# Implementierung:

- Wir verwalten eine Partition der Knoten;
- Wann immer zwei Knoten äquivalent sein sollen, vereinigen wir ihre Äquivalenzklassen und fahren mit den Söhnen entsprechend fort.
- Notwendige Operationen auf der Datenstruktur $\pi$ für eine Partition:

  $\rightarrow$ init (Nodes) liefert eine Repräsentation für die Partition $\pi_0 = \{\{v\} \mid v \in \text{Nodes}\}$

  $\rightarrow$ find $(\pi, u)$ liefert einen Repräsentanten der Äquivalenzklasse — der wann immer möglich keine Variable sein soll :-)

  $\rightarrow$ union $(\pi, u_1, u_2)$ vereinigt die Äquivalenzklassen von $u_1, u_2$ :-)

- Der Algorithmus startet mit einer Liste

$$W = [(u_1, v_1), \ldots, (u_m, v_m)]$$

der Paare von Wurzelknoten der zu unifizierenden Terme ...

```
π = init(Nodes);
while (W ≠ ∅) {
        (u, v) = Extract (W);
        u = find (π, u);  v = find (π, v);
        if (u ≢ v) {
                π = union (π, u, v);
                if (u ∉ Vars ∧ v ∉ Vars)
                        if (label(u) ≠ label(v)) return Fail
                        else {
                                (u_1, ..., u_k) = Successors(u);
                                (v_1, ..., v_k) = Successors(v);
                                W = (u_1, v_1) :: ... :: (u_k, v_k) :: W;
                        }
        }
}
```

# Komplexität:

$\mathcal{O}(\#\,Knoten)$ Aufrufe von union

$\mathcal{O}(\#\,Kanten + \#\,Gleichungen)$ Aufrufe von find

$\Longrightarrow$ Wir benötigen effiziente Union-Find-Datenstruktur :-)

# Komplexität:

$\mathcal{O}(\#\,Knoten)$ Aufrufe von union

$\mathcal{O}(\#\,Kanten + \#\,Gleichungen)$ Aufrufe von find

$\Longrightarrow$ Wir benötigen effiziente Union-Find-Datenstruktur :-)

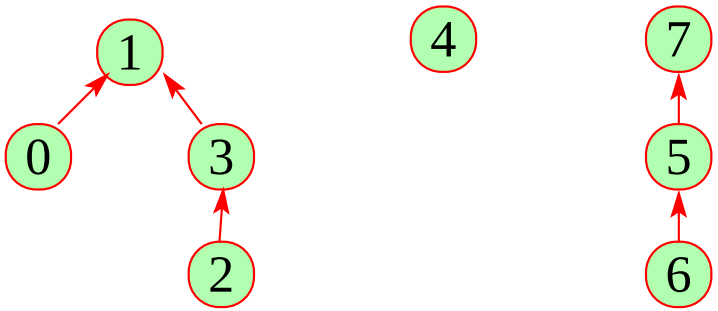
# Idee:

Repräsentiere Partition von $U$ als gerichteten Wald:

- Zu $u \in U$ verwalten wir einen Vater-Verweis $F[u]$ .
- Elemente $u$ mit $F[u] = u$ sind Wurzeln.

Einzelne Bäume sind Äquivalenzklassen.

Ihre Wurzeln sind die Repräsentanten ...

