Berechnung aller ableitbaren Fakten:

Berechne sukzessiv Mengen $R^{(i)}$ der Fakten, die mithilfe von Beweisen der Tiefe maximal i abgeleitet werden können ...

$$R^{(0)} = \emptyset \qquad\qquad R^{(i+1)} = \mathcal{F}(R^{(i)})$$

wobei der Operator $\mathcal{F}$ definiert ist durch:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(M) \;=\; \{h[\underline{a}/\underline{X}] \mid \exists\, h \,\texttt{:-}\, l_1, \ldots, l_k. \;\in\; W \;:\; \\ l_1[\underline{a}/\underline{X}], \ldots, l_k[\underline{a}/\underline{X}] \in M\}\end{aligned}$$

// $[\underline{a}/\underline{X}]$ eine Substitution der Variablen $\underline{X}$

// k kann auch 0 sein :-)

Es gilt: $R^{(i)} = \mathcal{F}^{i}(\emptyset) \subseteq \mathcal{F}^{i+1}(\emptyset) = R^{(i+1)}$

Es gilt: $R^{(i)} = \mathcal{F}^i(\emptyset) \subseteq \mathcal{F}^{i+1}(\emptyset) = R^{(i+1)}$

Die Menge R aller implizierten Fakten ist gegeben durch:

$$R = \bigcup_{i \geq 0} R^{(i)} = R^{(n)}$$

für ein geeignetes n — da R endlich ist :-)

Es gilt: $\quad R^{(i)} = \mathcal{F}^{i}(\emptyset) \subseteq \mathcal{F}^{i+1}(\emptyset) = R^{(i+1)}$

Die Menge R aller implizierten Fakten ist gegeben durch:

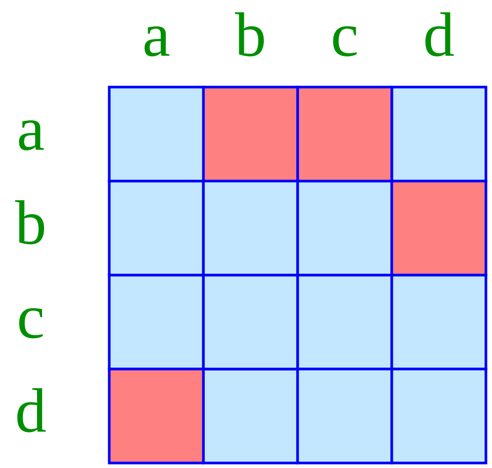
$$R = \bigcup_{i \geq 0} R^{(i)} = R^{(n)}$$

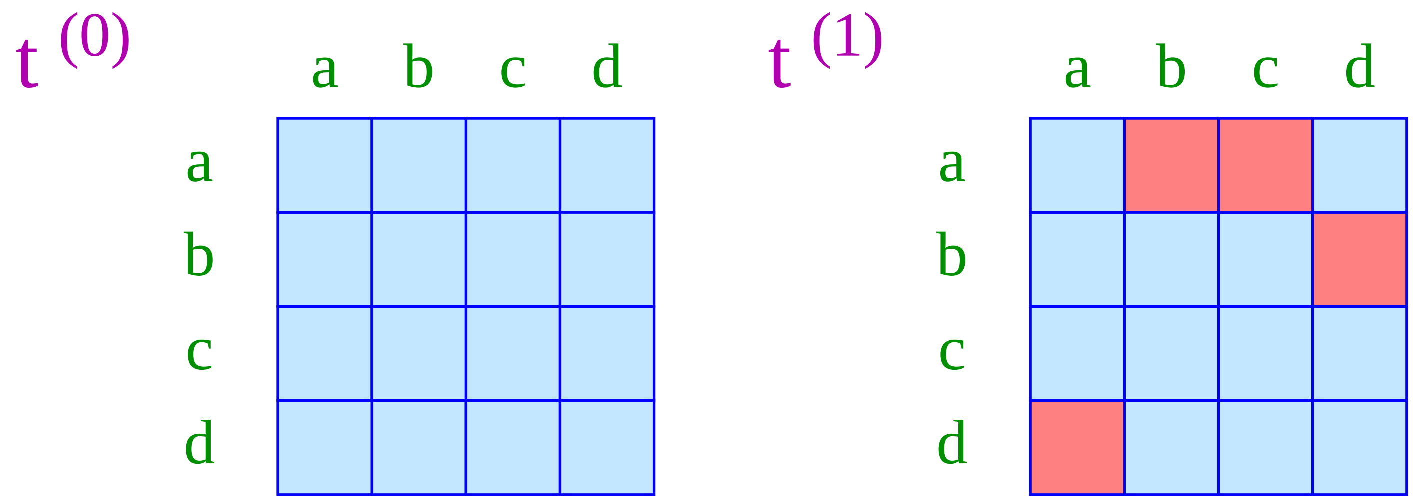
für ein geeignetes n — da R endlich ist :-)

