Implementierung: DFS post-order Traversierung

Für Blätter $r \equiv \boxed{i \mid x}$ ist $\mathsf{empty}[r] = (x \equiv \epsilon)$.

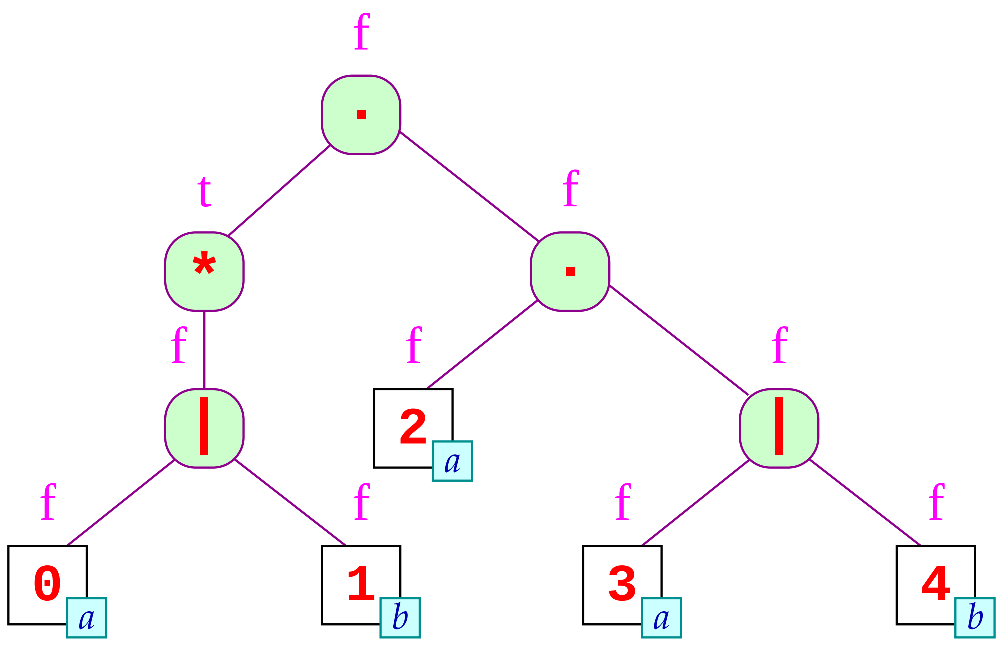
Andernfalls:

$$
\begin{array}{lcl}
\mathsf{empty}[r_1 \mid r_2] & = & \mathsf{empty}[r_1] \vee \mathsf{empty}[r_2] \\
\mathsf{empty}[r_1 \cdot r_2] & = & \mathsf{empty}[r_1] \wedge \mathsf{empty}[r_2] \\
\mathsf{empty}[r_1^*] & = & t \\
\mathsf{empty}[r_1?] & = & t
\end{array}
$$

2. Schritt:

Die Menge erster Bätter: $\mathsf{first}[r] = \{i \text{ in } r \mid (\bullet r, \epsilon, \bullet \boxed{i \mid x}) \in \delta^*\}$

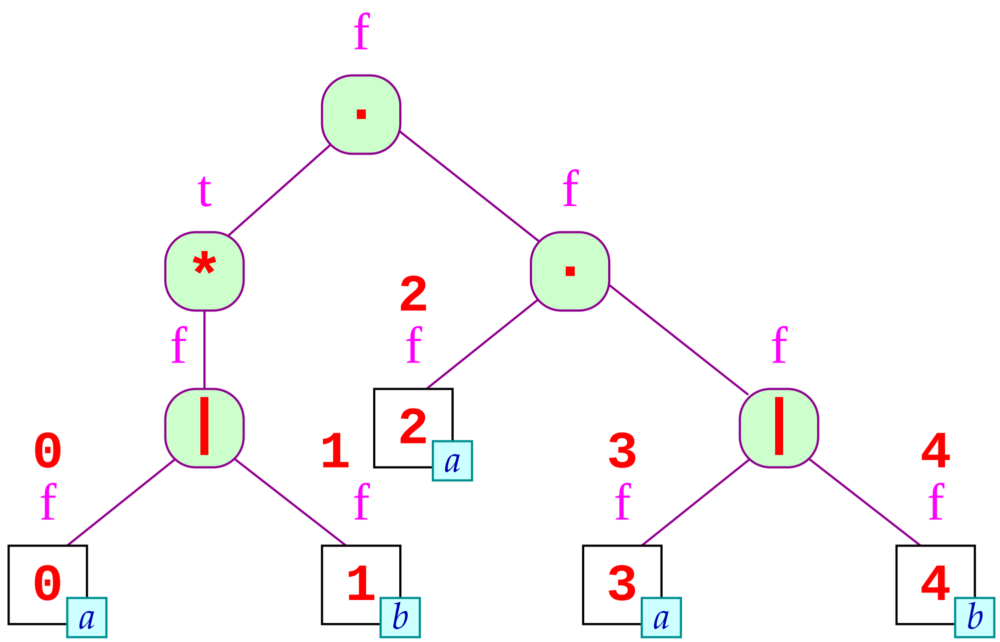
... im Beispiel:



2. Schritt:

Die Menge erster Bätter: $\quad \mathsf{first}[r] = \{i \text{ in } r \mid (\bullet r, \epsilon, \bullet \boxed{i \mid x}) \in \delta^*\}$