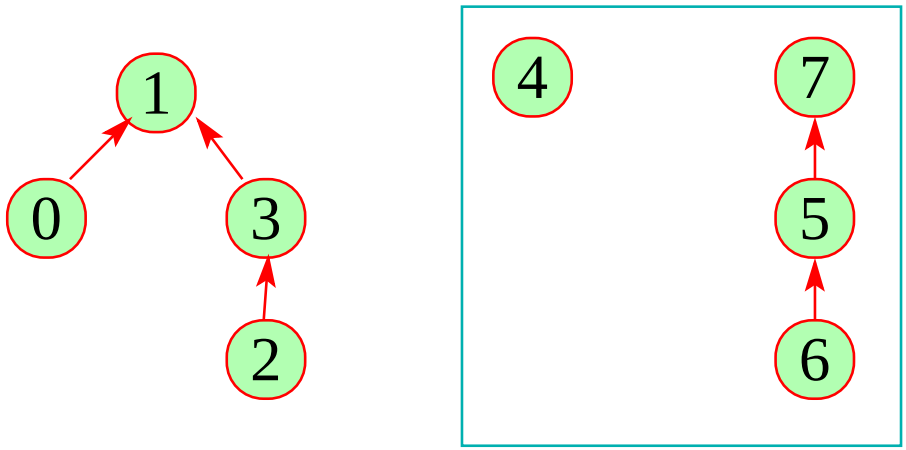



| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

| 1 | 1 | 3 | 1 | 4 | 7 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

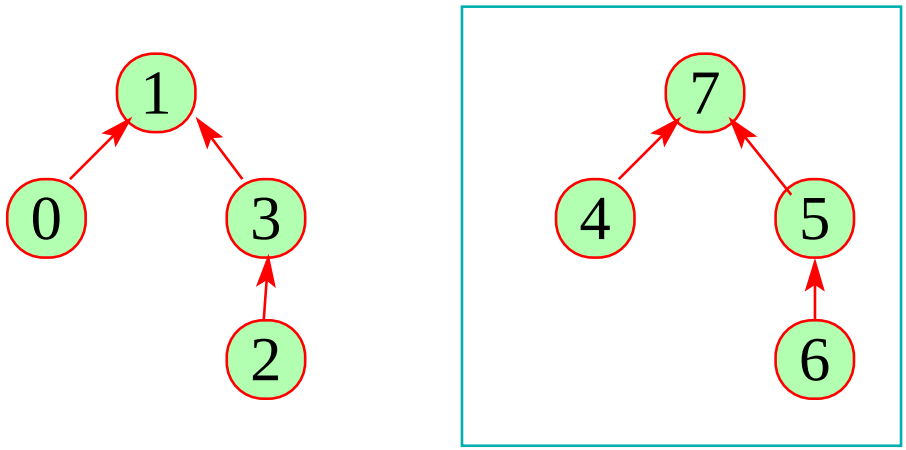
→ find $(\pi, u)$ folgt den Vater-Verweisen :-)

→ union $(\pi, u_1, u_2)$ hängt den Vater-Verweis eines $u_i$ um ...




| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

| 1 | 1 | 3 | 1 | 4 | 7 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|




| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

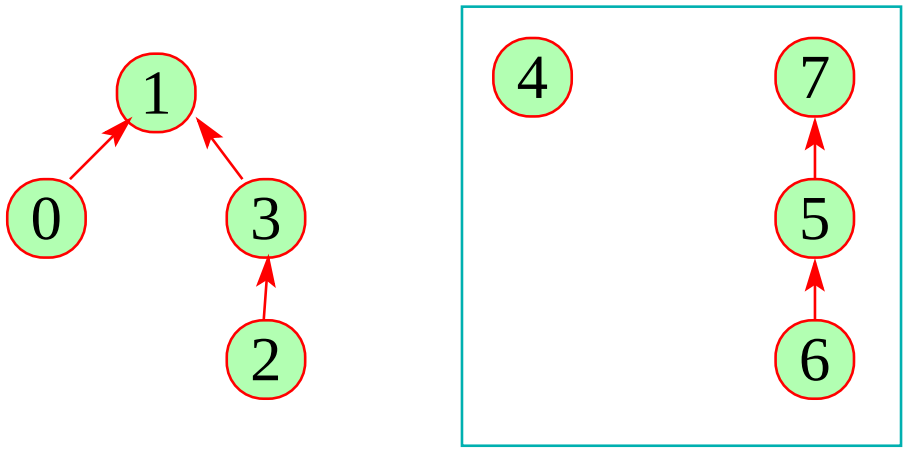
| 1 | 1 | 3 | 1 | 7 | 7 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

