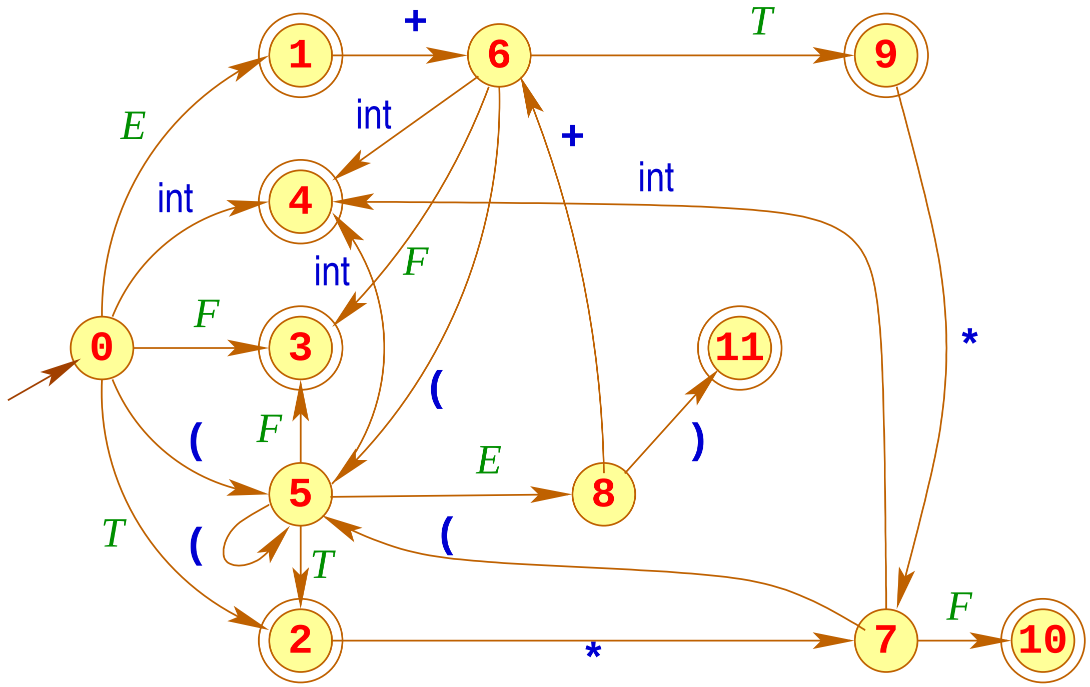
Den kanonischen $LR(0)$-Automaten $LR(G)$ erhalten wir aus $c(G)$, indem wir:

(1) nach jedem lesenden Übergang beliebig viele ϵ-Übergänge einschieben (unsere Konstruktion 1 zur Beseitigung von ϵ-Übergängen :-)

(2) die Teilmengenkonstruktion anwenden.

... im Beispiel:



Dazu konstruieren wir:

$$
\begin{array}{lll}
q_0 & = & \{[S' \to \bullet\, E], \\
 & & [E \to \bullet\, E + T], \\
 & & [E \to \bullet\, T], \\
 & & [T \to \bullet\, T * F]\} \\
 & & [T \to \bullet\, F], \\
 & & [F \to \bullet\, (\, E\,)\,], \\
 & & [F \to \bullet\, \mathsf{int}]\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
q_1 & = & \delta(q_0, E) & = & \{[S' \to E \bullet], \\
 & & & & [E \to E \bullet + T]\} \\
q_2 & = & \delta(q_0, T) & = & \{[E \to T \bullet], \\
 & & & & [T \to T \bullet * F]\} \\
q_3 & = & \delta(q_0, F) & = & \{[T \to F \bullet]\} \\
q_4 & = & \delta(q_0, \mathsf{int}) & = & \{[F \to \mathsf{int} \bullet]\}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
q_5 &= \delta(q_0, () = \{[F \longrightarrow (\bullet E)], \\
&\quad [E \longrightarrow \bullet E + T], \\
&\quad [E \longrightarrow \bullet T], \\
&\quad [T \longrightarrow \bullet T * F], \\
&\quad [T \longrightarrow \bullet F], \\
&\quad [F \longrightarrow \bullet (E)], \\
&\quad [F \longrightarrow \bullet \mathsf{int}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_6 &= \delta(q_1, +) = \{[E \longrightarrow E + \bullet T], \\
&\quad [T \longrightarrow \bullet T * F], \\
&\quad [T \longrightarrow \bullet F], \\
&\quad [F \longrightarrow \bullet (E)], \\
&\quad [F \longrightarrow \bullet \mathsf{int}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_7 &= \delta(q_2, *) = \{[T \longrightarrow T * \bullet F], \\
&\quad [F \longrightarrow \bullet (E)], \\
&\quad [F \longrightarrow \bullet \mathsf{int}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_8 &= \delta(q_5, E) = \{[F \longrightarrow (E \bullet)] \\
&\quad [E \longrightarrow E \bullet + T]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_9 &= \delta(q_6, T) = \{[E \longrightarrow E + T \bullet], \\
&\quad [T \longrightarrow T \bullet * F]\}
\end{aligned}
$$

$$
q_{10} = \delta(q_7, F) = \{[T \longrightarrow T * F \bullet]\}
$$

$$
q_{11} = \delta(q_8,)) = \{[F \longrightarrow (E) \bullet]\}
$$

Beachte:

Der kanonische $LR(0)$-Automat kann auch direkt aus der Grammatik konstruiert werden :-)

Man benötigt die Hilfsfunktion:

$$\delta^*_\epsilon(q) = q \cup \{[B \to \bullet\, \gamma] \mid \exists\, [A \to \alpha \bullet B'\, \beta'] \in q\,, \quad \beta \in (N \cup T)^* : \quad B' \to^* B\, \beta\}$$

Dann definiert man:

Zustände: Mengen von Items;

Anfangszustand: $\delta^*_\epsilon\, \{[S' \to \bullet\, S]\}$

Endzustände: $\{q \mid \exists\, A \to \alpha \in P : \; [A \to \alpha \bullet] \in q\}$

Übergänge: $\delta(q, X) = \delta^*_\epsilon\, \{[A \to \alpha\, X \bullet\, \beta] \mid [A \to \alpha \bullet X\, \beta] \in q\}$

Idee zu einem Parser:

- Der Parser verwaltet ein zuverlässiges Präfix $\alpha = X_1 \ldots X_m$ auf dem Keller und benutzt $LR(G)$, um Reduktionsstellen zu entdecken.
- Er kann mit einer Regel $A \to \gamma$ reduzieren, falls $[A \to \gamma \bullet]$ für α gültig ist :-)
- Damit der Automat nicht immer wieder neu über den Kellerinhalt laufen muss, kellern wir anstelle der X_i jeweils die Zustände !!!