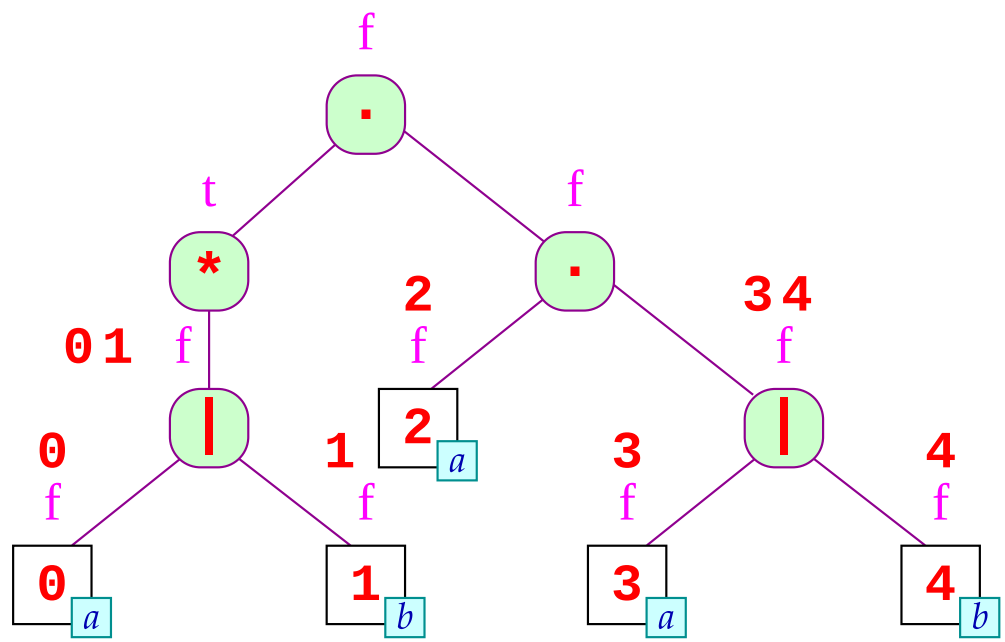
... im Beispiel:



2. Schritt:

Die Menge erster Bätter: $\text{first}[r] = \{i \text{ in } r \mid (\bullet r, \epsilon, \bullet\boxed{i \mid x}) \in \delta^*\}$

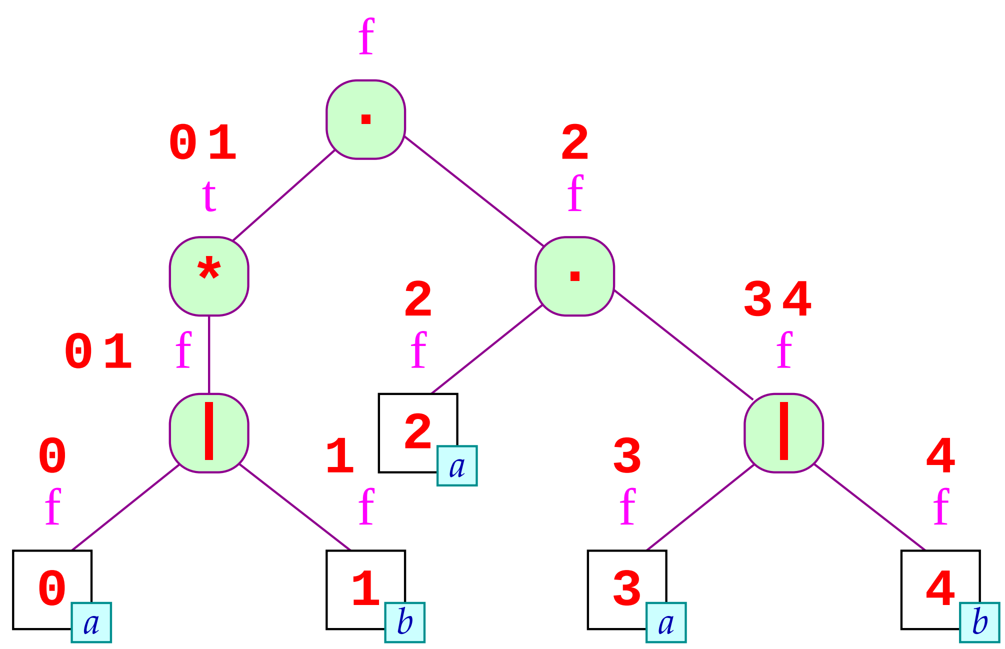
... im Beispiel:



2. Schritt:

Die Menge erster Bätter: $\quad \mathsf{first}[r] = \{i \text{ in } r \mid (\bullet r, \epsilon, \bullet\boxed{i \mid x}) \in \delta^*\}$