## Die Kosten:

| | | | |
|---|---|---|---|
| union | : | $\mathcal{O}(1)$ | :-) |
| find | : | $\mathcal{O}(depth(\pi))$ | :-( |

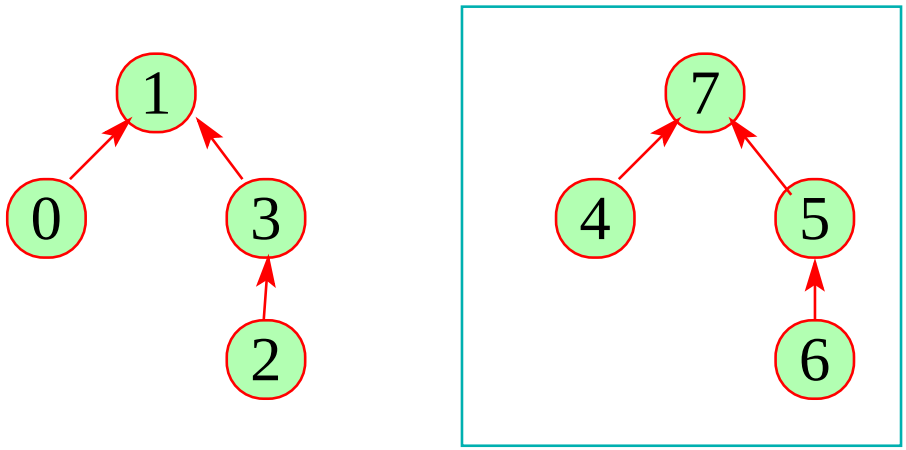
## Strategie zur Vermeidung tiefer Bäume:

- Hänge den kleineren Baum unter den größeren !
- Benutze find , um Pfade zu komprimieren ...