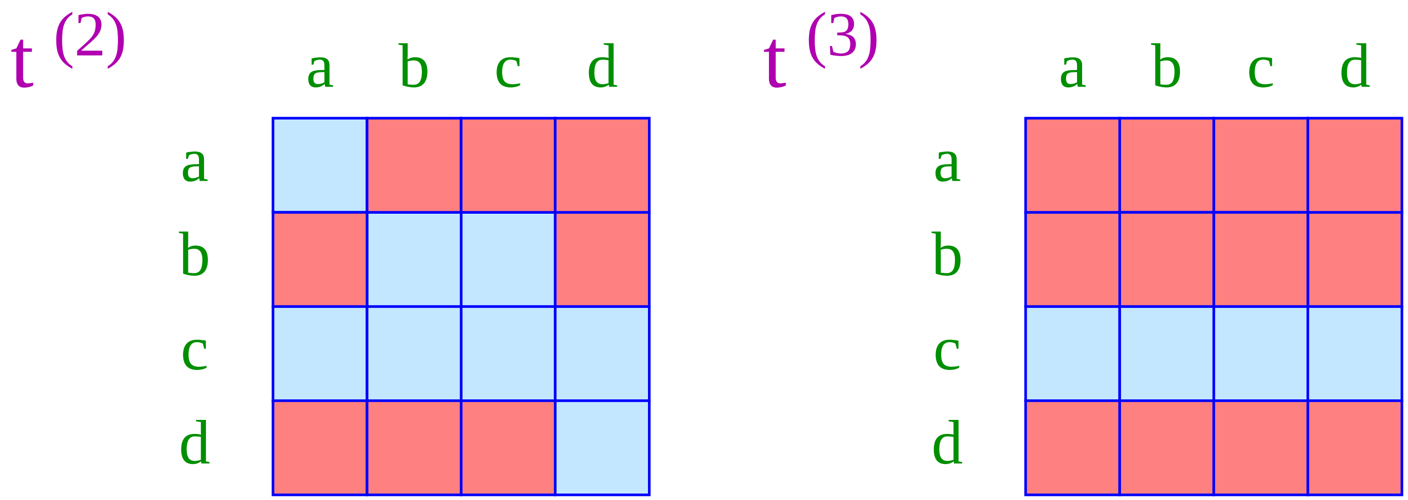
Beispiel:

```
edge (a,b).
edge (a,c).
edge (b,d).
edge (d,a).
t (X,Y) :- edge (X,Y).
t (X,Y) :- edge (X,Z), t (Z,Y).
```

Relation edge :




$t^{(0)}$
a b c d
a
b
c
d
$t^{(1)}$
a b c d
a
b
c
d


$t^{(2)}$
a b c d
a
b
c
d
$t^{(3)}$
a b c d
a
b
c
d

Diskussion:

- Unsere Überlegungen reichen aus, um für ein Datalog-Programm die Menge aller implizierten Fakten zu berechnen :-)
- Aus diesen können wir die Antwort-Substitutionen für die Anfrage ablesen :-))

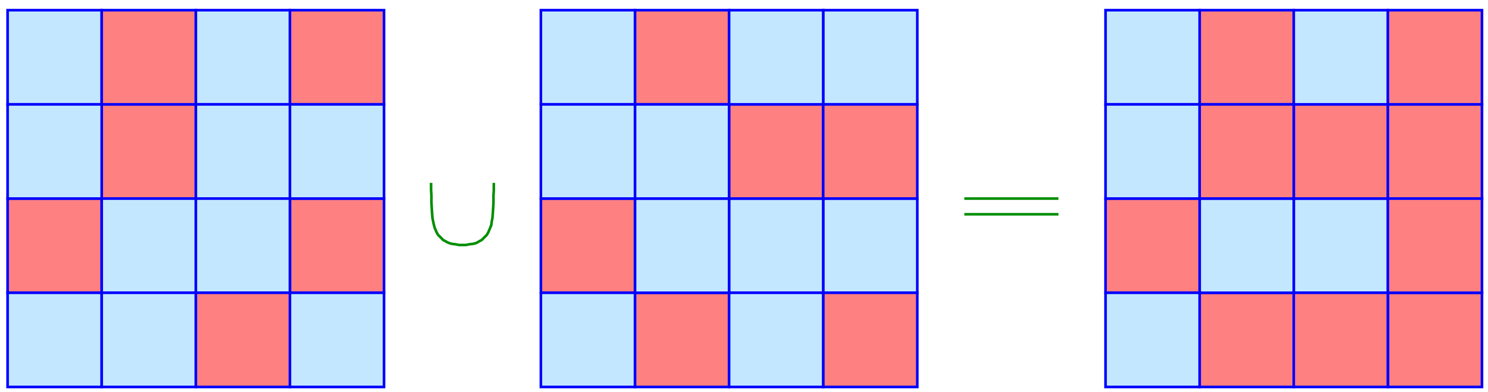
Diskussion:

- Unsere Überlegungen reichen aus, um für ein Datalog-Programm die Menge aller implizierten Fakten zu berechnen :-)
- Aus diesen können wir die Antwort-Substitutionen für die Anfrage ablesen :-))
- Die naive Vorgehensweise ist allerdings hoffnungslos ineffizient :-(
- Intelligentere Verfahren versuchen, Mehrfachberechnungen immer der gleichen Fakten zu vermeiden ...
- Insbesondere braucht man ja auch nur solche Fakten abzuleiten, die zur Beantwortung der Anfrage nützlich sind $\Longrightarrow$ Compilerbau, Datenbanken

12.2 Operationen auf Relationen

- Wir benutzen Prädikate, um Relationen zu beschreiben.
- Auf Relationen gibt es natürliche Operationen, die wir gerne in Datalog, d.h. für Prädikate definieren möchten :-)