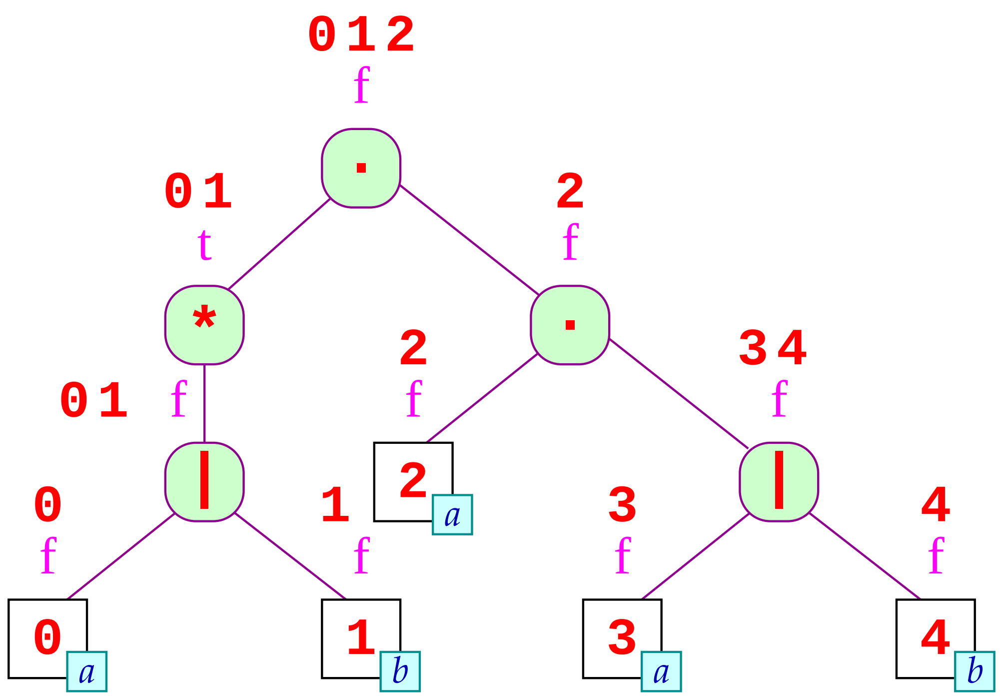
... im Beispiel:



2. Schritt:

Die Menge erster Bätter: $\mathsf{first}[r] = \{i \text{ in } r \mid (\bullet r, \epsilon, \bullet\boxed{i \mid x}) \in \delta^*, x \neq \epsilon\}$

... im Beispiel:



Implementierung: DFS post-order Traversierung

Für Blätter $r \equiv \boxed{i \mid x}$ ist $\textsf{first}[r] = \{i \mid x \not\equiv \epsilon\}$.

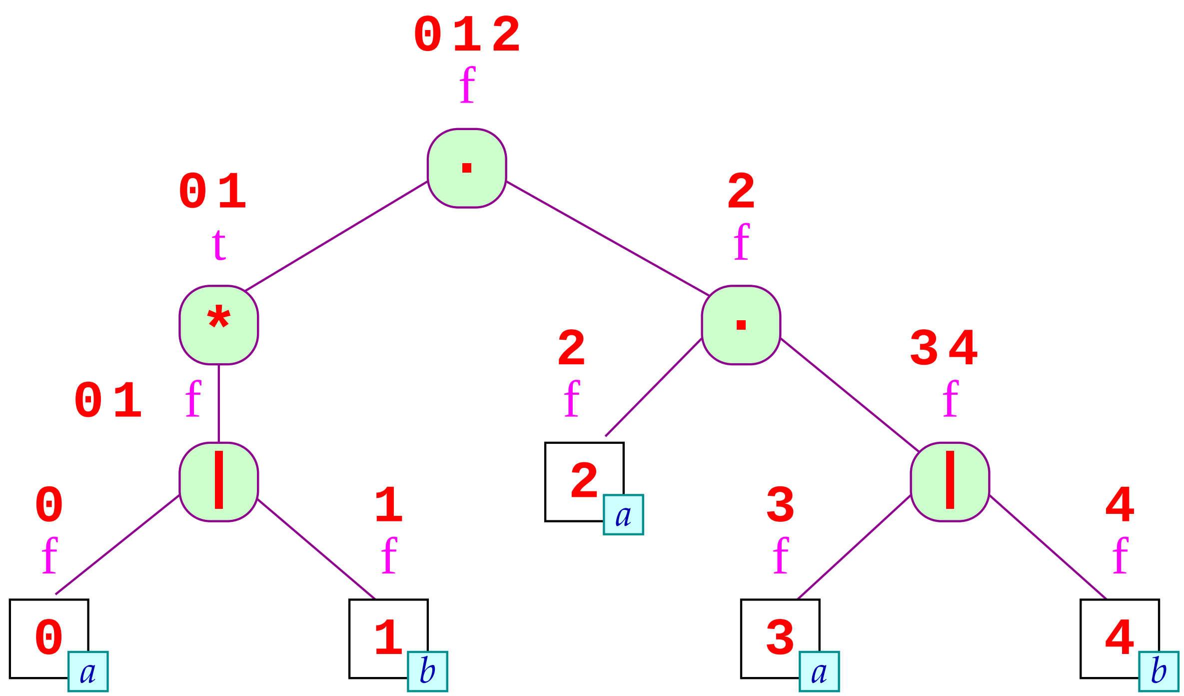
Andernfalls:

$$
\begin{array}{lll}
\textsf{first}[r_1 \mid r_2] & = & \textsf{first}[r_1] \cup \textsf{first}[r_2] \\
\textsf{first}[r_1 \cdot r_2] & = & \begin{cases} \textsf{first}[r_1] \cup \textsf{first}[r_2] & \text{falls} \quad \textsf{empty}[r_1] = t \\ \textsf{first}[r_1] & \text{falls} \quad \textsf{empty}[r_1] = f \end{cases} \\
\textsf{first}[r_1^*] & = & \textsf{first}[r_1] \\
\textsf{first}[r_1?] & = & \textsf{first}[r_1]
\end{array}
$$