Achtung:

Dieser Parser ist nur dann deterministisch, wenn jeder Endzustand des kanonischen $LR(0)$-Automaten keine Konflikte enthält ...

... im Beispiel:

$$
\begin{array}{lcl}
q_1 & = & \{[S' \to E\,\bullet], \\
 & & \;[E \to E\,\bullet\, + T]\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcl@{\qquad\qquad}lcl}
q_2 & = & \{[E \to T\,\bullet], & q_9 & = & \{[E \to E + T\,\bullet], \\
 & & \;[T \to T\,\bullet * F]\} & & & \;[T \to T\,\bullet * F]\} \\[1em]
q_3 & = & \{[T \to F\,\bullet]\} & q_{10} & = & \{[T \to T * F\,\bullet]\} \\[1em]
q_4 & = & \{[F \to \mathsf{int}\,\bullet]\} & q_{11} & = & \{[F \to (\,E\,)\,\bullet]\}
\end{array}
$$

Die Endzustände q_1, q_2, q_9 enthalten mehr als ein Item :-(

Aber wir haben ja auch noch nicht Vorausschau eingesetzt :-)

Die Konstruktion des $LR(0)$-Parsers:

Zustände: $Q \cup \{f\}$ (f neu :-)

Anfangszustand: q_0

Endzustand: f

Übergänge:

Shift:	$(p, a, p\,q)$	falls	$q = \delta(p, a) \neq \emptyset$
Reduce:	$(p\,q_1 \ldots q_m, \epsilon, p\,q)$	falls	$[A \to X_1 \ldots X_m \bullet] \in q_m$,
			$q = \delta(p, A)$
Finish:	$(q_0\,p, \epsilon, f)$	falls	$[S' \to S \bullet] \in p$

wobei $LR(G) = (Q, T, \delta, q_0, F)$.

Zur Korrektheit:

Man zeigt:

Die akzeptierenden Berechnungen des $LR(0)$-Parsers stehen in eins-zu-eins Beziehung zu denen des Shift-Reduce-Parsers $M_G^{(1)}$.

Wir folgern:

$\Longrightarrow$ Die akzeptierte Sprache ist genau $\mathcal{L}(G)$:-)

$\Longrightarrow$ Die Folge der Reduktionen einer akzeptierenden Berechnung für ein Wort $w \in T$ liefert eine reverse Rechts-Ableitung von G für w :-)

Leider ist der $LR(0)$-Parser i.a. nicht-deterministisch :-(

Wir identifizieren zwei Gründe:

Reduce-Reduce-Konflikt:

$$[A \to \gamma \bullet],\ [A' \to \gamma' \bullet] \in q \quad \text{mit} \quad A \neq A' \vee \gamma \neq \gamma'$$

Shift-Reduce-Konflikt:

$$[A \to \gamma \bullet],\ [A' \to \alpha \bullet a\, \beta] \in q \quad \text{mit} \quad a \in T$$

für einen Zustand $q \in Q$.

Solche Zustände nennen wir ungeeignet.

Idee:

Benutze k-Vorausschau, um Konflikte zu lösen.

Wir definieren:

Die reduzierte kontextfreie Grammatik G heißt $LR(k)$-Grammatik, falls für $\text{First}_k(w) = \text{First}_k(x)$ aus:

$$\left.\begin{array}{lllll} S & \rightarrow_R^* & \alpha\, A\, w & \rightarrow & \alpha\, \beta\, w \\ S & \rightarrow_R^* & \alpha'\, A'\, w' & \rightarrow & \alpha\, \beta\, x \end{array}\right\} \quad \text{folgt:} \quad \alpha = \alpha' \;\wedge\; A = A' \;\wedge\; w' = x$$

Beispiele:

(1) $S \rightarrow A \mid B \qquad A \rightarrow a\,A\,b \mid 0 \qquad B \rightarrow a\,B\,b\,b \mid 1$

... ist nicht $LL(k)$ für jedes k — aber $LR(0)$:

Sei $S \rightarrow_R^* \alpha\, X\, w \rightarrow \alpha\, \beta\, w$. Dann ist $\alpha\, \underline{\beta}$ von einer der Formen:

$$\underline{A}\,,\ \underline{B}\,,\ a^n\, \underline{a\,A\,b}\,,\ a^n\, \underline{a\,B\,b\,b}\,,\ a^n\, \underline{0}\,,\ a^n\, \underline{1} \qquad (n \geq 0)$$

Beispiele:

(1) $S \to A \mid B \qquad A \to a\,A\,b \mid 0 \qquad B \to a\,B\,b\,b \mid 1$

... ist nicht $LL(k)$ für jedes k — aber $LR(0)$:

Sei $S \to_R^* \alpha\,X\,w \to \alpha\,\beta\,w$. Dann ist $\alpha\,\underline{\beta}$ von einer der Formen:

$$\underline{A}\;,\;\underline{B}\;,\;a^n\,\underline{a\,A\,b}\;,\;a^n\,\underline{a\,B\,b\,b}\;,\;a^n\,\underline{0}\;,\;a^n\,\underline{1} \qquad (n \geq 0)$$

(2) $S \to a\,A\,c \qquad A \to A\,b\,b \mid b$

... ist ebenfalls $LR(0)$:

Sei $S \to_R^* \alpha\,X\,w \to \alpha\,\beta\,w$. Dann ist $\alpha\,\underline{\beta}$ von einer der Formen:

$$a\,\underline{b}\;,\;a\,\underline{A\,b\,b}\;,\;\underline{a\,A\,c}$$

(3) $S \to a\,A\,c \qquad A \to b\,b\,A \;|\; b$ ... ist nicht $LR(0)$, aber $LR(1)$:

Für $S \to_R^* \alpha\,X\,w \to \alpha\,\beta\,w$ mit $\{y\} = \mathsf{First}_k(w)$ ist $\alpha\,\underline{\beta}\,y$ von einer der Formen:

$$a\,b^{2n}\,\underline{b}\,c\;,\;\; a\,b^{2n}\,\underline{b\,b\,A}\,c\;,\;\; \underline{a\,A\,c}$$

(3) $S \rightarrow a\,A\,c \qquad A \rightarrow b\,b\,A \;|\; b$ ... ist nicht $LR(0)$, aber $LR(1)$:

Für $S \rightarrow_R^* \alpha\,X\,w \rightarrow \alpha\,\beta\,w$ mit $\{y\} = \text{First}_k(w)$ ist $\alpha\,\underline{\beta}\,y$ von einer der Formen:

$$a\,b^{2n}\,\underline{b}\,c\;,\;\; a\,b^{2n}\,\underline{b\,b\,A}\,c\;,\;\; \underline{a\,A\,c}$$

(4) $S \rightarrow a\,A\,c \qquad A \rightarrow b\,A\,b \;|\; b$ ... ist nicht $LR(k)$ für jedes $k \geq 0$:

Betrachte einfach die Rechtsableitungen:

$$S \rightarrow_R^* a\,b^n\,A\,b^n\,c \rightarrow a\,b^n\,\underline{b}\,b^n\,c$$

In der Tat gilt:

Satz:

Die reduzierte Grammatik G ist genau dann $LR(0)$ wenn der kanonische $LR(0)$-Automat $LR(G)$ keine ungeeigneten Zustände enthält.