1. Vereinigung:



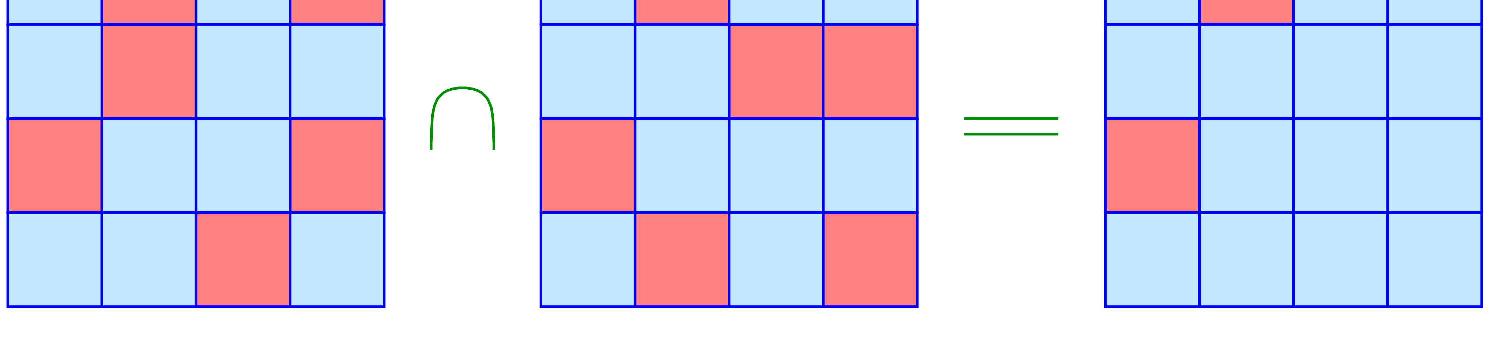
... in Datalog:

$$\begin{array}{lll} r(X_1, \ldots, X_k) & \texttt{:-} & s_1(X_1, \ldots, X_k). \\ r(X_1, \ldots, X_k) & \texttt{:-} & s_2(X_1, \ldots, X_k). \end{array}$$

Beispiel:

```
hört_Brauer_oder_Seidl (X) :- hat_Hörer ("Brauer", X).
hört_Brauer_oder_Seidl (X) :- hat_Hörer ("Seidl", X).
```

2. Durchschnitt:



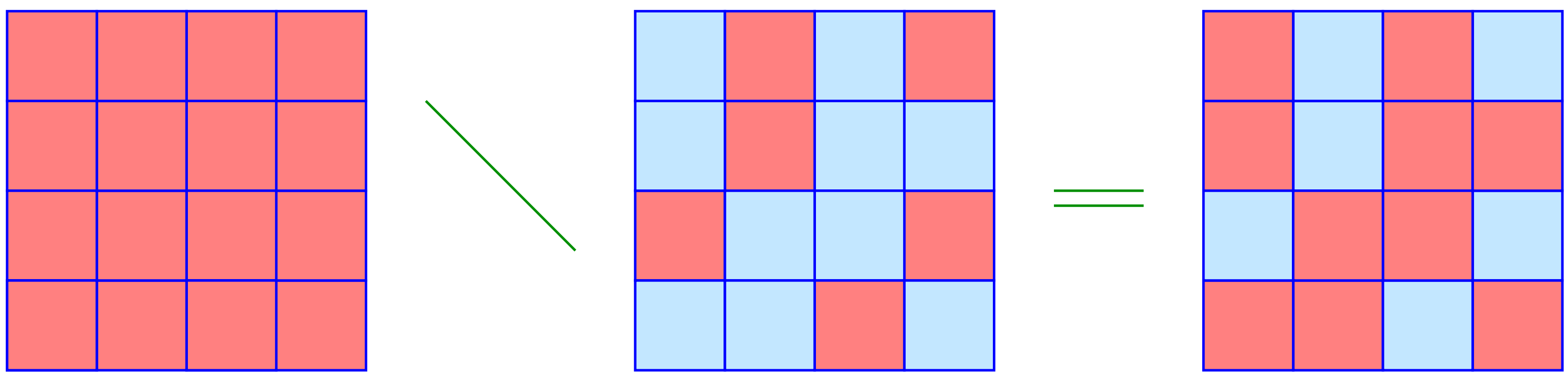
... in Datalog:

$$
\begin{aligned}
r(X_1, \ldots, X_k) \quad \texttt{:-} \quad & s_1(X_1, \ldots, X_k), \\
& s_2(X_1, \ldots, X_k).
\end{aligned}
$$

Beispiel:

```
hört_Brauer_und_Seidl (X) :- hat_Hörer ("Brauer", X),
                             hat_Hörer ("Seidl", X).
```