3. Schritt:

Die Menge nächster Bätter: $\mathsf{next}[r] = \{ i \mid (r\bullet, \epsilon, \bullet\boxed{i \mid x}) \in \delta^* \}$

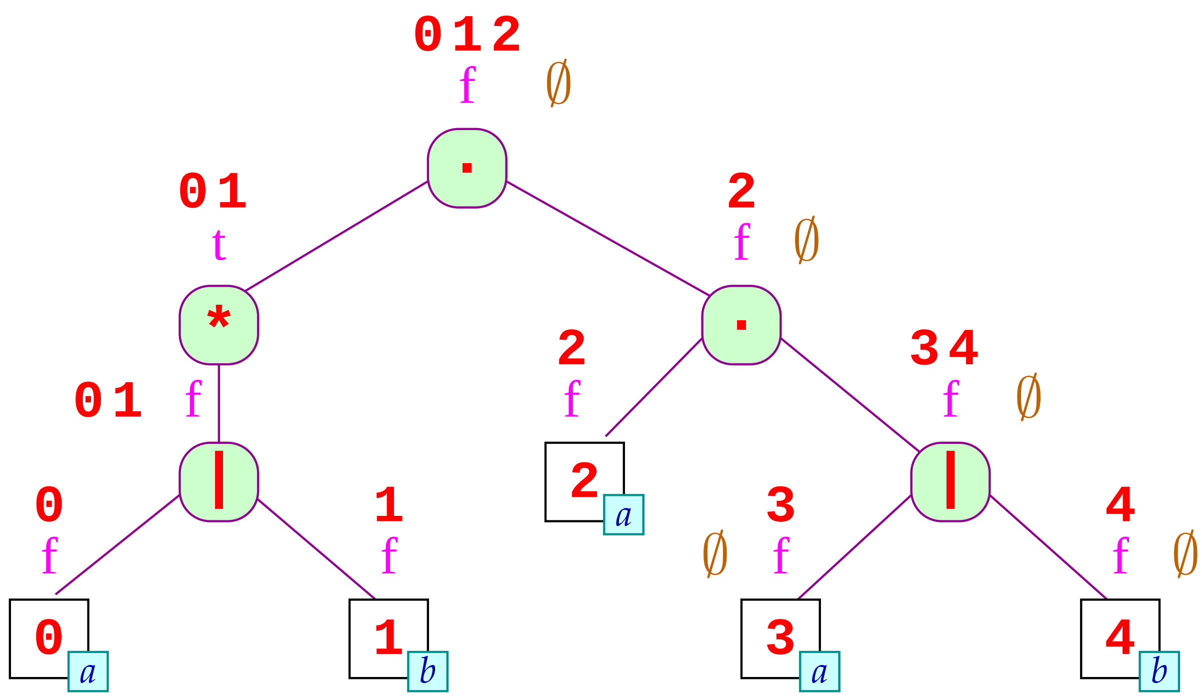
... im Beispiel:



3. Schritt:

Die Menge nächster Bätter: $\text{next}[r] = \{ i \mid (r\bullet, \epsilon, \bullet\boxed{i \mid x}) \in \delta^* \}$

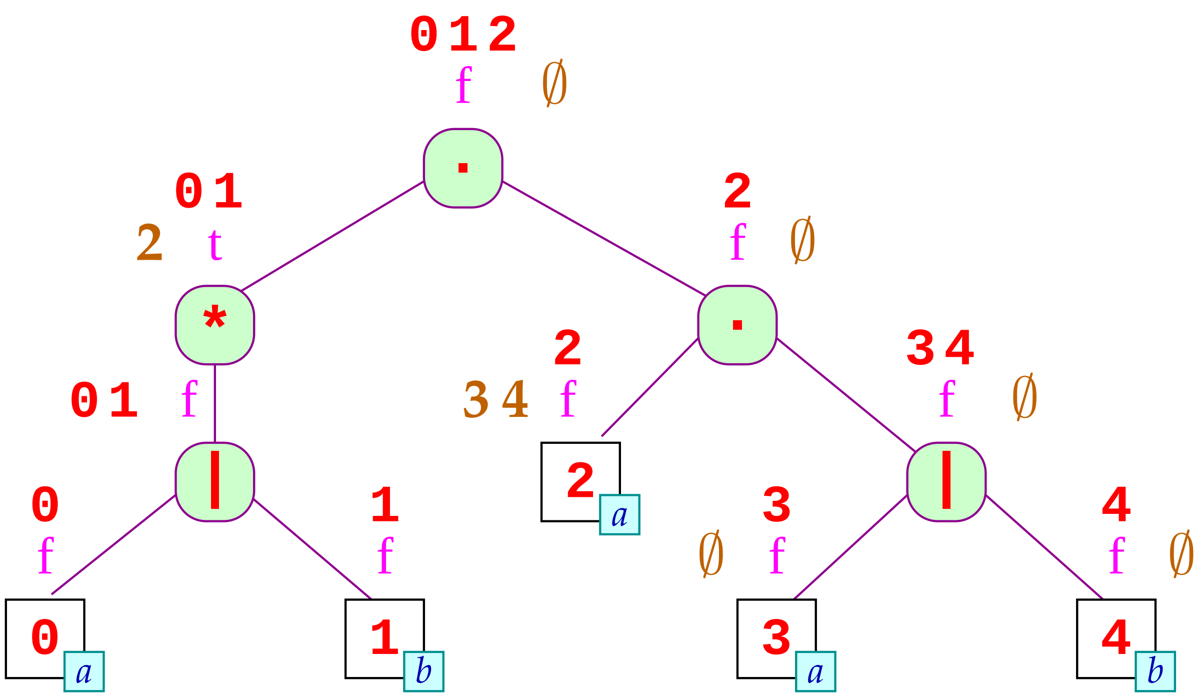
... im Beispiel:



3. Schritt:

Die Menge nächster Bätter: $\text{next}[r] = \{i \mid (r\bullet, \epsilon, \bullet\boxed{i \mid x}) \in \delta^*\}$

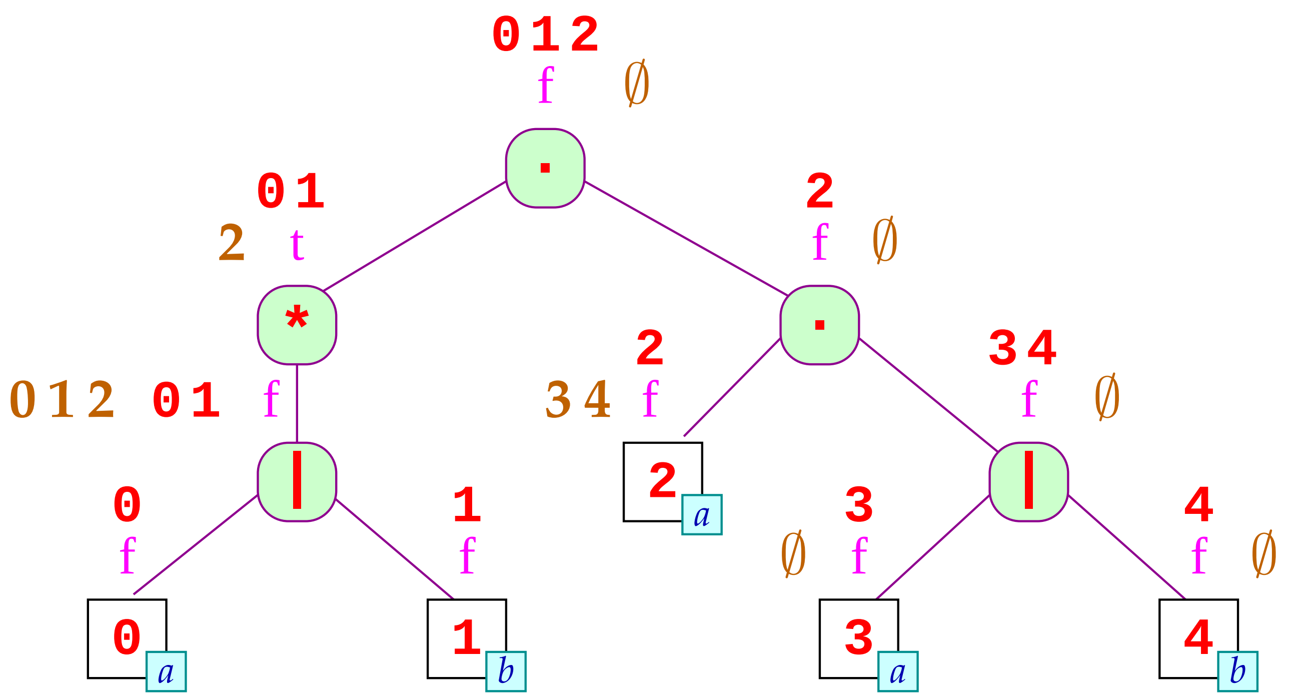
... im Beispiel:



3. Schritt:

Die Menge nächster Bätter: $\mathsf{next}[r] = \{i \mid (r\bullet, \epsilon, \bullet\boxed{i \mid x}) \in \delta^*\}$

