E \bullet)]\}\\
&&&[E \to E \bullet + T]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_9 &= \delta(q_6, T) &= \{&[E \to E + T \bullet],\\
&&&[T \to T \bullet * F]\}
\end{aligned}
$$

$$
q_{10} = \delta(q_7, F) = \{[T \to T * F \bullet]\}
$$

$$
q_{11} = \delta(q_8,)) = \{[F \to (E) \bullet]\}
$$

$$
\begin{aligned}
q_5' &= \delta(q_5, (\,) = \{[F \to (\bullet E), \{),+,*\}],\\
&\qquad [E \to \bullet E + T, \{),+\}],\\
&\qquad [E \to \bullet T, \{),+\}],\\
&\qquad [T \to \bullet T * F, \{),+,*\}],\\
&\qquad [T \to \bullet F, \{),+,*\}],\\
&\qquad [F \to \bullet (E), \{),+,*\}],\\
&\qquad [F \to \bullet \mathsf{int}, \{),+,*\}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_6 &= \delta(q_1, +) = \{[E \to E + \bullet T, \{\epsilon,+\}],\\
&\qquad [T \to \bullet T * F, \{\epsilon,+,*\}],\\
&\qquad [T \to \bullet F, \{\epsilon,+,*\}],\\
&\qquad [F \to \bullet (E), \{\epsilon,+,*\}],\\
&\qquad [F \to \bullet \mathsf{int}, \{\epsilon,+,*\}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_7 &= \delta(q_2, *) = \{[T \to T * \bullet F \quad],\\
&\qquad [F \to \bullet (E) \quad],\\
&\qquad [F \to \bullet \mathsf{int} \quad]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_8 &= \delta(q_5, E) = \{[F \to (E \bullet) \quad]\}\\
&\qquad [E \to E \bullet + T \quad]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_9 &= \delta(q_6, T) = \{[E \to E + T \bullet \quad],\\
&\qquad [T \to T \bullet * F \quad]\}
\end{aligned}
$$

$$
q_{10} = \delta(q_7, F) = \{[T \to T * F \bullet \quad]\}
$$

$$
q_{11} = \delta(q_8,)\,) = \{[F \to (E) \bullet \quad]\}
$$

$$
\begin{aligned}
q_5' = \delta(q_5, (\,) = \{ & [F \to (\, \bullet E\,),\ \{\,),+,*\}], \\
& [E \to \bullet E + T,\ \{\,),+\}], \\
& [E \to \bullet T,\ \{\,),+\}], \\
& [T \to \bullet T * F,\ \{\,),+,*\}], \\
& [T \to \bullet F,\ \{\,),+,*\}], \\
& [F \to \bullet (\,E\,),\ \{\,),+,*\}], \\
& [F \to \bullet \mathrm{int},\ \{\,),+,*\}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_6 = \delta(q_1, +) = \{ & [E \to E + \bullet T,\ \{\epsilon,+\}], \\
& [T \to \bullet T * F,\ \{\epsilon,+,*\}], \\
& [T \to \bullet F,\ \{\epsilon,+,*\}], \\
& [F \to \bullet (\,E\,),\ \{\epsilon,+,*\}], \\
& [F \to \bullet \mathrm{int},\ \{\epsilon,+,*\}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_7 = \delta(q_2, *) = \{ & [T \to T * \bullet F,\ \{\epsilon,+,*\}], \\
& [F \to \bullet (\,E\,),\ \{\epsilon,+,*\}], \\
& [F \to \bullet \mathrm{int},\ \{\epsilon,+,*\}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_8 = \delta(q_5, E) = \{ & [F \to (\,E \bullet\,),\{\epsilon,+,*\}]\} \\
& [E \to E \bullet + T,\ \{\,),+\}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_9 = \delta(q_6, T) = \{ & [E \to E + T\bullet,\ \{\epsilon,+\}], \\
& [T \to T \bullet * F,\ \{\epsilon,+,*\}]\}
\end{aligned}
$$

$$
q_{10} = \delta(q_7, F) = \{[T \to T * F\bullet,\ \{\epsilon,+,*\}]\}
$$

$$
q_{11} = \delta(q_8,)\,) = \{[F \to (\,E\,)\bullet,\ \{\epsilon,+,*\}]\}
$$

$$q'_2 = \delta(q'_5, T) = \{[E \rightarrow T\bullet, \{\,)\,, +\}], [T \rightarrow T \bullet * F, \{\,)\,, +, *\}]\}$$

$$q'_3 = \delta(q'_5, F) = \{[F \rightarrow F\bullet, \{\,)\,, +, *\}]\}$$

$$q'_4 = \delta(q'_5, \mathsf{int}) = \{[F \rightarrow \mathsf{int}\bullet, \{\,)\,, +, *\}]\}$$

$$q'_6 = \delta(q_8, +) = \{[E \rightarrow E + \bullet T, \{\,)\,, +\}], [T \rightarrow \bullet T * F, \{\,)\,, +, *\}], [T \rightarrow \bullet F, \{\,)\,, +, *\}], [F \rightarrow \bullet (\,E\,), \{\,)\,, +, *\}], [F \rightarrow \bullet \mathsf{int}, \{\,)\,, +, *\}]\}$$