In der Tat gilt:

Satz:

Die reduzierte Grammatik G ist genau dann $LR(0)$ wenn der kanonische $LR(0)$-Automat $LR(G)$ keine ungeeigneten Zustände enthält.

Beweis:

Enthalte G einen ungeeigneten Zustand q.

Fall 1: $[A \to \gamma\bullet], [A' \to \gamma'\bullet] \in q$ mit $A \to \gamma \neq A' \to \gamma'$

Dann gibt es ein zuverlässiges Präfix $\alpha\,\gamma = \alpha'\,\gamma'$ mit

$$S \to_R^* \alpha\, A\, w \to \alpha\,\gamma\, w \quad \wedge \quad S \to_R^* \alpha'\, A'\, x \to \alpha'\,\gamma'\, x$$

$$\Longrightarrow \quad G \text{ ist nicht } LR(0) \quad \text{:-)}$$

Fall 2: $[A \to \gamma \bullet]$, $[A' \to \beta \bullet a\, \beta'] \in q$

Dann gibt es ein zuverlässiges Präfix $\alpha\,\gamma = \alpha'\,\beta$ mit

$$S \to_R^* \alpha\, A\, w \to \alpha\,\gamma\, w \quad \wedge \quad S \to_R^* \alpha'\, A'\, x \to \alpha'\,\beta\, a\, \beta'\, x$$

Ist $\beta' \in T^*$, dann ist G nicht $LR(0)$:-)

Andernfalls $\beta' \to_R^* v_1\, X\, v_2 \to v_1\, u\, v_2$. Damit erhalten wir:

$$S \to_R^* \alpha'\,\beta\, a\, v_1\, X\, v_2\, x \to \alpha'\,\beta\, a\, v_1\, u\, v_2\, x$$

$$\Longrightarrow \qquad G \quad \text{ist nicht } LR(0) \quad \text{:-)}$$

Fall 2: $[A \to \gamma \bullet]\,,\ [A' \to \beta \bullet a\, \beta'] \ \in\ q$

Dann gibt es ein zuverlässiges Präfix $\alpha\,\gamma = \alpha'\,\beta$ mit

$$S \to_R^* \alpha\, A\, w \to \alpha\,\gamma\, w \quad \wedge \quad S \to_R^* \alpha'\, A'\, x \to \alpha'\,\beta\, a\, \beta'\, x$$

Ist $\beta' \in T^*$, dann ist G nicht $LR(0)$:-)

Andernfalls $\beta' \to_R^* v_1\, X\, v_2 \to v_1\, u\, v_2$. Damit erhalten wir:

$$S \to_R^* \alpha'\,\beta\, a\, v_1\, X\, v_2\, x \to \alpha'\,\beta\, a\, v_1\, u\, v_2\, x$$

$$\Longrightarrow \qquad G \quad \text{ist nicht } LR(0) \quad \text{:-)}$$

Enthalte $LR(G)$ keine ungeeigneten Zustände. Betrachte:

$$S \to_R^* \alpha\, A\, w \to \alpha\,\gamma\, w \qquad\qquad S \to_R^* \alpha'\, A'\, w' \to \alpha'\,\gamma'\, x$$

Sei $\delta(q_0, \alpha\,\gamma) = q$. Insbesondere ist $[A \to \gamma \bullet] \in q$.

Annahme: $(\alpha, A, w') \neq (\alpha', A', x)$.

Fall 1: $w' = x$. Dann muss q $[A' \to \gamma' \bullet]$ enthalten :-)

Fall 2: $w' \neq x$. Weitere Fallunterscheidung :-))

Sei $k > 0$.

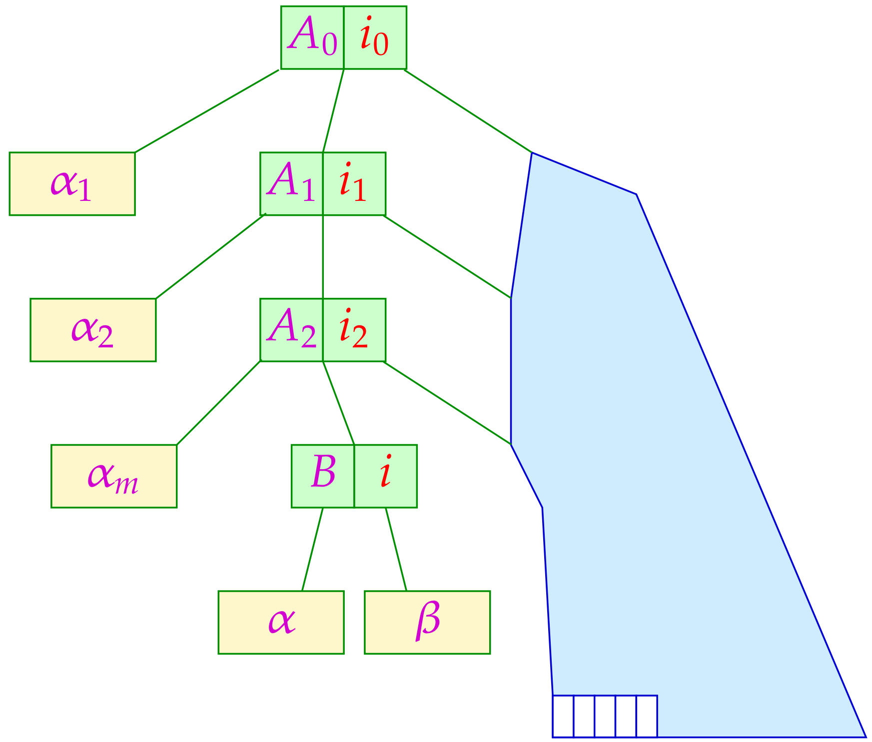
Idee: Wir statten Items mit k-Vorausschau aus :-)

Ein $LR(k)$-Item ist dann ein Paar:

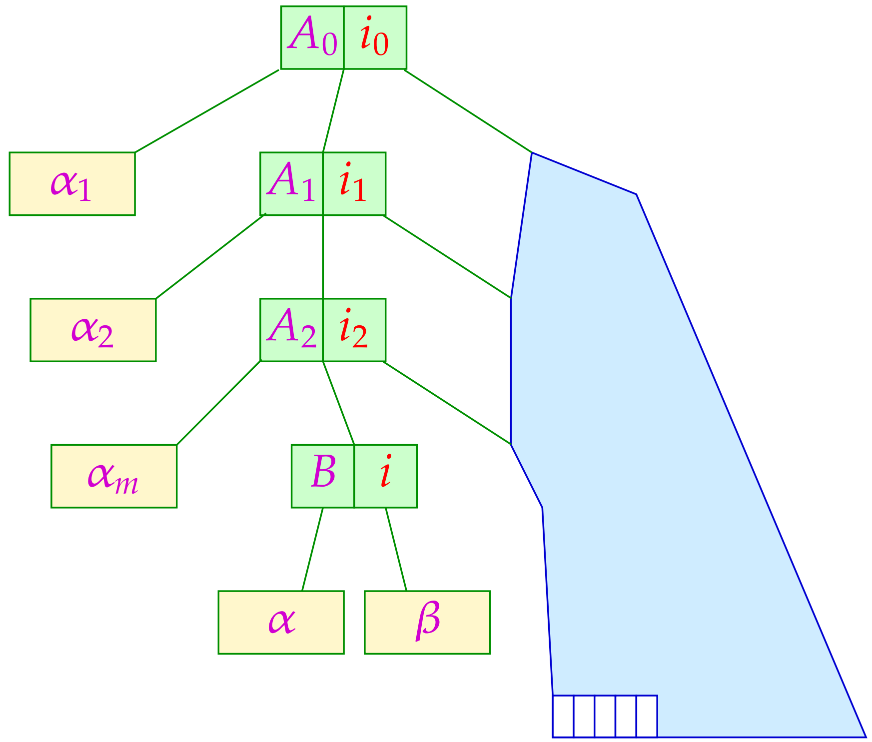
$$[B \to \alpha \bullet \beta,\, x]\,, \qquad x \in \mathsf{Follow}_k(B)$$

Dieses Item ist gültig für $\gamma\,\alpha$ falls:

$$S \to_R^* \gamma\, B\, w \qquad \text{mit} \qquad \{x\} = \mathsf{First}_k(w)$$



... wobei $\alpha_1 \ldots \alpha_m = \gamma$



... wobei $\alpha_1 \ldots \alpha_m = \gamma$

Die Menge der gültigen $LR(k)$-Items für zuverlässige Präfixe berechnen wir wieder mithilfe eines endlichen Automaten :-)

Der Automat $c(G, k)$:

Zustände: $LR(k)$-Items :-)

Anfangszustand: $[S' \to \bullet\, S,\ \epsilon]$

Endzustände: $\{[B \to \gamma\bullet,\ x] \mid B \to \gamma \in P, x \in \mathsf{Follow}_k(B)\}$

Übergänge:

(1) $([A \to \alpha \bullet X\,\beta,\ x], X, [A \to \alpha\, X \bullet \beta,\ x]), \quad X \in (N \cup T)$

(2) $([A \to \alpha \bullet B\,\beta,\ x], \epsilon, [B \to \bullet\,\gamma,\ x']),$

$$A \to \alpha\, B\, \beta\ , \quad B \to \gamma \in P, x' \in \mathsf{First}_k(\beta) \odot \{x\};$$

Der Automat $c(G,k)$:

Zustände: $LR(k)$-Items :-)

Anfangszustand: $[S' \to \bullet\, S,\ \epsilon]$

Endzustände: $\{[B \to \gamma\bullet,\ x] \mid B \to \gamma \,\in\, P, x \,\in\, \textsf{Follow}_k(B)\}$

Übergänge:

(1) $([A \to \alpha \bullet X\,\beta,\ x], X, [A \to \alpha\, X \bullet \beta,\ x]), \quad X \,\in\, (N \cup T)$

(2) $([A \to \alpha \bullet B\,\beta,\ x], \epsilon, [B \to \bullet\, \gamma,\ x']),$

$$A \to \alpha\, B\, \beta\ , \quad B \to \gamma \,\in\, P, x' \,\in\, \textsf{First}_k(\beta) \odot \{x\};$$

Dieser Automat arbeitet wie $c(G)$ — verwaltet aber zusätzlich ein k-Präfix aus dem $\textsf{Follow}_k$ der linken Seiten.

Den kanonischen $LR(k)$-Automaten $LR(G, k)$ erhält man aus $c(G, k)$, indem man nach jedem Übergang beliebig viele ϵ liest und dann den Automaten deterministisch macht ...

Den kanonischen $LR(k)$-Automaten $LR(G,k)$ erhält man aus $c(G,k)$, indem man nach jedem Übergang beliebig viele ϵ liest und dann den Automaten deterministisch macht ...

Man kann ihn aber auch direkt aus der Grammatik konstruieren werden :-)

Wie bei $LR(0)$ benötigt man eine Hilfsfunktion:

$$\begin{aligned}\delta_\epsilon^*(q) = q \cup \{[B \to \bullet\, \gamma,\, x] \mid \quad & \exists\, [A \to \alpha \bullet B'\, \beta',\, x'] \in q\,, \\ & \beta \in (N \cup T)^* : \quad B' \to^* B\, \beta\} \wedge \\ & x \in \mathsf{First}_k(\beta\, \beta') \odot \{x'\}\}\end{aligned}$$

Den kanonischen $LR(k)$-Automaten $LR(G,k)$ erhält man aus $c(G,k)$, indem man nach jedem Übergang beliebig viele ϵ liest und dann den Automaten deterministisch macht ...

Man kann ihn aber auch direkt aus der Grammatik konstruieren werden :-)

Wie bei $LR(0)$ benötigt man eine Hilfsfunktion:

$$\begin{aligned}\delta^*_\epsilon(q) = q \cup \{[B \to \bullet\, \gamma,\, x] \mid\ & \exists\, [A \to \alpha \bullet B'\, \beta',\, x'] \in q\,,\\ & \beta \in (N \cup T)^* : \quad B' \to^* B\, \beta\} \wedge \\ & x \in \mathsf{First}_k(\beta\, \beta') \odot \{x'\}\}\end{aligned}$$

Dann definiert man:

Zustände: Mengen von $LR(k)$-Items;

Anfangszustand: $\delta^*_\epsilon\, \{[S' \to \bullet\, S,\, \epsilon]\}$

Endzustände: $\{q \mid \exists\, A \to \alpha \in P : \ [A \to \alpha \bullet,\, x] \in q\}$

Übergänge: $\delta(q, X) = \delta^*_\epsilon\, \{[A \to \alpha\, X \bullet\, \beta,\, x] \mid [A \to \alpha \bullet X\, \beta,\, x] \in q\}$