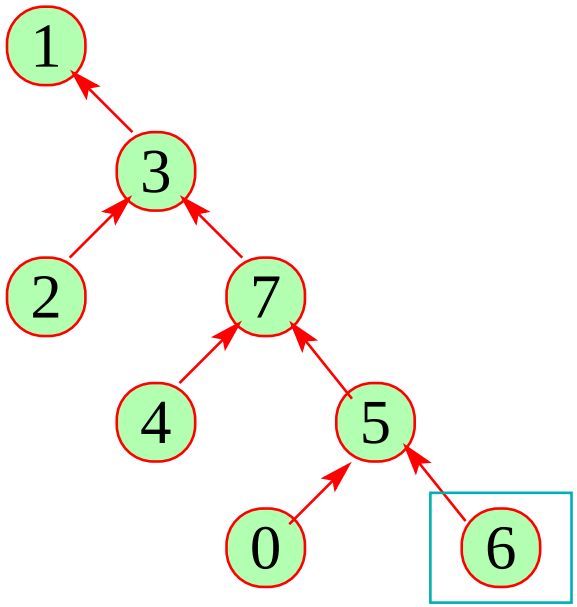

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

| 1 | 1 | 3 | 1 | 4 | 7 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

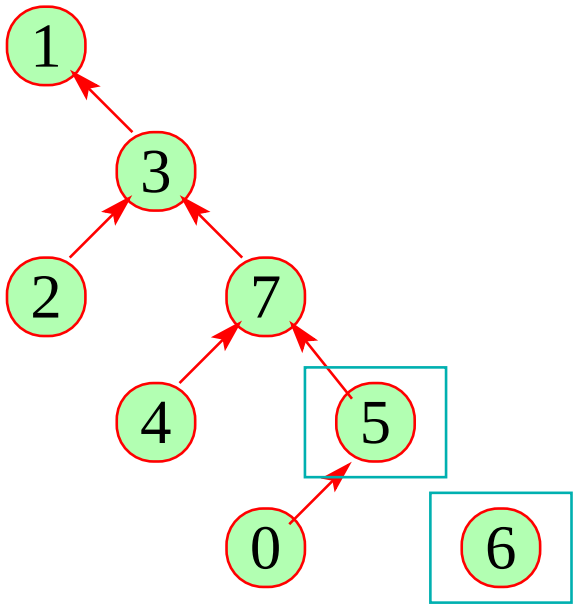



| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|

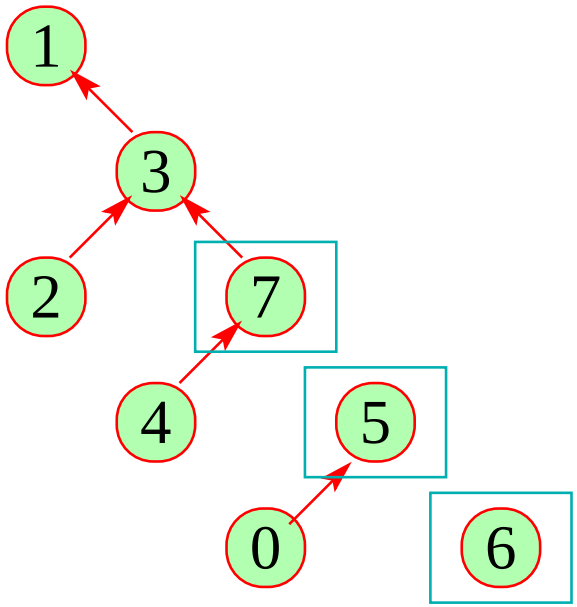
| 1 | 1 | 3 | 1 | 7 | 7 | 5 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|



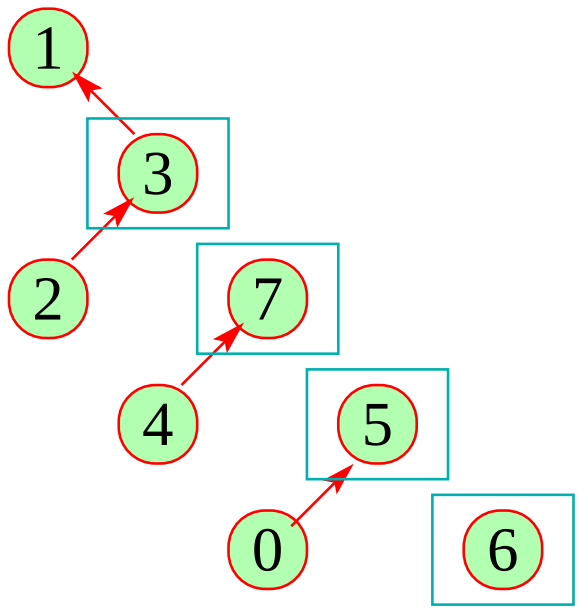

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 1 | 3 | 1 | 7 | 7 | 5 | 3 |



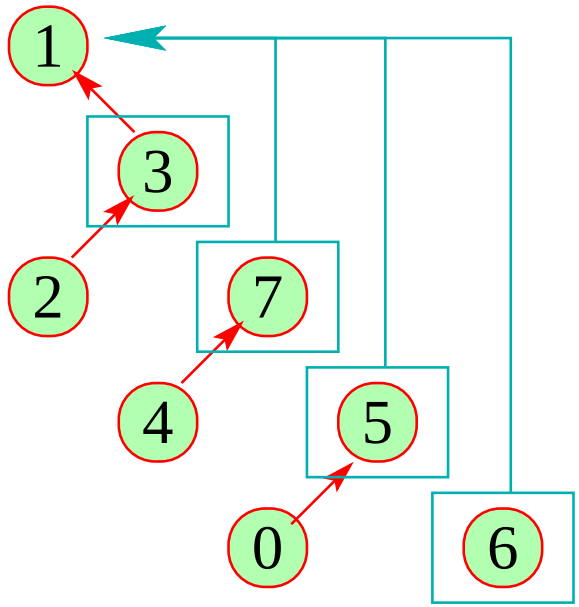

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 1 | 3 | 1 | 7 | 7 | 5 | 3 |




| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 1 | 3 | 1 | 7 | 7 | 5 | 3 |




| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 1 | 3 | 1 | 7 | 7 | 5 | 3 |




| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 1 | 3 | 1 | 1 | 7 | 1 | 1 |