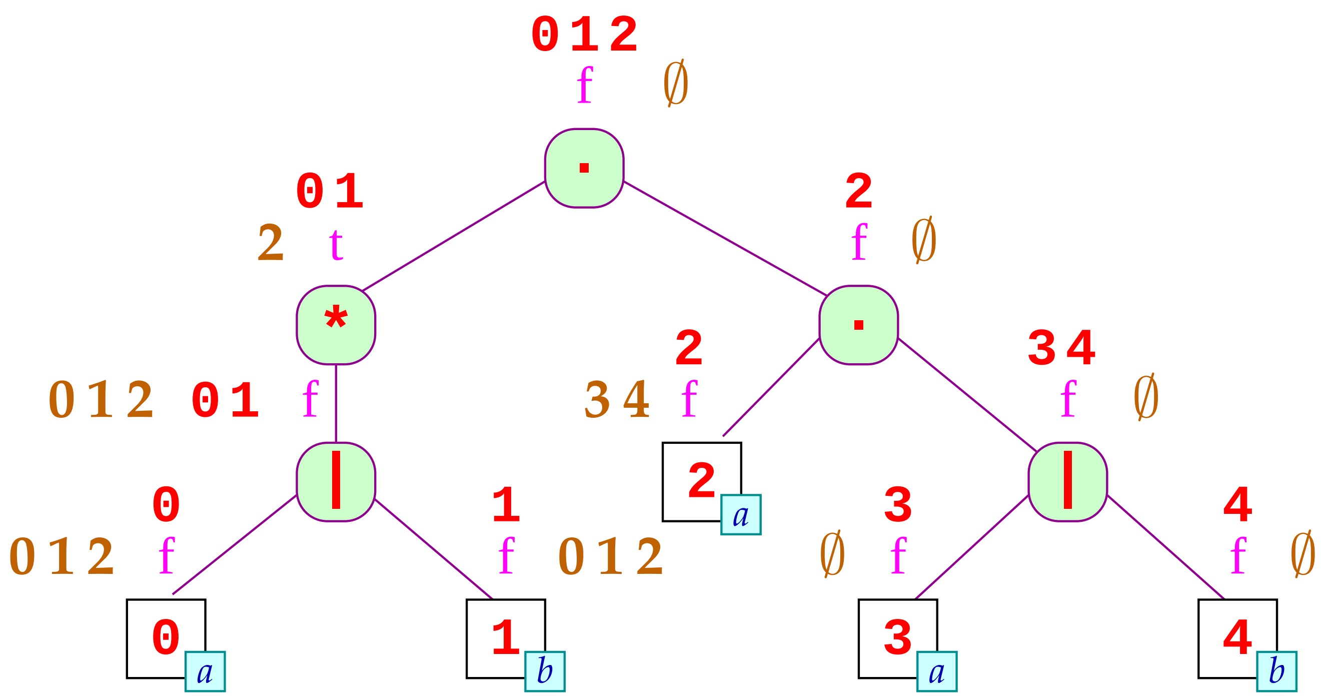
... im Beispiel:



3. Schritt:

Die Menge nächster Bätter: $\quad \text{next}[r] = \{i \mid (r\bullet, \epsilon, \bullet\boxed{i \mid x}) \in \delta^*\}$

... im Beispiel:



Implementierung: DFS pre-order Traversierung ;-)

Für die Wurzel haben wir:

$$\text{next}[e] = \emptyset$$

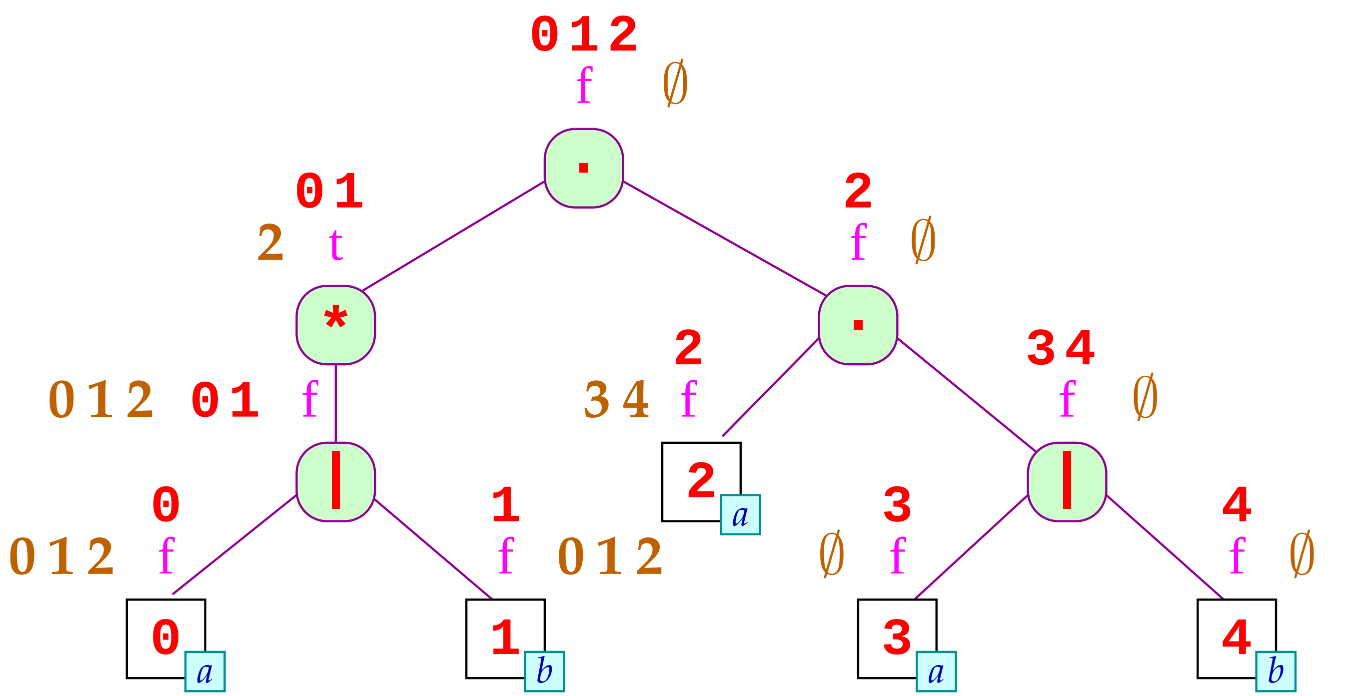
Ansonsten machen wir eine Fallunterscheidung über den Kontext:

r	Regeln
$r_1 \mid r_2$	$\text{next}[r_1] = \text{next}[r]$ $\text{next}[r_2] = \text{next}[r]$
$r_1 \cdot r_2$	$\text{next}[r_1] = \begin{cases} \text{first}[r_2] \cup \text{next}[r] & \text{falls} \quad \text{empty}[r_2] = t \\ \text{first}[r_2] & \text{falls} \quad \text{empty}[r_2] = f \end{cases}$ $\text{next}[r_2] = \text{next}[r]$
r_1^*	$\text{next}[r_1] = \text{first}[r_1] \cup \text{next}[r]$
$r_1?$	$\text{next}[r_1] = \text{next}[r]$