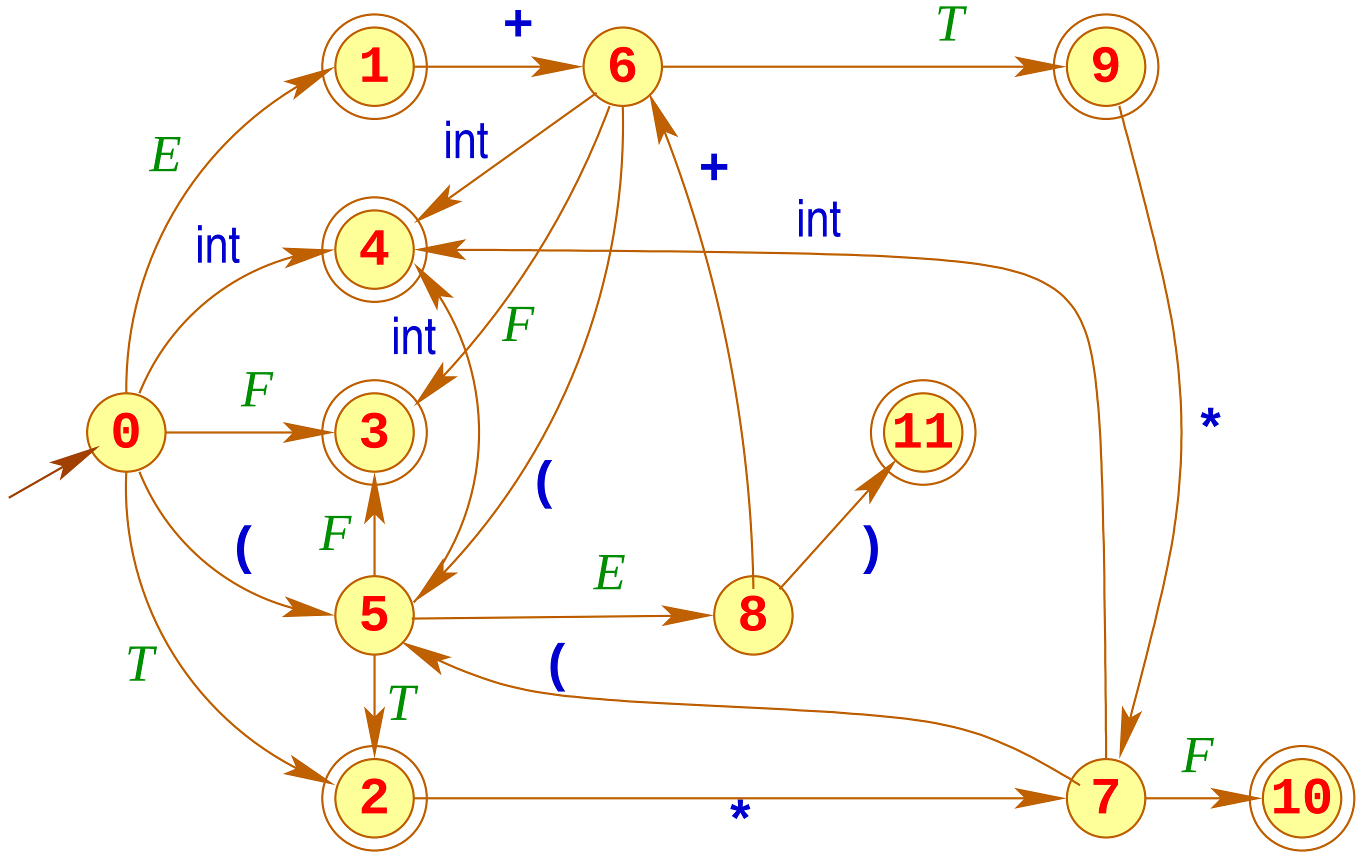
$$q'_7 = \delta(q_9, *) = \{[T \rightarrow T * \bullet F, \{\,)\,, +, *\}], [F \rightarrow \bullet (\,E\,), \{\,)\,, +, *\}], [F \rightarrow \bullet \mathsf{int}, \{\,)\,, +, *\}]\}$$

$$q'_8 = \delta(q'_5, E) = \{[F \rightarrow (\,E \bullet\,), \{\,)\,, +, *\}] [E \rightarrow E \bullet + T, \{\,)\,, +\}]\}$$

