

Behauptung:

`sorted x ∧ sorted y → sorted (merge x y)`
für alle Listen `x, y`.

Beweis: Induktion über die **Summe** n der Längen von `x, y` :-)

Gelte `sorted x ∧ sorted y`.

$n = 0$: Dann gilt: `x = [] = y`

Wir schließen:

`sorted (merge x y)` = `sorted (merge [] [])`
= `sorted []`
= `true` :-)

$n > 0 :$

Fall 1: $x = []$.

Wir schließen:

```
sorted (merge x y) = sorted (merge [] y)
                  = sorted y
                  = true   :-)
```

Fall 2: $y = []$ analog :-)

Fall 3: $x = x1::xs \wedge y = y1::ys \wedge x1 \leq y1.$

Wir schließen:

```
sorted (merge x y) = sorted (merge (x1::xs) (y1::ys))
                  = sorted (x1 :: merge xs y)
                  = ...
```

Fall 3.1: $xs = []$

Wir schließen:

```
... = sorted (x1 :: merge [] y)
     = sorted (x1 :: y)
     = sorted y
     = true :-)
```

Fall 3.2: $xs = x2 :: xs' \wedge x2 \leq y1$.

Insbesondere gilt: $x1 \leq x2 \wedge \text{sorted } xs$.

Wir schließen:

$$\begin{aligned} \dots &= \text{sorted } (x1 :: \text{merge } (x2 :: xs') \ y) \\ &= \text{sorted } (x1 :: x2 :: \text{merge } xs' \ y) \\ &= \text{sorted } (x2 :: \text{merge } xs' \ y) \\ &= \text{sorted } (\text{merge } xs \ y) \\ &= \text{true} \text{ nach Induktionsannahme :-)} \end{aligned}$$

Fall 3.3: $xs = x2 :: xs' \wedge x2 > y1$.

Insbesondere gilt: $x1 \leq y1 < x2 \wedge \text{sorted } xs$.

Wir schließen:

```
... = sorted (x1 :: merge (x2::xs') (y1::ys))
     = sorted (x1 :: y1 :: merge xs ys)
     = sorted (y1 :: merge xs ys)
     = sorted (merge xs y)
     = true nach Induktionsannahme :-)
```

Fall 4: $x = x1::xs \wedge y = y1::ys \wedge x1 > y1.$

Wir schließen:

```
sorted (merge x y) = sorted (merge (x1::xs) (y1::ys))
                  = sorted (y1 :: merge x ys)
                  = ...
```

Fall 4.1: $ys = []$

Wir schließen:

```
... = sorted (y1 :: merge x [])
    = sorted (y1 :: x)
    = sorted x
    = true :-)
```

Fall 4.2: $ys = y2 :: ys' \wedge x1 > y2.$

Insbesondere gilt: $y1 \leq y2 \wedge \text{sorted } ys.$

Wir schließen:

```
... = sorted (y1 :: merge x (y2 :: ys'))  
    = sorted (y1 :: y2 :: merge x ys')  
    = sorted (y2 :: merge x ys')  
    = sorted (merge x ys)  
    = true nach Induktionsannahme :-)
```

Fall 4.3: $ys = y2 :: ys' \wedge x1 \leq y2$.

Insbesondere gilt: $y1 < x1 \leq y2 \wedge \text{sorted } ys$.

Wir schließen:

```
... = sorted (y1 :: merge (x1::xs) (y2::ys'))
     = sorted (y1 :: x1 :: merge xs ys)
     = sorted (x1 :: merge xs ys)
     = sorted (merge x ys)
     = true nach Induktionsannahme :-))
```

Diskussion:

- Wieder steht der Beweis unter dem Vorbehalt, dass alle Aufrufe der Funktionen `sorted` und `merge` terminieren :-)
- Als zusätzliche Technik benötigten wir **Fallunterscheidungen** über die verschiedenen Möglichkeiten für Argumente in den Aufrufen :-)
- Die Fallunterscheidungen machten den Beweis länglich :-(
// Der Fall $n = 0$ ist tatsächlich überflüssig,
// da er in den Fällen 1 und 2 enthalten ist :-)

Ausblick:

- In Programmoptimierungen möchten wir gelegentlich **Funktionen** austauschen, z.B.

$$\text{comp (map f) (map g) = map (comp f g)}$$

- Offenbar stehen rechts und links des **Gleichheitszeichens** Funktionen, deren Gleichheit **Ocaml** nicht überprüfen kann



Die Logik benötigt einen **stärkeren** Gleichheitsbegriff :-)

- Wir **erweitern** die **Ocaml**-Gleichheit = so dass gilt:

□ $x = y$ falls x und y nicht terminieren ;-)