3. Relatives Komplement:



... in Datalog:

$$r(X_1, \ldots, X_k) \quad \texttt{:-} \quad s_1(X_1, \ldots, X_k),\ \texttt{not}(s_2(X_1, \ldots, X_k)).$$

d.h., $r(a_1, \ldots, a_k)$ folgt, wenn sich $s_1(a_1, \ldots, a_k)$, aber nicht $s_2(a_1, \ldots, a_k)$ beweisen lässt :-)

Beispiel:

```
hört_nicht_Seidl (X) :- student (_,X,_),
                        not (hat_Hörer ("Seidl", X)).
```

Achtung:

Die Anfrage:

```
p("Hallo!").
?- not (p(X)).
```

führt zu unendlich vielen Antworten :-(

$\Longrightarrow$ wir erlauben negierte Literale nur, wenn links davon alle Variablen in nicht-negierten Literalen vorkommen :-)

```
p("Hallo!").
q("Damn ...").
?- q(X), not (p(X)).
   X = "Damn ..."
```

Achtung (Forts.):

Negation ist nur sinnvoll, wenn s nicht rekursiv von r abhängt ...

```
p(X) :- not (p(X)).
```

... ist nicht leicht zu interpretieren.

$\Longrightarrow$ Wir erlauben $\texttt{not}(s(\ldots))$ nur in Regeln für Prädikate r, von denen s nicht abhängt

$\Longrightarrow$ stratifizierte Negation

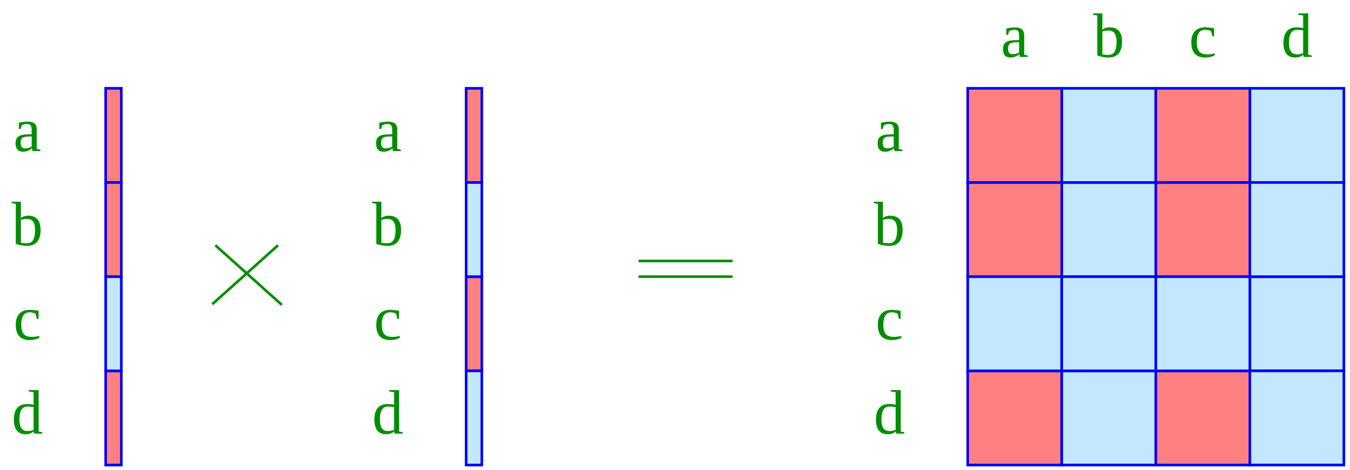
// Ohne rekursive Prädikate ist jede Negation stratifiziert :-)

4. Cartesisches Produkt:

$$S_1 \times S_2 = \{(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_m) \mid \quad (a_1, \ldots, a_k) \in S_1, \\ (b_1, \ldots, b_m) \in S_2 \}$$