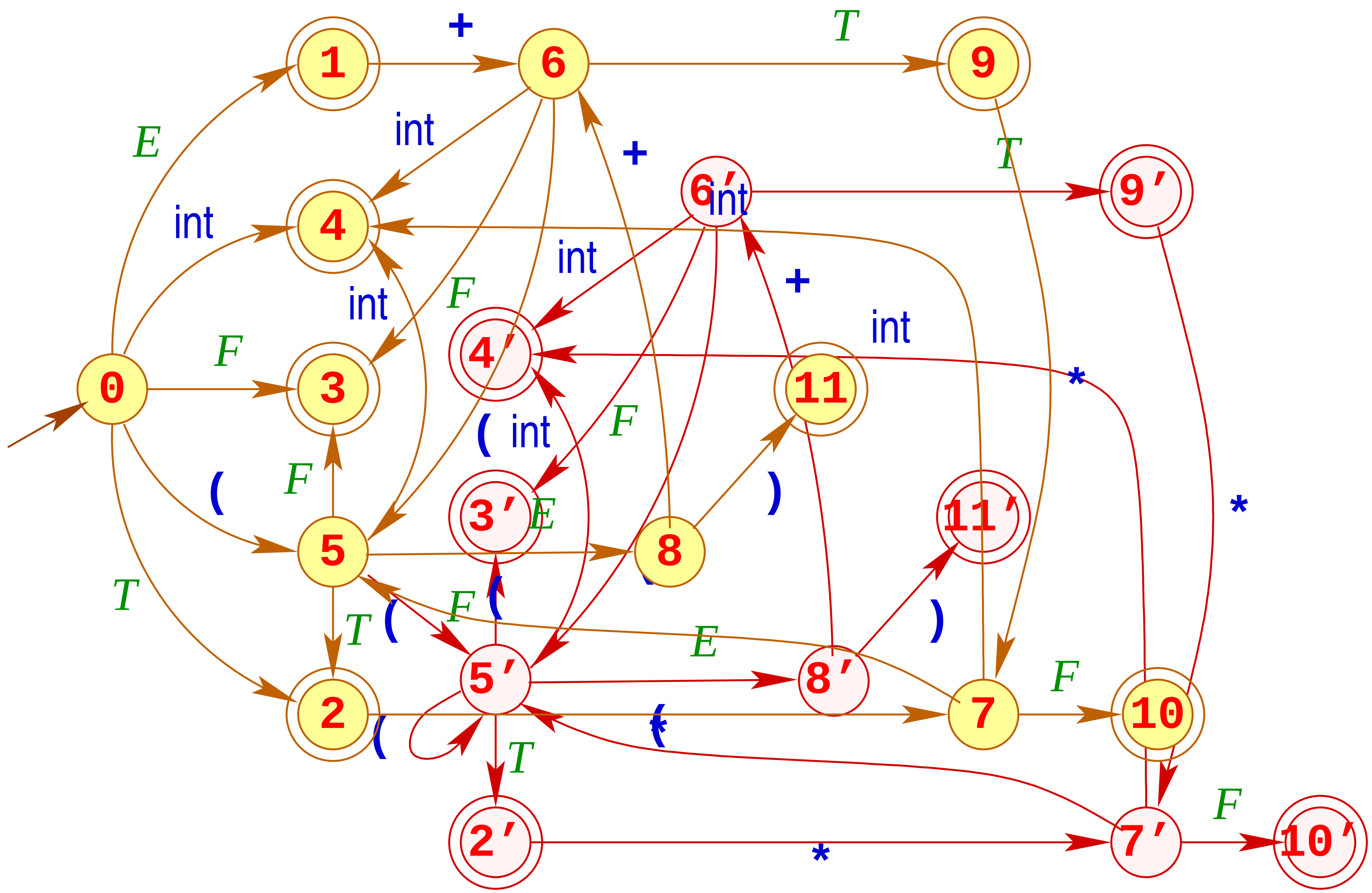
$$q'_9 = \delta(q'_6, T) = \{[E \rightarrow E + T\bullet, \{\,)\,, +\}], [T \rightarrow T \bullet * F, \{\,)\,, +, *\}]$$

$$q'_{10} = \delta(q'_7, F) = \{[T \rightarrow T * F\bullet, \{\,)\,, +, *\}]\}$$

$$q'_{11} = \delta(q'_8, \,)\,) = \{[F \rightarrow (\,E\,)\bullet, \{\,)\,, +, *\}]\}$$



0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
E
int
F
(
T
+
T
int
int
F
F
(
E
+
int
)
*
T
(
*
F



0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
2′
3′
4′
5′
6′
7′
8′
9′
10′
11′
E
T
F
int
(
)
+
*

Diskussion:

- Im Beispiel hat sich die Anzahl der Zustände fast verdoppelt :-)

  Es kann noch schlimmer kommen :-(

- Die Konflikte in den Zuständen q_1, q_2, q_9 sind nun aufgelöst ...

  Z.B. haben wir für:

$$
\begin{aligned}
q_9 = \; & \{[E \to E + T\bullet,\ \{\epsilon, +\}], \\
& \;[T \to \; T \bullet * F,\ \{\epsilon, +, *\}]\}
\end{aligned}
$$

$$\{\epsilon, +\} \cap (\mathsf{First}_1(*\, F) \odot \{\epsilon, +, *\}) \;=\; \{\epsilon, +\} \cap \{*\} = \emptyset$$

Allgemein: Wir identifizieren zwei Konflikte:

Reduce-Reduce-Konflikt:

$$[A \to \gamma \bullet, x], \quad [A' \to \gamma' \bullet, x] \quad \in \quad q \quad \text{mit} \quad A \neq A' \vee \gamma \neq \gamma'$$

Shift-Reduce-Konflikt:

$$[A \to \gamma \bullet, x], \quad [A' \to \alpha \bullet a\, \beta, y] \quad \in \quad q \quad \text{mit} \quad a \in T \quad \text{und}$$

$$x \quad \in \quad \{a\} \odot \mathsf{First}_k(\beta) \odot \{y\} \; .$$

für einen Zustand $q \in Q$.