4. Schritt:

Die Menge **letzter** Bätter: $\text{last}[r] = \{i \text{ in } r \mid (\boxed{i \mid x}\bullet, \epsilon, r\bullet) \in \delta^*\}$

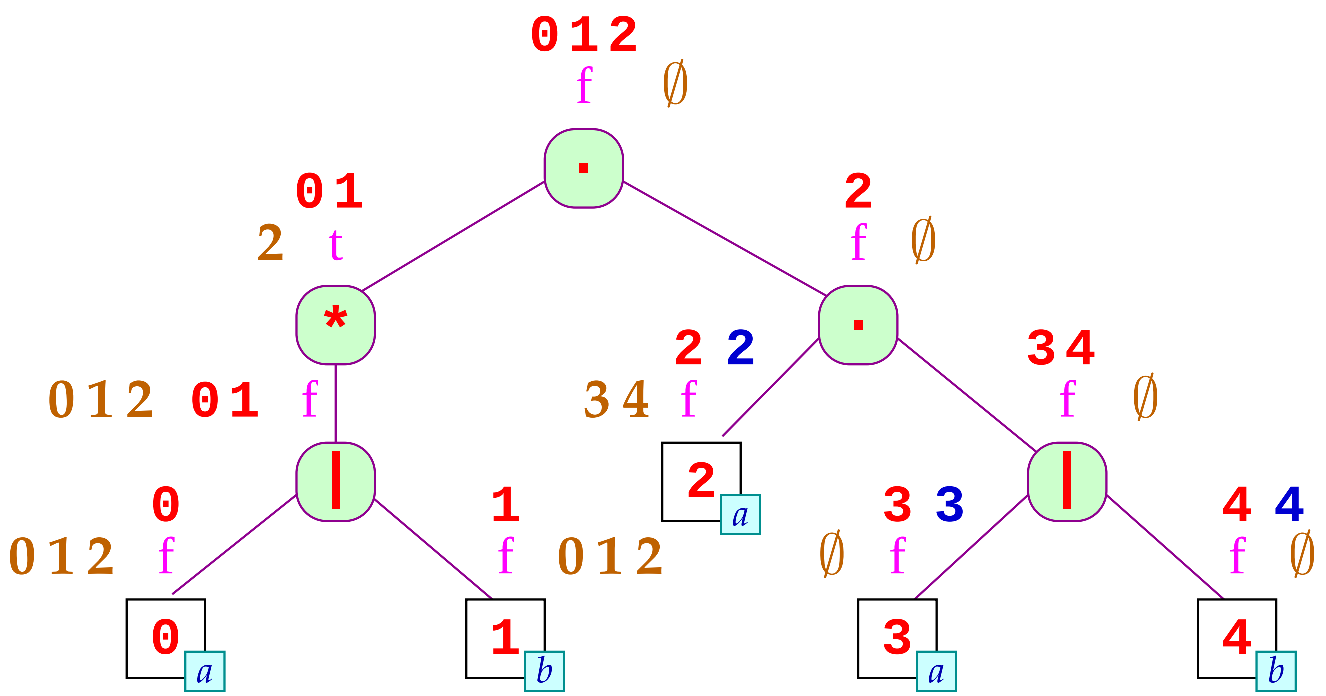
... im Beispiel:



4. Schritt:

Die Menge letzter Bätter: $\mathsf{last}[r] = \{i \text{ in } r \mid (\boxed{i \mid x}\bullet, \epsilon, r\bullet) \in \delta^*\}$