... in Datalog:

$$r(X_1, \ldots, X_k, Y_1, \ldots, Y_m) \quad \texttt{:-} \quad s_1(X_1, \ldots, X_k), s_2(Y_1, \ldots, Y_m).$$


a b c d
a b c d
a b c d
a b c d

Beispiel:

```
dozent_student (X,Y) :- dozent (X,_,_),
                        student (_,Y,_).
```

Bemerkung:

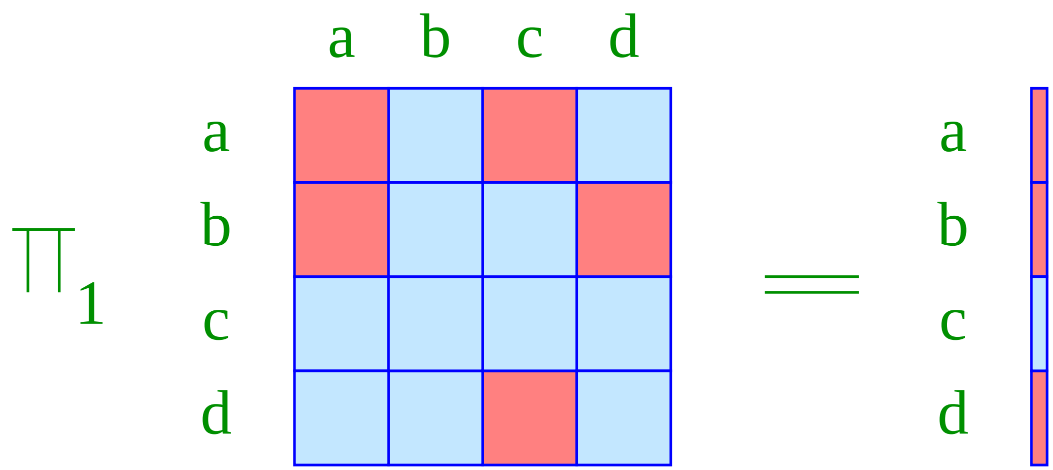
- Das Produkt unabhängiger Relationen ist sehr teuer :-(
- Man sollte es nach Möglichkeit vermeiden ;-)

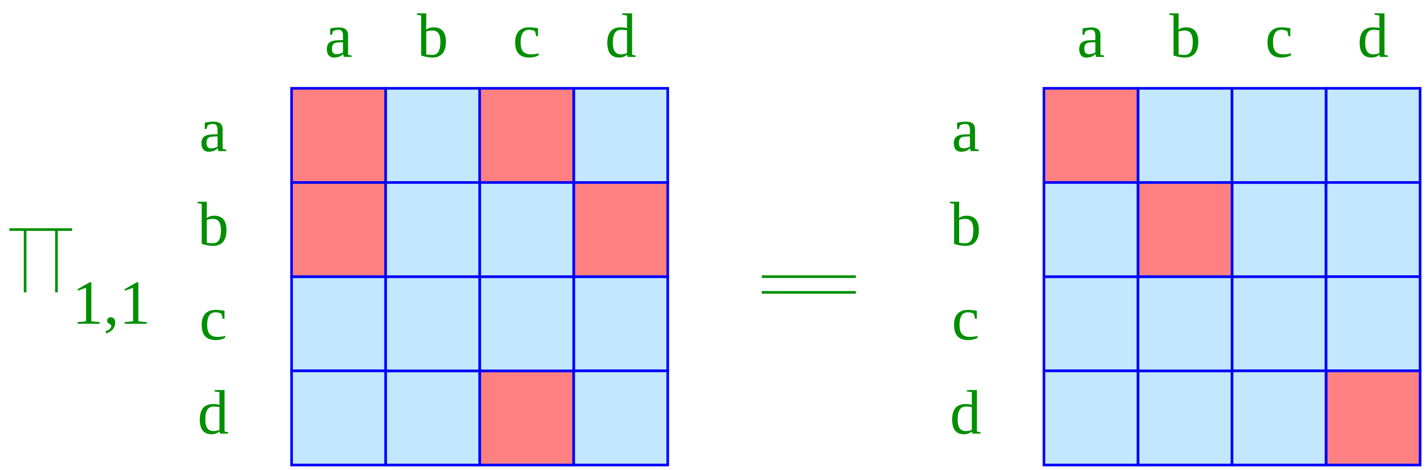
5. Projektion:

$$\pi_{i_1,\ldots,i_k}(S) = \{(a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}) \mid (a_1, \ldots, a_m) \in S\}$$