Solche Zustände nennen wir jetzt $LR(k)$-ungeeignet :-)

Satz

Eine reduzierte kontextfreie Grammatik G ist genau dann $LR(k)$ wenn der kanonische $LR(k)$-Automat $LR(G, k)$ keine $LR(k)$-ungeeigneten Zustände besitzt.

Satz

Eine reduzierte kontextfreie Grammatik G ist genau dann $LR(k)$ wenn der kanonische $LR(k)$-Automat $LR(G, k)$ keine $LR(k)$-ungeeigneten Zustände besitzt.

Diskussion:

- Unser Beispiel ist offenbar $LR(1)$:-)
- Im Allgemeinen hat der kanonische $LR(k)$-Automat sehr viel mehr Zustände als $LR(G) = LR(G, 0)$:-(
- Man betrachtet darum i.a. Teilklassen von $LR(k)$-Grammatiken, bei denen man nur $LR(G)$ benutzt ...

Satz

Eine reduzierte kontextfreie Grammatik G ist genau dann $LR(k)$ wenn der kanonische $LR(k)$-Automat $LR(G,k)$ keine $LR(k)$-ungeeigneten Zustände besitzt.

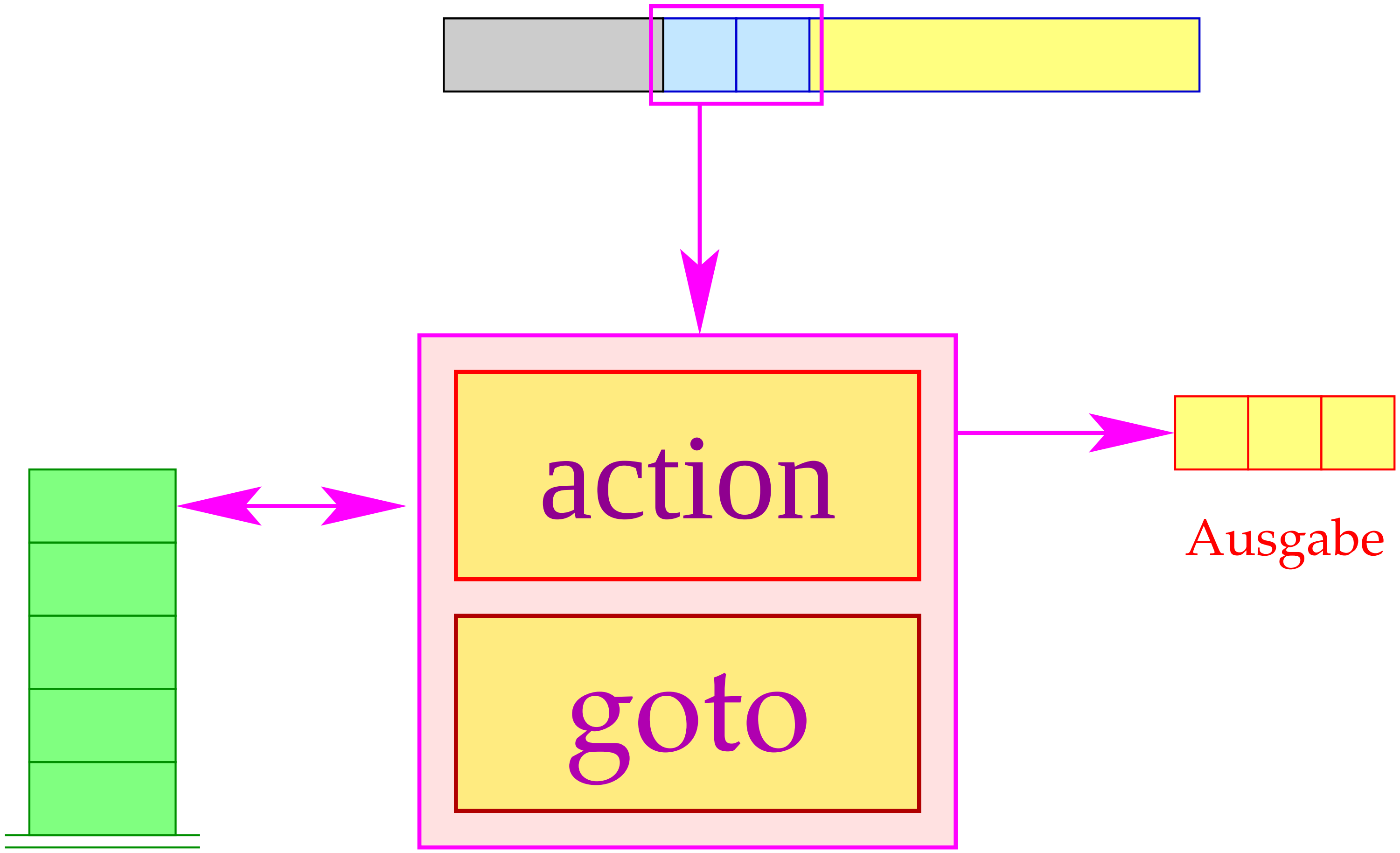
Diskussion:

- Unser Beispiel ist offenbar $LR(1)$:-)
- Im Allgemeinen hat der kanonische $LR(k)$-Automat sehr viel mehr Zustände als $LR(G) = LR(G,0)$:-(
- Man betrachtet darum i.a. Teilklassen von $LR(k)$-Grammatiken, bei denen man nur $LR(G)$ benutzt ...
- Zur Konflikt-Auflösung ordnet man den Items in den Zuständen Vorausschau-Mengen zu:

  (1) Die Zuordnung ist unabhängig vom Zustand $\Longrightarrow$ Simple $LR(k)$

  (2) Die Zuordnung hängt vom Zustand ab $\Longrightarrow$ $LALR(k)$

Der $LR(k)$-Parser:



Erläuterung:

- Die goto-Tabelle kodiert die Zustandsübergänge:

$$\text{goto}[q, X] = \delta(q, X) \quad \in \quad Q$$

- Die action-Tabelle beschreibt für jeden Zustand q und möglichen Look-ahead w die erforderliche Aktion.

Diese sind:

shift	//	Shift-Operation
reduce $(A \rightarrow \gamma)$	//	Reduktion mit Ausgabe
error	//	Fehler

... im Beispiel:

$$
\begin{array}{lllll}
E & \to & E + T^{\,0} & \mid & T^{\,1} \\
T & \to & T * F^{\,0} & \mid & F^{\,1} \\
F & \to & (\, E \,)^{\,0} & \mid & \mathsf{int}^{\,1}
\end{array}
$$

action	ϵ	int	(	)	$+$	$*$
q_1	$S', 0$					s
q_2	$E, 1$					s
q_2'				$E, 1$		s
q_3	$T, 1$				$T, 1$	$T, 1$
q_3'				$T, 1$	$T, 1$	$T, 1$
q_4	$F, 1$				$F, 1$	$F, 1$
q_4'				$F, 1$	$F, 1$	$F, 1$
q_9	$E, 0$				$E, 0$	s
q_9'				$E, 0$	$E, 0$	s
q_{10}	$T, 0$				$T, 0$	$T, 0$
q_{10}'				$T, 0$	$T, 0$	$T, 0$
q_{11}	$F, 0$				$F, 0$	$F, 0$
q_{11}'				$F, 0$	$F, 0$	$F, 0$

2.7 Spezielle Bottom-up-Verfahren mit $LR(G)$

Idee 1: Benutze Follow_k-Mengen zur Konflikt-Lösung ...

Reduce-Reduce-Konflikt:

Falls für $[A \to \gamma \bullet], \; [A' \to \gamma' \bullet] \; \in \; q$ mit $A \neq A' \vee \gamma \neq \gamma'$,

$$\text{Follow}_k(A) \cap \text{Follow}_k(A') \neq \emptyset$$

Shift-Reduce-Konflikt:

Falls für $[A \to \gamma \bullet], \; [A' \to \alpha \bullet a\, \beta] \; \in \; q$ mit $a \in T$,

$$\text{Follow}_k(A) \cap (\{a\} \odot \text{First}_k(\beta) \odot \text{Follow}_k(A')) \neq \emptyset$$

für einen Zustand $q \in Q$.

Dann nennen wir den Zustand q $SLR(k)$-ungeeignet :-)

Die reduzierte Grammatik G nennen wir $SLR(k)$ (simple $LR(k)$:-), falls der kanonische $LR(0)$-Automat $LR(G)$ keine $SLR(k)$-ungeeigneten Zustände enthält :-)

Die reduzierte Grammatik G nennen wir $SLR(k)$ (simple $LR(k)$:-), falls der kanonische $LR(0)$-Automat $LR(G)$ keine $SLR(k)$-ungeeigneten Zustände enthält :-)

... im Beispiel:

Bei unserer Beispiel-Grammatik treten Konflikte möglicherweise in den Zuständen q_1, q_2, q_9 auf:

$$\begin{array}{lll} q_1 & = & \{[S' \to E\bullet], \\ & & [E \to E \bullet + T]\} \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \mathsf{Follow}_1(S') \cap \{+\} \odot \{\ldots\} & = & \{\epsilon\} \cap \{+\} \\ & = & \emptyset \end{array}$$

Die reduzierte Grammatik G nennen wir $SLR(k)$ (simple $LR(k)$:-), falls der kanonische $LR(0)$-Automat $LR(G)$ keine $SLR(k)$-ungeeigneten Zustände enthält :-)

... im Beispiel:

Bei unserer Beispiel-Grammatik treten Konflikte möglicherweise in den Zuständen q_1, q_2, q_9 auf:

$$\begin{array}{lll} q_1 & = & \{[S' \to E\bullet], \\ & & [E \to E \bullet + T]\} \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \text{Follow}_1(S') \cap \{+\} \odot \{\ldots\} & = & \{\epsilon\} \cap \{+\} \\ & = & \emptyset \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} q_2 & = & \{[E \to T\bullet], \\ & & [T \to T \bullet * F]\} \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \text{Follow}_1(E) \cap \{*\} \odot \{\ldots\} & = & \{\epsilon, +,)\} \cap \{*\} \\ & = & \emptyset \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} q_9 & = & \{[E \to E + T\bullet], \\ & & [T \to T \bullet * F]\} \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \text{Follow}_1(E) \cap \{*\} \odot \{\ldots\} & = & \{\epsilon, +,)\} \cap \{*\} \\ & = & \emptyset \end{array}$$

Idee 2:

Berechne für jeden Zustand q Follow-Mengen :-)

Für $[A \to \alpha \bullet \beta] \in q$ definieren wir:

$$\Lambda_k(q, [A \to \alpha \bullet \beta]) = \{\text{First}_k(w) \mid S' \to_R^* \gamma\, A\, w \;\wedge\; \delta(q_0, \gamma\,\alpha) = q\}$$

$$// \quad \subseteq \quad \text{Follow}_k(A)$$

Idee 2:

Berechne für jeden Zustand q Follow-Mengen :-)

Für $[A \to \alpha \bullet \beta] \in q$ definieren wir:

$$\Lambda_k(q, [A \to \alpha \bullet \beta]) = \{\mathsf{First}_k(w) \mid S' \to_R^* \gamma\, A\, w \;\wedge\; \delta(q_0, \gamma\,\alpha) = q\}$$

$$// \subseteq \mathsf{Follow}_k(A)$$

Reduce-Reduce-Konflikt:

$[A \to \gamma \bullet]\,,\; [A' \to \gamma' \bullet] \in q$ mit $A \neq A' \vee \gamma \neq \gamma'$ wobei:

$$\Lambda_k(q, [A \to \gamma \bullet]) \cap \Lambda_k(q, [A' \to \gamma' \bullet]) \neq \emptyset$$

Idee 2: Berechne für jeden Zustand q Follow-Mengen :-)

Für $[A \to \alpha \bullet \beta] \in q$ definieren wir:

$$\begin{array}{lll} \Lambda_k(q, [A \to \alpha \bullet \beta]) & = & \{\mathsf{First}_k(w) \mid S' \to_R^* \gamma\, A\, w \;\wedge \\ & & \qquad \delta(q_0, \gamma\, \alpha) = q\} \\ & // \subseteq & \mathsf{Follow}_k(A) \end{array}$$

Reduce-Reduce-Konflikt:

$[A \to \gamma \bullet],\; [A' \to \gamma' \bullet] \in q$ mit $A \neq A' \vee \gamma \neq \gamma'$ wobei:

$$\Lambda_k(q, [A \to \gamma \bullet]) \cap \Lambda_k(q, [A' \to \gamma' \bullet]) \neq \emptyset$$

Shift-Reduce-Konflikt:

$[A \to \gamma \bullet],\; [A' \to \alpha \bullet a\, \beta] \in q$ mit $a \in T$ wobei:

$$\Lambda_k(q, [A \to \gamma \bullet]) \cap (\{a\} \odot \mathsf{First}_k(\beta) \odot \Lambda_k(q, [A' \to \alpha \bullet a\, \beta])) \neq \emptyset$$

Solche Zustände nennen wir jetzt $LALR(k)$-ungeeignet :-)

Die reduzierte Grammatik G nennen wir $LALR(k)$, falls der kanonische $LR(0)$-Automat $LR(G)$ keine $LALR(k)$-ungeeigneten Zustände enthält :-)

Bevor wir Beispiele betrachten, überlegen wir erst, wie die Mengen $\Lambda_k(q, [A \to \alpha \bullet \beta])$ berechnet werden können :-)

Die reduzierte Grammatik G nennen wir $LALR(k)$, falls der kanonische $LR(0)$-Automat $LR(G)$ keine $LALR(k)$-ungeeigneten Zustände enthält :-)

Bevor wir Beispiele betrachten, überlegen wir erst, wie die Mengen $\Lambda_k(q, [A \to \alpha \bullet \beta])$ berechnet werden können :-)

Idee: Stelle ein Ungleichungssystem auf !!!

$$
\begin{array}{lll}
\Lambda_k(q_0, [S' \to \bullet\, S]) & \supseteq & \{\epsilon\} \\
\Lambda_k(q, [A \to \alpha\, X \bullet \beta]) & \supseteq & \Lambda_k(p, [A \to \alpha \bullet X\, \beta]) \qquad \text{falls} \quad \delta(p, X) = q \\
\Lambda_k(q, [A \to \bullet\, \gamma]) & \supseteq & \mathsf{First}_k(\beta) \odot \Lambda_k(q, [B \to \alpha \bullet A\, \beta]) \qquad \text{falls} \quad [B \to \alpha \bullet A\, \beta] \in q
\end{array}
$$