Im Beispiel:

$$q_0 = \{[S' \to \bullet\, E],\ [E \to \bullet\, E + T],\ [E \to \bullet\, T],\ [T \to \bullet\, T * F],\ [T \to \bullet\, F],\ [F \to \bullet\, (\, E\,)],\ [F \to \bullet\, \mathsf{int}]\}$$

$$q_1 = \delta(q_0, E) = \{[S' \to E\,\bullet],\ [E \to E\,\bullet + T]\}$$

$$q_2 = \delta(q_0, T) = \{[E \to T\,\bullet],\ [T \to T\,\bullet * F]\}$$

$$q_3 = \delta(q_0, F) = \{[T \to F\,\bullet]\}$$

$$q_4 = \delta(q_0, \mathsf{int})\ \ \{[F \to \mathsf{int}\,\bullet]\}$$

$$q_5 = \delta(q_0, (\,) = \{[F \to (\,\bullet\, E\,)],\ [E \to \bullet\, E + T],\ [E \to \bullet\, T],\ [T \to \bullet\, T * F],\ [T \to \bullet\, F],\ [F \to \bullet\, (\, E\,)],\ [F \to \bullet\, \mathsf{int}]\}$$

Im Beispiel:

$$
\begin{array}{lllll}
q_0 & = & & \{[S' \to \bullet\, E,\ \{\epsilon\}], \\
 & & & [E \to \bullet\, E + T,\ \{\epsilon, +\}], \\
 & & & [E \to \bullet\, T,\ \{\epsilon, +\}], \\
 & & & [T \to \bullet\, T * F,\ \{\epsilon, +, *\}], \\
 & & & [T \to \bullet\, F,\ \{\epsilon, +, *\}], \\
 & & & [F \to \bullet\, (\, E\,),\ \{\epsilon, +, *\}], \\
 & & & [F \to \bullet\, \mathsf{int},\ \{\epsilon, +, *\}]\} \\
 & & & \\
q_1 & = & \delta(q_0, E) & = & \{[S' \to E\, \bullet\ ], \\
 & & & & [E \to E\, \bullet + T\ ]\} \\
 & & & \\
q_2 & = & \delta(q_0, T) & = & \{[E \to T\, \bullet\ ], \\
 & & & & [T \to T\, \bullet * F\ ]\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
q_3 & = & \delta(q_0, F) & = & \{[T \to F\, \bullet\ ]\} \\
 & & & \\
q_4 & = & \delta(q_0, \mathsf{int}) & & \{[F \to \mathsf{int}\, \bullet\ ]\} \\
 & & & \\
q_5 & = & \delta(q_0, (\,) & = & \{[F \to (\, \bullet\, E\,)\ ], \\
 & & & & [E \to \bullet\, E + T\ ], \\
 & & & & [E \to \bullet\, T\ ], \\
 & & & & [T \to \bullet\, T * F\ ], \\
 & & & & [T \to \bullet\, F\ ], \\
 & & & & [F \to \bullet\, (\, E\,)\ ], \\
 & & & & [F \to \bullet\, \mathsf{int}\ ]\}
\end{array}
$$

Im Beispiel:

$$
\begin{array}{lllll}
q_0 & = & & & \{[S' \to \bullet\, E,\ \{\epsilon\}], \\
 & & & & \ [E \to \bullet\, E + T,\ \{\epsilon, +\}], \\
 & & & & \ [E \to \bullet\, T,\ \{\epsilon, +\}], \\
 & & & & \ [T \to \bullet\, T * F,\ \{\epsilon, +, *\}], \\
 & & & & \ [T \to \bullet\, F,\ \{\epsilon, +, *\}], \\
 & & & & \ [F \to \bullet\, (\, E\,)\,,\ \{\epsilon, +, *\}], \\
 & & & & \ [F \to \bullet\, \mathsf{int}, \{\epsilon, +, *\}]\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
q_1 & = & \delta(q_0, E) & = & \{[S' \to E\bullet,\ \{\epsilon\}], \\
 & & & & \ [E \to E \bullet + T,\ \{\epsilon, +\}]\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
q_2 & = & \delta(q_0, T) & = & \{[E \to T\bullet,\ \{\epsilon, +\}], \\
 & & & & \ [T \to T \bullet * F,\ \{\epsilon, +, *\}]\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
q_3 & = & \delta(q_0, F) & = & \{[T \to F\bullet,\ \{\epsilon, +, *\}]\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
q_4 & = & \delta(q_0, \mathsf{int}) & & \{[F \to \mathsf{int}\,\bullet,\ \{\epsilon, +, *\}]\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
q_5 & = & \delta(q_0,\, (\,) & = & \{[F \to (\ \bullet\, E\,) \quad], \\
 & & & & \ [E \to \bullet\, E + T \quad], \\
 & & & & \ [E \to \bullet\, T \quad], \\
 & & & & \ [T \to \bullet\, T * F \quad], \\
 & & & & \ [T \to \bullet\, F \quad], \\
 & & & & \ [F \to \bullet\, (\, E\,) \quad], \\
 & & & & \ [F \to \bullet\, \mathsf{int} \quad]\}
\end{array}
$$

Im Beispiel:

$$
\begin{array}{lllll}
q_0 & = & & & \{[S' \to \bullet\, E,\ \{\epsilon\}], \\
& & & & \ [E \to \bullet\, E + T,\ \{\epsilon, +\}], \\
& & & & \ [E \to \bullet\, T,\ \{\epsilon, +\}], \\
& & & & \ [T \to \bullet\, T * F,\ \{\epsilon, +, *\}], \\
& & & & \ [T \to \bullet\, F,\ \{\epsilon, +, *\}], \\
& & & & \ [F \to \bullet\, (\ E\ ),\ \{\epsilon, +, *\}], \\
& & & & \ [F \to \bullet\, \mathsf{int},\ \{\epsilon, +, *\}]\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
q_1 & = & \delta(q_0, E) & = & \{[S' \to E \bullet,\ \{\epsilon\}], \\
& & & & \ [E \to E \bullet + T,\ \{\epsilon, +\}]\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
q_2 & = & \delta(q_0, T) & = & \{[E \to T \bullet,\ \{\epsilon, +\}], \\
& & & & \ [T \to T \bullet * F,\ \{\epsilon, +, *\}]\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
q_3 & = & \delta(q_0, F) & = & \{[T \to F \bullet,\ \{\epsilon, +, *\}]\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
q_4 & = & \delta(q_0, \mathsf{int}) & & \{[F \to \mathsf{int} \bullet,\ \{\epsilon, +, *\}]\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
q_5 & = & \delta(q_0, (\ ) & = & \{[F \to (\ \bullet\, E\ ),\ \{\epsilon, +, *\}], \\
& & & & \ [E \to \bullet\, E + T,\ \{\ ),+\}], \\
& & & & \ [E \to \bullet\, T,\ \{\ ),+\}], \\
& & & & \ [T \to \bullet\, T * F,\ \{\ ),+,*\}], \\
& & & & \ [T \to \bullet\, F,\ \{\ ),+,*\}], \\
& & & & \ [F \to \bullet\, (\ E\ ),\ \{\ ),+,*\}], \\
& & & & \ [F \to \bullet\, \mathsf{int},\ \{\ ),+,*\}]\}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
q_5' &= \delta(q_5, () &&= \{[F \rightarrow (\bullet E) &&],\\
&&&\quad [E \rightarrow \bullet E + T &&],\\
&&&\quad [E \rightarrow \bullet T &&],\\
&&&\quad [T \rightarrow \bullet T * F &&],\\
&&&\quad [T \rightarrow \bullet F &&],\\
&&&\quad [F \rightarrow \bullet (E) &&],\\
&&&\quad [F \rightarrow \bullet \mathsf{int} &&]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_6 &= \delta(q_1, +) &&= \{[E \rightarrow E + \bullet T &&],\\
&&&\quad [T \rightarrow \bullet T * F &&],\\
&&&\quad [T \rightarrow \bullet F &&],\\
&&&\quad [F \rightarrow \bullet (E) &&],\\
&&&\quad [F \rightarrow \bullet \mathsf{int} &&]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_7 &= \delta(q_2, *) &&= \{[T \rightarrow T * \bullet F &&],\\
&&&\quad [F \rightarrow \bullet (E) &&],\\
&&&\quad [F \rightarrow \bullet \mathsf{int} &&]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_8 &= \delta(q_5, E) &&= \{[F \rightarrow (E \bullet) &&]\}\\
&&&\quad [E \rightarrow E \bullet + T &&]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_9 &= \delta(q_6, T) &&= \{[E \rightarrow E + T \bullet &&],\\
&&&\quad [T \rightarrow T \bullet * F &&]\}
\end{aligned}
$$