... in Datalog:

$$r(X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}) \quad \texttt{:-} \quad s(X_1, \ldots, X_m).$$


∏1
a b c d
a
b
c
d
=
a
b
c
d


$\prod_{1,1}$
a b c d
a
b
c
d
=
a b c d
a
b
c
d

6. Join:

$$S_1 \bowtie S_2 = \{(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_m) \mid \begin{array}{l} (a_1, \ldots, a_{k+1}) \in S_1, \\ (b_1, \ldots, b_m) \in S_2, \\ \quad a_{k+1} = b_1 \end{array} \}$$

... in Datalog:

$$r(X_1, \ldots, X_k, Y_1, \ldots, Y_m) \quad \texttt{:-} \quad s_1(X_1, \ldots, X_k, Y_1), s_2(Y_1, \ldots, Y_m).$$

Diskussion:

Joins können durch die anderen Operationen definiert werden ...

$$
\begin{aligned}
S_1 \bowtie S_2 \quad = \quad & \pi_{1,\ldots,k,k+2,\ldots,k+1+m} \, (\\
& S_1 \times S_2 \;\cap \\
& \mathcal{U}^k \times \pi_{1,1}(\mathcal{U}) \times \mathcal{U}^{m-1})
\end{aligned}
$$

// Zur Vereinfachung haben wir angenommen, $\mathcal{U}$ sei das
// gemeinsame Universum aller Komponenten :-)

Joins erlauben oft, teure cartesische Produkte zu vermeiden :-)

Die vorgestellten Operationen auf Relationen bilden die Grundlage der relationalen Algebra ...

Hintergrund:

Relationale Algebra ...

+ ist die Basis für Anfragesprachen relationaler Datenbanken

  $\Longrightarrow$ SQL

+ erlaubt Optimierung von Anfragen.

  Idee: Ersetze aufwändig zu berechnende Teilausdrücke der Anfrage durch billigere mit der gleichen Semantik !

Hintergrund:

Relationale Algebra ...

+ ist die Basis für Anfragesprachen relationaler Datenbanken

$\Longrightarrow$ SQL

+ erlaubt Optimierung von Anfragen.

  Idee: Ersetze aufwändig zu berechnende Teilausdrücke der Anfrage durch billigere mit der gleichen Semantik !

− ist ziemlich kryptisch.

− erlaubt keine rekursiven Definitionen.

Beispiel:

Das Datalog-Prädikat:

```
semester (X,Y) :- hört (Z,X), student (Z,_,Y)
```

... lässt sich in SQL so ausdrücken:

```
SELECT hört.Titel, Student.Semester
FROM   hört, Student
WHERE  hört.Matrikelnummer = Student.Matrikelnummer
```

Ausblick:

- Außer einer Anfragesprache muss eine praktische Datenbank-Sprache auch die Möglichkeit zum Einfügen / Modifizieren / Löschen anbieten :-)
- Die Implementierung einer Datenbank muss nicht nur Spielanwendungen wie unsere Beispiele bewältigen, sondern mit gigantischen Datenvolumen umgehen können !!!
- Sie muss viele parallel ablaufende Transaktionen zuverlässig abwickeln, ohne sie durcheinander zu bringen.
- Eine Datenbank sollte auch einen Stromausfall überstehen

$\Longrightarrow$ Datenbank-Vorlesung