Beispiel:

$$\begin{array}{lll} S & \rightarrow & A\, b\, B \mid B \\ A & \rightarrow & a \mid b\, B \\ B & \rightarrow & A \end{array}$$

Der kanonische $LR(0)$-Automat hat dann die folgenden Zustände:

$$\begin{array}{lll} q_0 & = & \{[S' \rightarrow \bullet\, S], \\ & & [S \rightarrow \bullet\, A\, b\, B], \\ & & [A \rightarrow \bullet\, a], \\ & & [A \rightarrow \bullet\, b\, B], \\ & & [S \rightarrow \bullet\, B], \\ & & [B \rightarrow \bullet\, A]\} \end{array}$$

$$q_1 = \delta(q_0, S) = \{[S' \rightarrow S \bullet]\}$$

$$q_2 = \delta(q_0, a) = \{[A \rightarrow a \bullet]\}$$

$$\begin{array}{lllll} q_3 & = & \delta(q_0, b) & = & \{[A \rightarrow b \bullet B], \\ & & & & [B \rightarrow \bullet\, A], \\ & & & & [A \rightarrow \bullet\, a], \\ & & & & [A \rightarrow \bullet\, b\, B]\} \end{array}$$

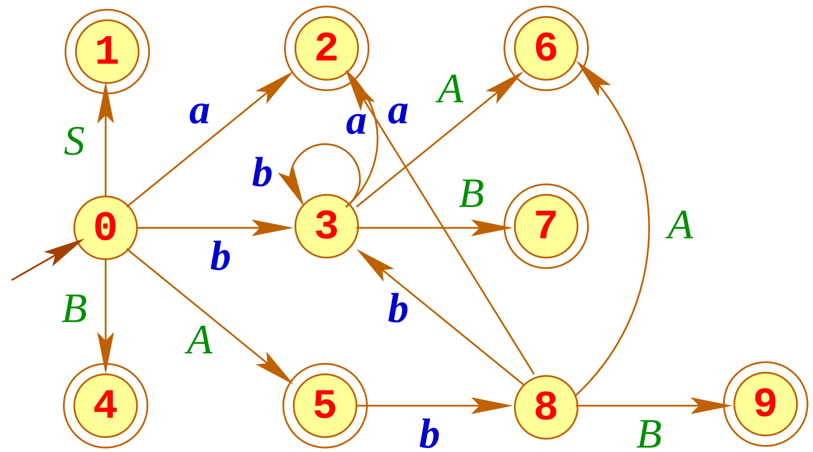
$$q_4 = \delta(q_0, B) = \{[S \rightarrow B \bullet]\}$$

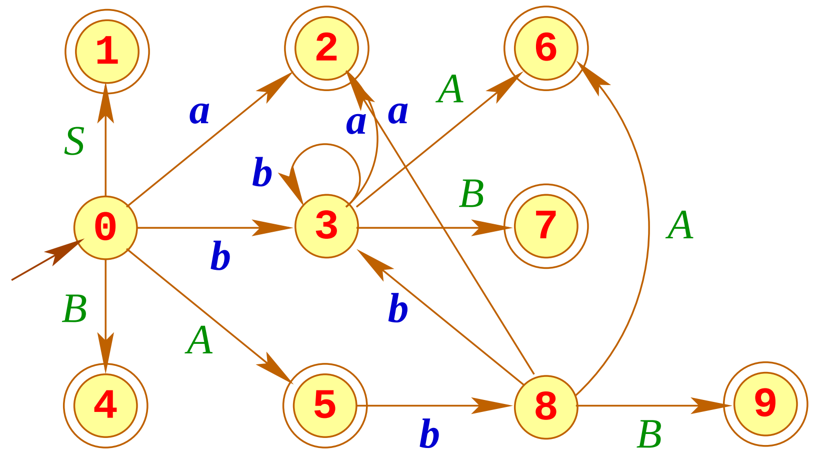
$$
\begin{aligned}
q_5 &= \delta(q_0, A) = \{[S \to A \bullet b\, B], \\
&\qquad\qquad\qquad [B \to A\bullet]\} \\
q_6 &= \delta(q_3, A) = \{[B \to A\bullet]\} \\
q_7 &= \delta(q_3, B) = \{[A \to b\, B\bullet]\}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
q_8 &= \delta(q_5, b) = \{[S \to A\, b \bullet B], \\
&\qquad\qquad\qquad [B \to \bullet A], \\
&\qquad\qquad\qquad [A \to \bullet a], \\
&\qquad\qquad\qquad [A \to \bullet b\, B]\} \\
q_9 &= \delta(q_8, B) = \{[S \to A\, b\, B\bullet]\}
\end{aligned}
$$

Shift-Reduce-Konflikt:

$$
\begin{aligned}
q_5 &= \{[S \to A \bullet b\, B], \\
&\qquad [B \to A\bullet]\}
\end{aligned}
$$