Robert Endre Tarjan, Princeton

## Beachte:

- Mit dieser Datenstruktur dauern $n$ union- und $m$ find-Operationen $\mathcal{O}(n + m \cdot \alpha(n, n))$

  // $\alpha$ die inverse Ackermann-Funktion :-)

- Für unsere Anwendung müssen wir union nur so modifizieren, dass an den Wurzeln nach Möglichkeit keine Variablen stehen.
- Diese Modifikation vergrößert die asymptotische Laufzeit nicht :-)

# Fazit:

- Wenn Typ-Gleichungen für ein Programm lösbar sind, dann gibt es eine allgemeinste Zuordnung von Programm-Variablen und Teil-Ausdrücken zu Typen, die alle Regeln erfüllen :-)
- Eine solche allgemeinste Typisierung können wir in (fast) linearer Zeit berechnen :-)

## Fazit:

- Wenn Typ-Gleichungen für ein Programm lösbar sind, dann gibt es eine allgemeinste Zuordnung von Programm-Variablen und Teil-Ausdrücken zu Typen, die alle Regeln erfüllen :-)
- Eine solche allgemeinste Typisierung können wir in (fast) linearer Zeit berechnen :-)

## Achtung:

In der berechneten Typisierung können Typ-Variablen vorkommen !!!

## Beispiel: $e \equiv \mathbf{fn}\ (f, x) \Rightarrow f\ x$

Mit $\alpha \equiv \alpha[x]$ und $\beta \equiv \tau[f\ x]$ finden wir:

$$\begin{aligned} \alpha[f] &= \alpha \to \beta \\ \tau[e] &= (\alpha \to \beta, \alpha) \to \beta \end{aligned}$$

# Diskussion:

- Die Typ-Variablen bedeuten offenbar, dass die Funktionsdefinition für jede mögliche Instantiierung funktioniert $\Longrightarrow$ Polymorphie

  Wir kommen darauf zurück :-)
- Das bisherige Verfahren, um Typisierungen zu berechnen, hat den Nachteil, dass es nicht syntax-gerichtet ist ...
- Wenn das Gleichungssystem zu einem Programm keine Lösung besitzt, erhalten wir keine Information, wo der Fehler stecken könnte :-(

$\Longrightarrow$ Wir benötigen ein syntax-gerichtetes Verfahren !!!

... auch wenn es möglicherweise ineffizienter ist :-)

# Der Algorithmus $\mathcal{W}$:

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{fun}\ \mathcal{W}\ e\ (\Gamma,\theta) = \textbf{case}\ e & & \\
\quad \textbf{of}\ \ c & \rightarrow & (t_c,\theta) \\
\quad \mid\ \ [\,] & \rightarrow & \textbf{let val}\ \alpha = \mathsf{new}() \\
 & & \textbf{in}\ (\mathsf{list}\ \alpha,\theta) \\
 & & \mathsf{end} \\
\quad \mid\ \ x & \rightarrow & (\Gamma(x),\theta) \\
\quad \mid\ \ (e_1,\ldots,e_m) & \rightarrow & \textbf{let val}\ (t_1,\theta) = \mathcal{W}\ e_1\ (\Gamma,\theta) \\
 & & \qquad \ldots \\
 & & \qquad \textbf{val}\ (t_m,\theta) = \mathcal{W}\ e_m\ (\Gamma,\theta) \\
 & & \textbf{in}\ ((t_1,\ldots,t_m),\theta) \\
 & & \textbf{end} \\
\ldots & &
\end{array}
$$