$$
q_{10} = \delta(q_7, F) = \{[T \rightarrow T * F \bullet]\}
$$

$$
q_{11} = \delta(q_8,)) = \{[F \rightarrow (E) \bullet]\}
$$

$$
\begin{aligned}
q_5' \;=\; \delta(q_5, (\,) \;=\; \{&[F \to (\bullet E\,),\ \{\,)\,,+,*\}],\\
&[E \to \bullet E + T,\ \{\,)\,,+\}],\\
&[E \to \bullet T,\ \{\,)\,,+\}],\\
&[T \to \bullet T * F,\ \{\,)\,,+,*\}],\\
&[T \to \bullet F,\ \{\,)\,,+,*\}],\\
&[F \to \bullet (\,E\,),\ \{\,)\,,+,*\}],\\
&[F \to \bullet \mathsf{int},\ \{\,)\,,+,*\}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_6 \;=\; \delta(q_1, +) \;=\; \{&[E \to E + \bullet T],\\
&[T \to \bullet T * F],\\
&[T \to \bullet F],\\
&[F \to \bullet (\,E\,)],\\
&[F \to \bullet \mathsf{int}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_7 \;=\; \delta(q_2, *) \;=\; \{&[T \to T * \bullet F],\\
&[F \to \bullet (\,E\,)],\\
&[F \to \bullet \mathsf{int}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_8 \;=\; \delta(q_5, E) \;=\; \{&[F \to (\,E \bullet)]\}\\
&[E \to E \bullet + T]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_9 \;=\; \delta(q_6, T) \;=\; \{&[E \to E + T \bullet],\\
&[T \to T \bullet * F]\}
\end{aligned}
$$

$$
q_{10} \;=\; \delta(q_7, F) \;=\; \{[T \to T * F \bullet]\}
$$

$$
q_{11} \;=\; \delta(q_8,)\,) \;=\; \{[F \to (\,E\,) \bullet]\}
$$

$$
\begin{aligned}
q'_5 \;=\; \delta(q_5, (\,) \;=\; \{ & [F \rightarrow (\; \bullet E\,),\ \{\,)\,,+,*\}], \\
& [E \rightarrow \bullet E + T,\ \{\,)\,,+\}], \\
& [E \rightarrow \bullet T,\ \{\,)\,,+\}], \\
& [T \rightarrow \bullet T * F,\ \{\,)\,,+,*\}], \\
& [T \rightarrow \bullet F,\ \{\,)\,,+,*\}], \\
& [F \rightarrow \bullet (\,E\,),\ \{\,)\,,+,*\}], \\
& [F \rightarrow \bullet \mathsf{int},\ \{\,)\,,+,*\}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_6 \;=\; \delta(q_1, +) \;=\; \{ & [E \rightarrow E + \bullet T,\ \{\epsilon,+\}], \\
& [T \rightarrow \bullet T * F,\ \{\epsilon,+,*\}], \\
& [T \rightarrow \bullet F,\ \{\epsilon,+,*\}], \\
& [F \rightarrow \bullet (\,E\,),\ \{\epsilon,+,*\}], \\
& [F \rightarrow \bullet \mathsf{int},\ \{\epsilon,+,*\}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_7 \;=\; \delta(q_2, *) \;=\; \{ & [T \rightarrow T * \bullet F \quad], \\
& [F \rightarrow \bullet (\,E\,) \quad], \\
& [F \rightarrow \bullet \mathsf{int} \quad]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_8 \;=\; \delta(q_5, E) \;=\; \{ & [F \rightarrow (\,E \bullet) \quad]\} \\
& [E \rightarrow E \bullet + T \quad]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_9 \;=\; \delta(q_6, T) \;=\; \{ & [E \rightarrow E + T \bullet \quad], \\
& [T \rightarrow T \bullet * F \quad]\}
\end{aligned}
$$

$$
q_{10} \;=\; \delta(q_7, F) \;=\; \{[T \rightarrow T * F \bullet \quad]\}
$$

$$
q_{11} \;=\; \delta(q_8, \,)\,) \;=\; \{[F \rightarrow (\,E\,) \bullet \quad]\}
$$

$$
\begin{aligned}
q_5' \;=\; \delta(q_5, (\,) \;=\; \{ & [F \rightarrow (\bullet E\,),\ \{\,)\,,+,*\}],\\
& [E \rightarrow \bullet E + T,\ \{\,)\,,+\}],\\
& [E \rightarrow \bullet T,\ \{\,)\,,+\}],\\
& [T \rightarrow \bullet T * F,\ \{\,)\,,+,*\}],\\
& [T \rightarrow \bullet F,\ \{\,)\,,+,*\}],\\
& [F \rightarrow \bullet (\,E\,),\ \{\,)\,,+,*\}],\\
& [F \rightarrow \bullet \mathsf{int},\ \{\,)\,,+,*\}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_6 \;=\; \delta(q_1, +) \;=\; \{ & [E \rightarrow E + \bullet T,\ \{\epsilon,+\}],\\
& [T \rightarrow \bullet T * F,\ \{\epsilon,+,*\}],\\
& [T \rightarrow \bullet F,\ \{\epsilon,+,*\}],\\
& [F \rightarrow \bullet (\,E\,),\ \{\epsilon,+,*\}],\\
& [F \rightarrow \bullet \mathsf{int},\ \{\epsilon,+,*\}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_7 \;=\; \delta(q_2, *) \;=\; \{ & [T \rightarrow T * \bullet F,\ \{\epsilon,+,*\}],\\
& [F \rightarrow \bullet (\,E\,),\ \{\epsilon,+,*\}],\\
& [F \rightarrow \bullet \mathsf{int},\ \{\epsilon,+,*\}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_8 \;=\; \delta(q_5, E) \;=\; \{ & [F \rightarrow (\,E \bullet\,),\{\epsilon,+,*\}]\}\\
& [E \rightarrow E \bullet + T,\ \{\,)\,,+\}]\}
\end{aligned}
$$