Dabei ist: $\mathsf{Follow}_1(B) \cap \{b\} \odot \{\ldots\} = \{\epsilon, b\} \cap \{b\} \neq \emptyset$

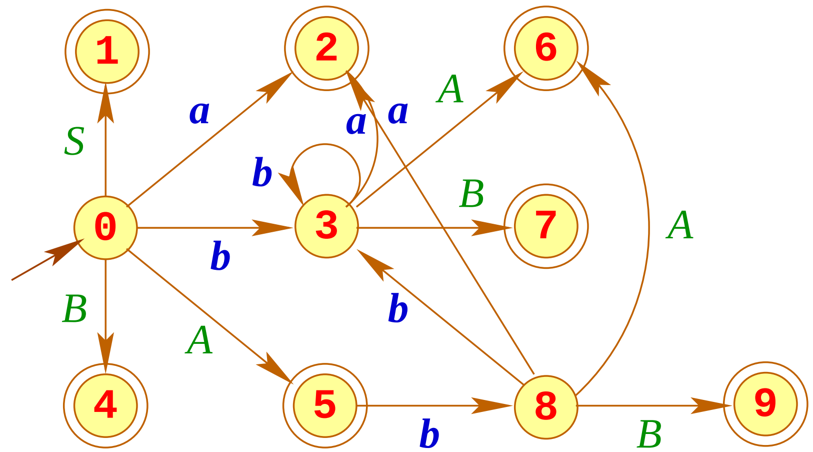

1
2
6
S
a
a
a
A
b
0
3
B
7
A
b
b
B
A
4
5
8
9
b
B



Ausschnitt des Ungleichungssystems:

$$\Lambda_1(q_5, [B \to A\bullet]) \supseteq \Lambda_1(q_0, [B \to \bullet\, A])$$

$$\begin{aligned}\Lambda_1(q_0, [B \to \bullet\, A]) &\supseteq \Lambda_1(q_0, [S \to \bullet\, B])\\ \Lambda_1(q_0, [S \to \bullet\, B]) &\supseteq \Lambda_1(q_0, [S' \to \bullet\, S])\\ \Lambda_1(q_0, [S' \to \bullet\, S]) &\supseteq \{\epsilon\}\end{aligned}$$



Ausschnitt des Ungleichungssystems:

$$\Lambda_1(q_1, [B \to A\bullet]) \supseteq \Lambda_1(q_0, [B \to \bullet\, A])$$

$$\begin{aligned} \Lambda_1(q_0, [B \to \bullet\, A]) &\supseteq \Lambda_1(q_0, [S \to \bullet\, B]) \\ \Lambda_1(q_0, [S \to \bullet\, B]) &\supseteq \Lambda_1(q_0, [S' \to \bullet\, S]) \\ \Lambda_1(q_0, [S' \to \bullet\, S]) &\supseteq \{\epsilon\} \end{aligned}$$

Folglich: $\Lambda_1(q_5, [B \to A\bullet]) = \{\epsilon\}$

Diskussion:

- Das Beispiel ist folglich nicht $SLR(1)$, aber $LALR(1)$:-)
- Das Beispiel ist nicht so an den Haaren herbei gezogen, wie es scheint ...
- Umbenennung: $A \Rightarrow L$ $B \Rightarrow R$ $a \Rightarrow \mathsf{id}$ $b \Rightarrow * \,/ =$ liefert:

$$\begin{array}{lll} S & \rightarrow & L = R \mid R \\ L & \rightarrow & \mathsf{id} \mid *\, R \\ R & \rightarrow & L \end{array}$$

... d.h. ein Fragment der Grammatik für C-Ausdrücke ;-)

Für $k = 1$ lassen sich die Mengen $\Lambda_k(q, [A \to \alpha \bullet \beta])$ wieder effizient berechnen :-)

Das verbesserte Ungleichungsssystem:

$$
\begin{array}{lcll}
\Lambda_1(q_0, [S' \to \bullet S]) & \supseteq & \{\epsilon\} & \\
\Lambda_1(q, [A \to \alpha X \bullet \beta]) & \supseteq & \Lambda_1(p, [A \to \alpha \bullet X \beta]) & \text{falls} \quad \delta(p, X) = q \\
\Lambda_1(q, [A \to \bullet \gamma]) & \supseteq & F_\epsilon(X_j) & \text{falls} \quad [B \to \alpha \bullet A\, X_1 \ldots X_m] \in q \\
 & & & \text{und} \quad \mathsf{empty}(X_1) \wedge \ldots \wedge \mathsf{empty}(X_{j-1}) \\
\Lambda_1(q, [A \to \bullet \gamma]) & \supseteq & \Lambda_1(q, [B \to \alpha \bullet A\, X_1 \ldots X_m]) & \text{falls} \quad [B \to \alpha \bullet A\, X_1 \ldots X_m] \in q \\
 & & & \text{und} \quad \mathsf{empty}(X_1) \wedge \ldots \wedge \mathsf{empty}(X_m)
\end{array}
$$

$\Longrightarrow$ ein reines Vereinigungsproblem :-))