# Der Algorithmus $\mathcal{W}$ (Forts.):

$$
\begin{array}{lll}
\mid & (e_1 : e_2) & \rightarrow \quad \textbf{let val } (t_1, \theta) = \mathcal{W}\ e_1\ (\Gamma, \theta) \\
& & \qquad\quad \textbf{val } (t_2, \theta) = \mathcal{W}\ e_2\ (\Gamma, \theta) \\
& & \qquad\quad \textbf{val } \theta = \boxed{\mathsf{unify}\ (\mathsf{list}\ t_1, t_2)\ \theta} \\
& & \qquad \textbf{in } (t_2, \theta) \\
& & \qquad \textbf{end} \\
\mid & (e_1\ e_2) & \rightarrow \quad \textbf{let val } (t_1, \theta) = \mathcal{W}\ e_1\ (\Gamma, \theta) \\
& & \qquad\quad \textbf{val } (t_2, \theta) = \mathcal{W}\ e_2\ (\Gamma, \theta) \\
& & \qquad\quad \textbf{val } \alpha = \mathsf{new}\ () \\
& & \qquad\quad \textbf{val } \theta = \boxed{\mathsf{unify}\ (t_1, t_2 \rightarrow \alpha)\ \theta} \\
& & \qquad \textbf{in } (\alpha, \theta) \\
& & \qquad \textbf{end} \\
& \ldots & \\
\end{array}
$$

# Der Algorithmus $\mathcal{W}$ (Forts.):

$$
\begin{array}{lll}
\mid & (\textbf{if } e_0 \textbf{ then } e_1 \textbf{ else } e_2) & \rightarrow \quad \textbf{let val } (t_0, \theta) = \mathcal{W}\ e_0\ (\Gamma, \theta) \\
 & & \qquad\quad \textbf{val } \theta = \boxed{\mathsf{unify}\ (\textbf{bool}, t_0)\ \theta} \\
 & & \qquad\quad \textbf{val } (t_1, \theta) = \mathcal{W}\ e_1\ (\Gamma, \theta) \\
 & & \qquad\quad \textbf{val } (t_2, \theta) = \mathcal{W}\ e_2\ (\Gamma, \theta) \\
 & & \qquad\quad \textbf{val } \theta = \boxed{\mathsf{unify}\ (t_1, t_2)\ \theta} \\
 & & \qquad \textbf{in } (t_1, \theta) \\
 & & \qquad \textbf{end} \\
 & \ldots &
\end{array}
$$

# Der Algorithmus $\mathcal{W}$ (Forts.):

$$
\begin{array}{l}
\mid \quad (\textbf{case}\ e_0\ \textbf{of}\ [\,] \rightarrow e_1\ ;\ (x : y) \rightarrow e_2) \\
\qquad \rightarrow \quad \textbf{let}\ \ \textbf{val}\ \ (t_0, \theta) = \mathcal{W}\ e_0\ (\Gamma, \theta) \\
\qquad\qquad\qquad\ \ \textbf{val}\ \ \alpha = \mathsf{new}() \\
\qquad\qquad\qquad\ \ \textbf{val}\ \ \theta = \boxed{\mathsf{unify}\ (\mathsf{list}\ \alpha, t_0)\ \theta} \\
\qquad\qquad\qquad\ \ \textbf{val}\ \ (t_1, \theta) = \mathcal{W}\ e_1\ (\Gamma, \theta) \\
\qquad\qquad\qquad\ \ \textbf{val}\ \ (t_2, \theta) = \mathcal{W}\ e_2\ (\Gamma \oplus \{x \mapsto \alpha, y \mapsto \mathsf{list}\ \alpha\}, \theta) \\
\qquad\qquad\qquad\ \ \textbf{val}\ \ \theta = \boxed{\mathsf{unify}\ (t_1, t_2)\ \theta} \\
\qquad\qquad\ \ \textbf{in}\ \ (t_1, \theta) \\
\qquad\qquad\ \ \textbf{end} \\
\quad \ldots
\end{array}
$$