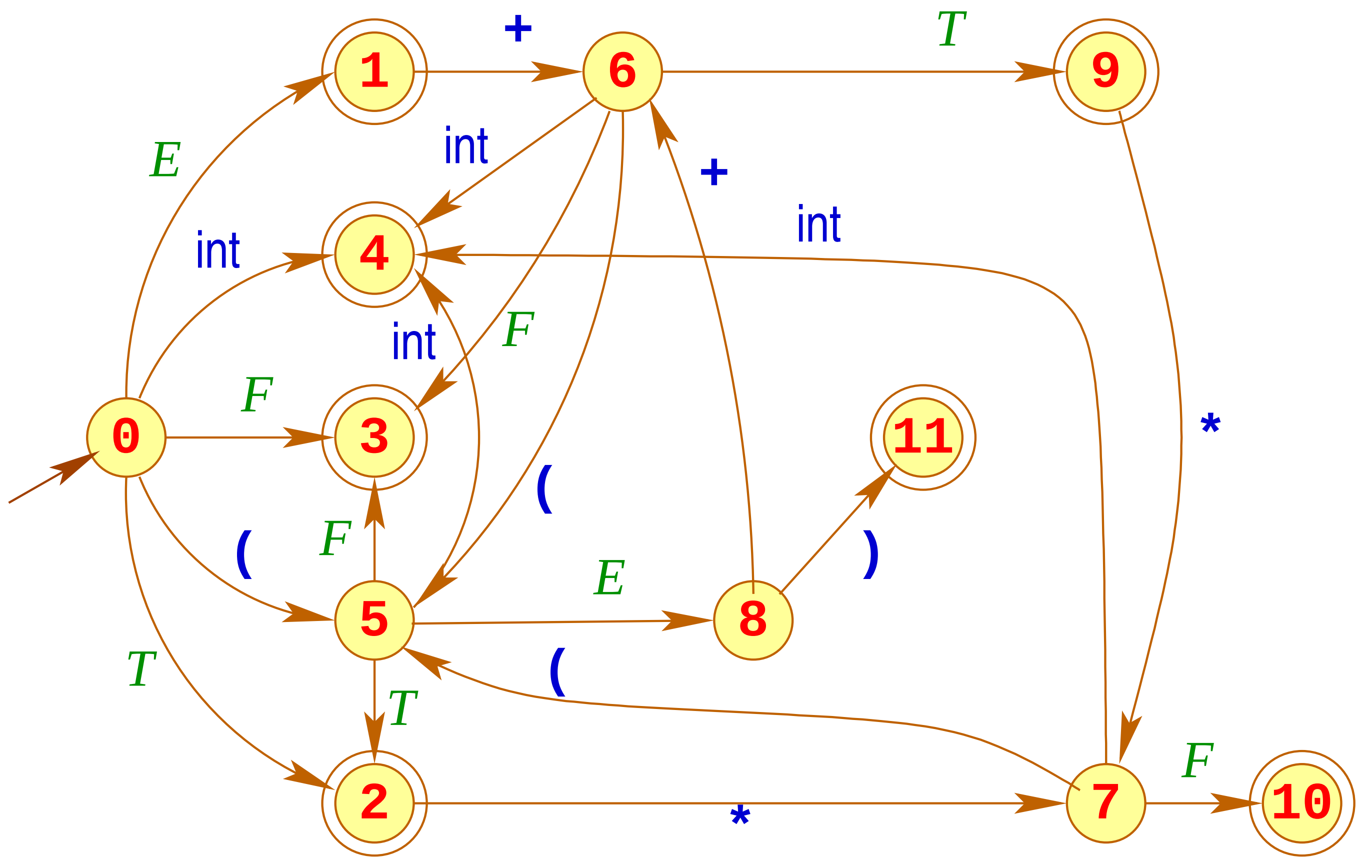
$$
\begin{aligned}
q_9 \;=\; \delta(q_6, T) \;=\; \{ & [E \rightarrow E + T\bullet,\ \{\epsilon,+\}],\\
& [T \rightarrow T \bullet * F,\ \{\epsilon,+,*\}]\}
\end{aligned}
$$