□ $f = g$ falls $f\ x = g\ x$ für alle x

⇒ **extensionale Gleichheit**

Wir haben:

- Seien der Typ von e_1, e_2 **funktionsfrei**. Dann gilt:

$$\frac{e_1 = e_2 \quad e_1 \text{ terminiert}}{e_1 = e_2 \Rightarrow \text{true}}$$

- Außerdem gibt es eine stark vereinfachte **Substitutionsregel**:

$$\frac{e_1 = e_2}{e[e_1/x] = e[e_2/x]}$$

// Die Annahmen über Terminierung entfallen :-)

⇒ Die Beweistechnik vereinfacht sich :-))

11 Parallele Programmierung

Die Bibliothek `threads.cma` unterstützt die Implementierung von Systemen, die mehr als einen Thread benötigen :-)

Beispiel:

```
module Echo = struct open Thread
  let echo () = print_string (read_line () ^ "\n")
  let main    = let t1 = create echo ()
                in join t1;
                print_int (id (self ()));
                print_string "\n"
end
```

Kommentar:

- Die Struktur `Thread` versammelt Grundfunktionalität zur Erzeugung von Nebenläufigkeit `:-)`
- Die Funktion `create: ('a -> 'b) -> 'a -> t` erzeugt einen neuen Thread mit den folgenden Eigenschaften:
 - der Thread wertet die Funktion auf dem Argument aus;
 - der erzeugende Thread erhält die Thread-Id zurück und läuft unabhängig weiter.
 - Mit den Funktionen: `self : unit -> t` bzw. `id : t -> int` kann man die eigene Thread-Id abfragen bzw. in ein `int` umwandeln.

Weitere nützliche Funktionen:

- Die Funktion `join: t -> unit` hält den aktuellen Thread an, bis die Berechnung des gegebenen Threads beendet ist.
- Die Funktion: `kill: t -> unit` beendet einen Thread;
- Die Funktion: `delay: float -> unit` verzögert den aktuellen Thread um eine Zeit in Sekunden;
- Die Funktion: `exit: unit -> unit` beendet den aktuellen Thread.

Achtung:

- Die interaktive Umgebung funktioniert nicht mit Threads !!
- Stattdessen muss man mit der Option: `-thread` compilieren:
`> ocamlc -thread unix.cma threads.cma Echo.ml`
- Die Bibliothek `threads.cma` benötigt dabei Hilfsfunktionalität der Bibliothek `unix.cma` :-)
`//` unter Windows sieht die Sache vermutlich anders aus :-))
- Das Programm testen können wir dann durch Aufruf von:
`> ./a.out` :-)

```
> ./a.out
> abcdefghijk
> abcdefghijk
> 0
>
```

- **Ocaml**-Threads werden vom System nur simuliert **:-(**
- Die Erzeugung von Threads ist **billig** **:-))**
- Die Programm-Ausführung endet mit der Terminierung des Threads mit der Id **0** .

11.1 Kanäle

Threads kommunizieren über Kanäle :-)

Für Erzeugung, Senden auf und Empfangen aus einem Kanal stellt die Struktur `Event` die folgende Grundfunktionalität bereit:

```
type 'a channel
new_channel : unit -> 'a channel
type 'a event
always     : 'a -> 'a event
sync       : 'a event -> 'a
send       : 'a channel -> 'a -> unit event
receive    : 'a channel -> 'a event
```

- Jeder Aufruf `new_channel()` erzeugt einen anderen Kanal.
- Über einen Kanal können **beliebige** Daten geschickt werden !!!
- `always` wandelt einen Wert in ein **Ereignis** um.
- Senden und Empfangen sind erzeugen **Ereignisse ...**
- **Synchronisierung** auf Ereignisse liefert deren **Wert :-)**

```

module Exchange = struct open Thread open Event
let thread ch = let x = sync (receive ch)
                in print_string (x ^ "\n");
                sync (send ch "got it!")
let main = let ch = new_channel () in create thread ch;
           print_string "main is running ... \n";
           sync (send ch "Greetings!");
           print_string ("He " ^ sync (receive ch) ^ "\n")
end

```

Diskussion:

- `sync (send ch str)` macht das Ereignis des Sendens der Welt offenbar und blockiert den Sender, bis jemand den Wert aus dem Kanal ausgelesen hat ...
- `sync (receive ch)` blockiert den Empfänger, bis ein Wert im Kanal enthalten ist. Dann liefert der Ausdruck diesen Wert :-)
- Synchrone Kommunikation ist eine Alternative zum Austausch von Daten zwischen Threads bzw. zur Organisation von Nebenläufigkeit \implies Rendezvous
- Insbesondere kann sie benutzt werden, um asynchrone Thread-Kooperation zu implementieren :-)