# Der Algorithmus $\mathcal{W}$ (Forts.):

$$
\begin{array}{l}
\mid \quad \textbf{fn}\ (x_1, \ldots, x_m) \Rightarrow e \\
\qquad\qquad \rightarrow \quad \textbf{let}\ \textbf{val}\ \alpha_1 = \mathsf{new}() \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \textbf{val}\ \alpha_m = \mathsf{new}() \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \textbf{val}\ (t, \theta) = \mathcal{W}\ e\ (\Gamma \oplus \{x_1 \mapsto \alpha_1, \ldots, x_m \mapsto \alpha_m\}, \theta) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \textbf{in}\ ((\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \rightarrow t, \theta) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \textbf{end} \\
\quad \ldots
\end{array}
$$

# Der Algorithmus $\mathcal{W}$ (Forts.):

$$
\begin{array}{l}
\mid \quad (\textbf{letrec } x_1 = e_1; \ldots; x_m = e_m \textbf{ in } e_0) \\
\qquad \rightarrow \quad \textbf{let val } \alpha_1 = \mathsf{new}() \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\
\qquad\qquad\qquad\quad \textbf{val } \alpha_m = \mathsf{new}() \\
\qquad\qquad\qquad\quad \textbf{val } \Gamma = \Gamma \oplus \{x_1 \mapsto \alpha_1, \ldots, x_m \mapsto \alpha_m\} \\
\qquad\qquad\qquad\quad \textbf{val } (t_1, \theta) = \mathcal{W}\ e_1\ (\Gamma, \theta) \\
\qquad\qquad\qquad\quad \textbf{val } \theta = \boxed{\mathsf{unify}\ (\alpha_1, t_1)\ \theta} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\
\qquad\qquad\qquad\quad \textbf{val } (t_m, \theta) = \mathcal{W}\ e_m\ (\Gamma, \theta) \\
\qquad\qquad\qquad\quad \textbf{val } \theta = \boxed{\mathsf{unify}\ (\alpha_m, t_m)\ \theta} \\
\qquad\qquad\qquad\quad \textbf{val } (t_0, \theta) = \mathcal{W}\ e_0\ (\Gamma, \theta) \\
\qquad\qquad\qquad \textbf{in } (t_0, \theta) \\
\qquad\qquad\qquad \textbf{end} \\
\ldots
\end{array}
$$

# Der Algorithmus $\mathcal{W}$ (Forts.):

$$
\begin{array}{l}
\mid \quad (\textbf{let } x_1 = e_1; \ldots; x_m = e_m \textbf{ in } e_0) \\
\qquad \rightarrow \quad \textbf{let val } (t_1, \theta) = \mathcal{W}\ e_1\ (\Gamma, \theta) \\
\qquad\qquad\qquad\quad \textbf{val } \Gamma = \Gamma \oplus \{x_1 \mapsto t_1\} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \ldots \\
\qquad\qquad\qquad\quad \textbf{val } (t_m, \theta) = \mathcal{W}\ e_m\ (\Gamma, \theta) \\
\qquad\qquad\qquad\quad \textbf{val } \Gamma = \Gamma \oplus \{x_m \mapsto t_m\} \\
\qquad\qquad\qquad\quad \textbf{val } (t_0, \theta) = \mathcal{W}\ e_0\ (\Gamma, \theta) \\
\qquad\qquad\quad \textbf{in } (t_0, \theta) \\
\qquad\qquad\quad \textbf{end} \\
\ldots
\end{array}
$$

# Bemerkungen:

- Am Anfang ist $\Gamma = \emptyset$ und $\theta = \emptyset$ :-)
- Der Algorithmus unifiziert nach und nach die Typ-Gleichungen :-)
- Der Algorithmus liefert bei jedem Aufruf einen Typ $t$ zusammen mit einer Substitution $\theta$ zurück.
- Der inferierte allgemeinste Typ ergibt sich als $\theta(t)$.
- Die Hilfsfunktion new() liefert jeweils eine neue Typvariable :-)
- Bei jedem Aufruf von unify() kann die Typinferenz fehlschlagen ...
- Bei Fehlschlag sollte die Stelle, wo der Fehler auftrat gemeldet werden, die Typ-Inferenz aber mit plausiblen Werten fortgesetzt werden :-}