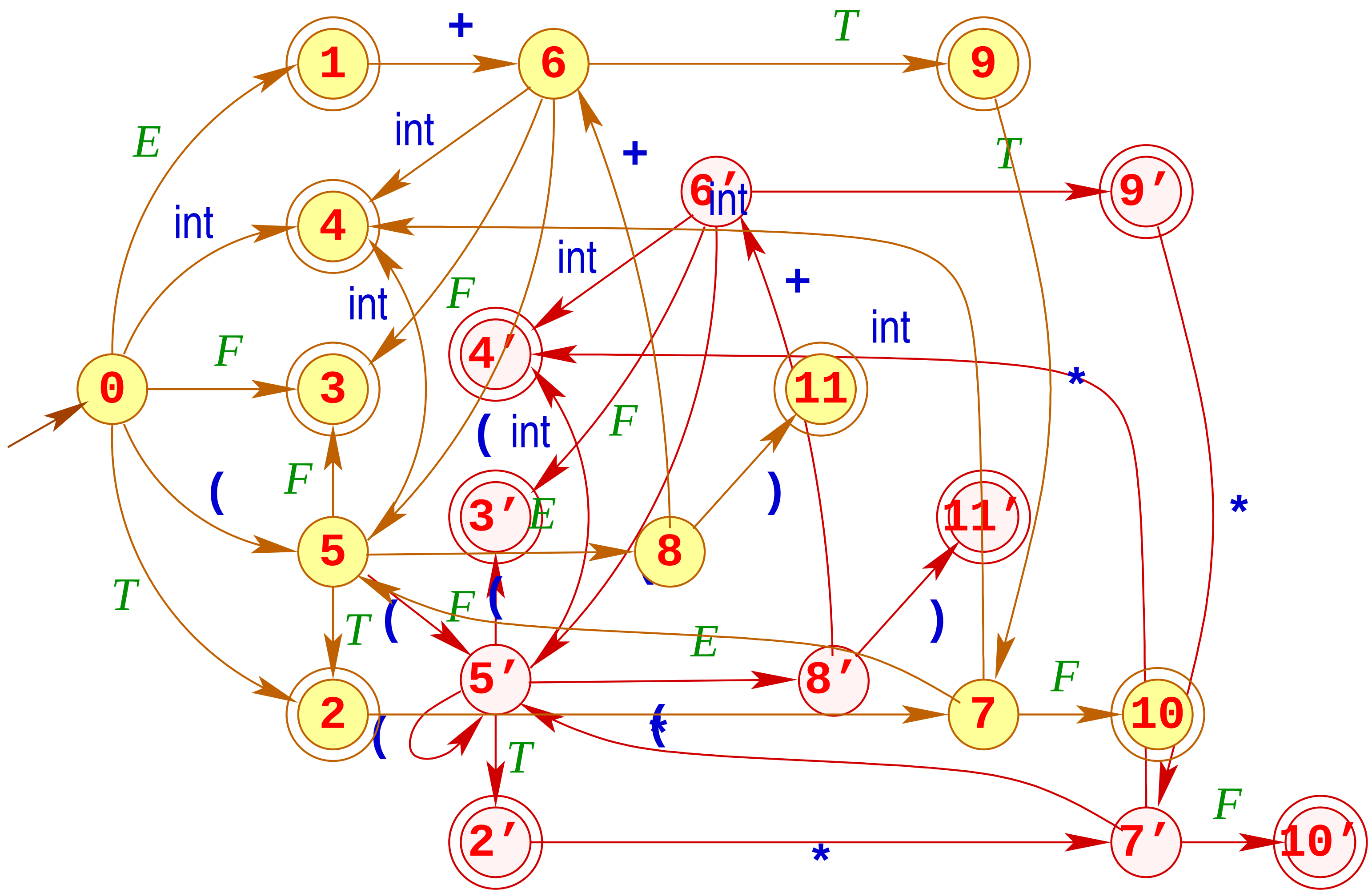
$$
q_{10} \;=\; \delta(q_7, F) \;=\; \{[T \rightarrow T * F\bullet,\ \{\epsilon,+,*\}]\}
$$

$$
q_{11} \;=\; \delta(q_8, \,)\,) \;=\; \{[F \rightarrow (\,E\,)\bullet,\ \{\epsilon,+,*\}]\}
$$

$$
\begin{aligned}
q'_2 &= \delta(q'_5, T) = \{[E \rightarrow T\bullet, \{\,)\,, +\}], \\
&\qquad [T \rightarrow T \bullet * F, \{\,)\,, +, *\}]\} \\
q'_3 &= \delta(q'_5, F) = \{[F \rightarrow F\bullet, \{\,)\,, +, *\}]\} \\
q'_4 &= \delta(q'_5, \mathsf{int}) = \{[F \rightarrow \mathsf{int}\bullet, \{\,)\,, +, *\}]\} \\
q'_6 &= \delta(q_8, +) = \{[E \rightarrow E + \bullet T, \{\,)\,, +\}], \\
&\qquad [T \rightarrow \bullet T * F, \{\,)\,, +, *\}], \\
&\qquad [T \rightarrow \bullet F, \{\,)\,, +, *\}], \\
&\qquad [F \rightarrow \bullet (E), \{\,)\,, +, *\}], \\
&\qquad [F \rightarrow \bullet\, \mathsf{int}, \{\,)\,, +, *\}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q'_7 &= \delta(q_9, *) = \{[T \rightarrow T * \bullet F, \{\,)\,, +, *\}], \\
&\qquad [F \rightarrow \bullet (E), \{\,)\,, +, *\}], \\
&\qquad [F \rightarrow \bullet\, \mathsf{int}, \{\,)\,, +, *\}]\} \\
q'_8 &= \delta(q'_5, E) = \{[F \rightarrow (E \bullet), \{\,)\,, +, *\}]\} \\
&\qquad [E \rightarrow E \bullet + T, \{\,)\,, +\}]\} \\
q'_9 &= \delta(q'_6, T) = \{[E \rightarrow E + T\bullet, \{\,)\,, +\}], \\
&\qquad [T \rightarrow T \bullet * F, \{\,)\,, +, *\}] \\
q'_{10} &= \delta(q'_7, F) = \{[T \rightarrow T * F\bullet, \{\,)\,, +, *\}]\} \\
q'_{11} &= \delta(q'_8, \,)\,) = \{[F \rightarrow (E)\bullet, \{\,)\,, +, *\}]\}
\end{aligned}
$$


0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
E
T
F
int
(
+
*
)



Diskussion:

- Im Beispiel hat sich die Anzahl der Zustände fast verdoppelt :-)
  Es kann noch schlimmer kommen :-(

- Die Konflikte in den Zuständen q_1, q_2, q_9 sind nun aufgelöst ...
  Z.B. haben wir für:

$$\begin{aligned} q_9 = \; & \{[E \to E + T \bullet,\ \{\epsilon, +\}], \\ & \;[T \to T \bullet * F,\ \{\epsilon, +, *\}]\} \end{aligned}$$

mit:

$$\{\epsilon, +\} \cap (\mathsf{First}_1(* F) \odot \{\epsilon, +, *\}) \;=\; \{\epsilon, +\} \cap \{*\} = \emptyset$$

Allgemein: Wir identifizieren zwei Konflikte:

Reduce-Reduce-Konflikt:

$$[A \to \gamma \bullet, x], \quad [A' \to \gamma' \bullet, x] \quad \in \quad q \quad \text{mit} \quad A \neq A' \vee \gamma \neq \gamma'$$

Shift-Reduce-Konflikt:

$$[A \to \gamma \bullet, x], \quad [A' \to \alpha \bullet a\, \beta, y] \quad \in \quad q \quad \text{mit} \quad a \in T \quad \text{und}$$

$$x \in \{a\} \odot \mathsf{First}_k(\beta) \odot \{y\}\,.$$

für einen Zustand $q \in Q$.

Solche Zustände nennen wir jetzt $LR(k)$-ungeeignet :-)

Satz

Eine reduzierte kontextfreie Grammatik G ist genau dann $LR(k)$ wenn der kanonische $LR(k)$-Automat $LR(G,k)$ keine $LR(k)$-ungeeigneten Zustände besitzt.

Satz

Eine reduzierte kontextfreie Grammatik G ist genau dann $LR(k)$ wenn der kanonische $LR(k)$-Automat $LR(G, k)$ keine $LR(k)$-ungeeigneten Zustände besitzt.

Diskussion:

- Unser Beispiel ist offenbar $LR(1)$:-)
- Im Allgemeinen hat der kanonische $LR(k)$-Automat sehr viel mehr Zustände als $LR(G) = LR(G, 0)$:-(
- Man betrachtet darum i.a. Teilklassen von $LR(k)$-Grammatiken, bei denen man nur $LR(G)$ benutzt ...