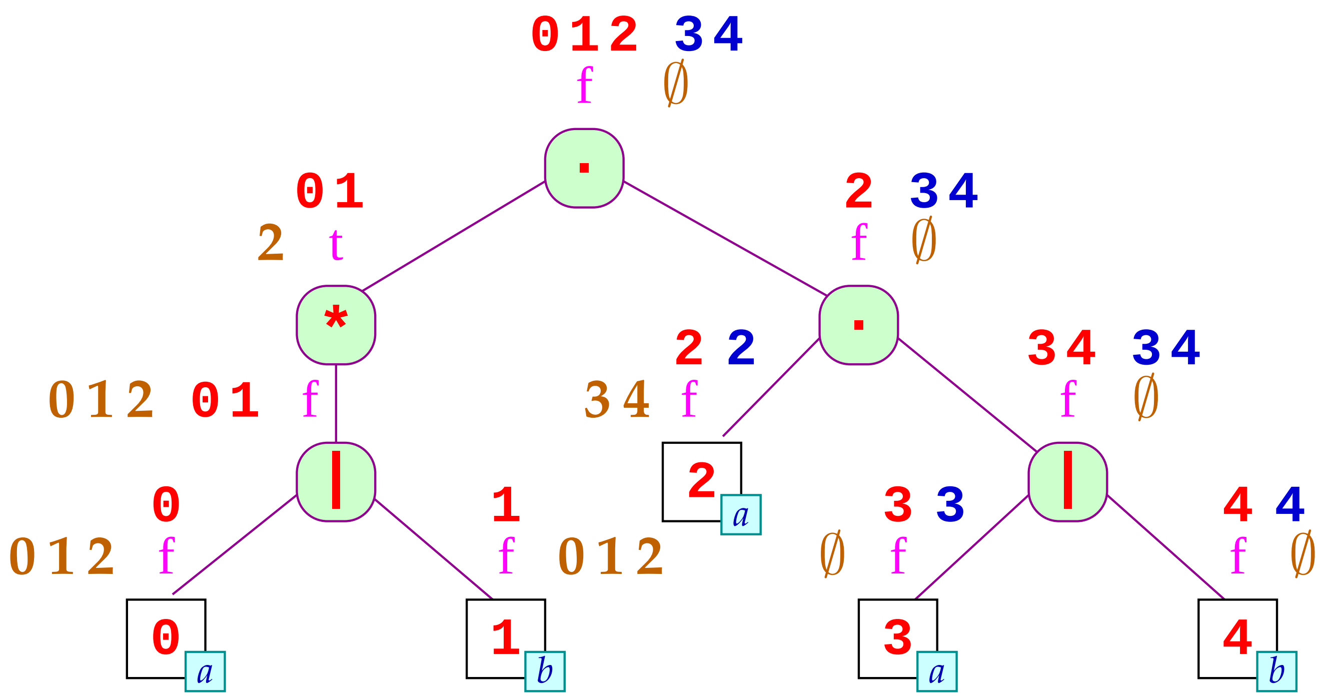
... im Beispiel:



4. Schritt:

Die Menge letzter Bätter: $\mathsf{last}[r] = \{i \text{ in } r \mid (\boxed{i \mid x}\bullet, \epsilon, r\bullet) \in \delta^*, x \neq \epsilon\}$

... im Beispiel:



Implementierung: DFS post-order Traversierung :-)

Für Blätter $r \equiv \boxed{i \mid x}$ ist $\text{last}[r] = \{i \mid x \not\equiv \epsilon\}$.

Andernfalls:

$$
\begin{array}{lll}
\text{last}[r_1 \mid r_2] & = & \text{last}[r_1] \cup \text{last}[r_2] \\
\text{last}[r_1 \cdot r_2] & = & \begin{cases} \text{last}[r_1] \cup \text{last}[r_2] & \text{falls} \quad \text{empty}[r_2] = t \\ \text{last}[r_2] & \text{falls} \quad \text{empty}[r_2] = f \end{cases} \\
\text{last}[r_1^*] & = & \text{last}[r_1] \\
\text{last}[r_1?] & = & \text{last}[r_1]
\end{array}
$$

Integration:

Zustände: $\{\bullet e\} \cup \{i\bullet \mid i \text{ Blatt}\}$

Startzustand: $\bullet e$

Endzustände:

Falls $\mathsf{empty}[e] = f$, dann $\mathsf{last}[e]$. Andernfalls: $\{\bullet e\} \cup \mathsf{last}[e]$.

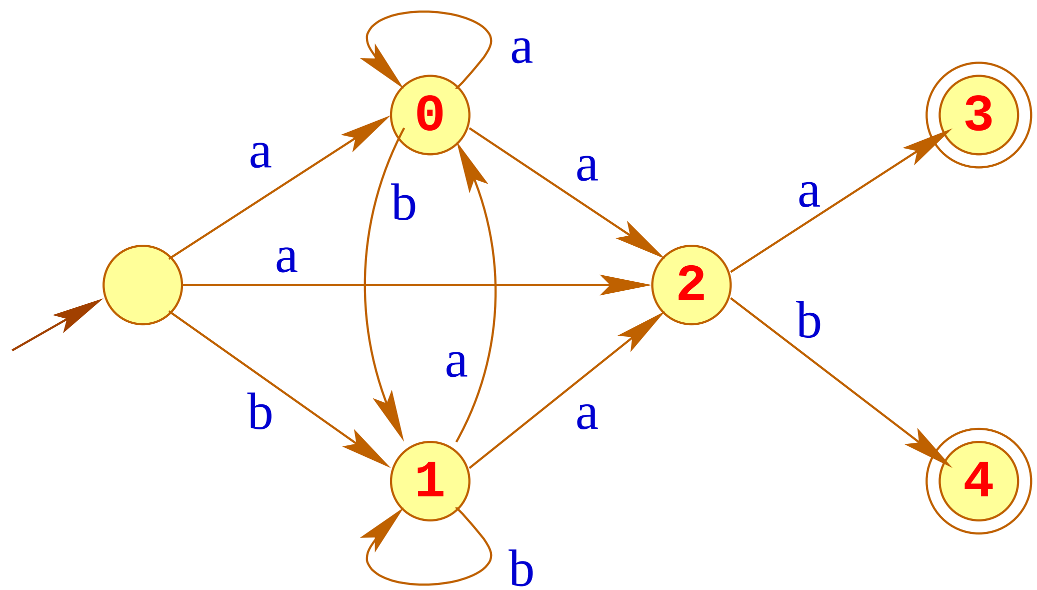
Übergänge:

$(\bullet e, a, i\bullet)$ falls $i \in \mathsf{first}[e]$ und i mit a beschriftet ist;

$(i\bullet, a, i'\bullet)$ falls $i' \in \mathsf{next}[i]$ und i' mit a beschriftet ist.

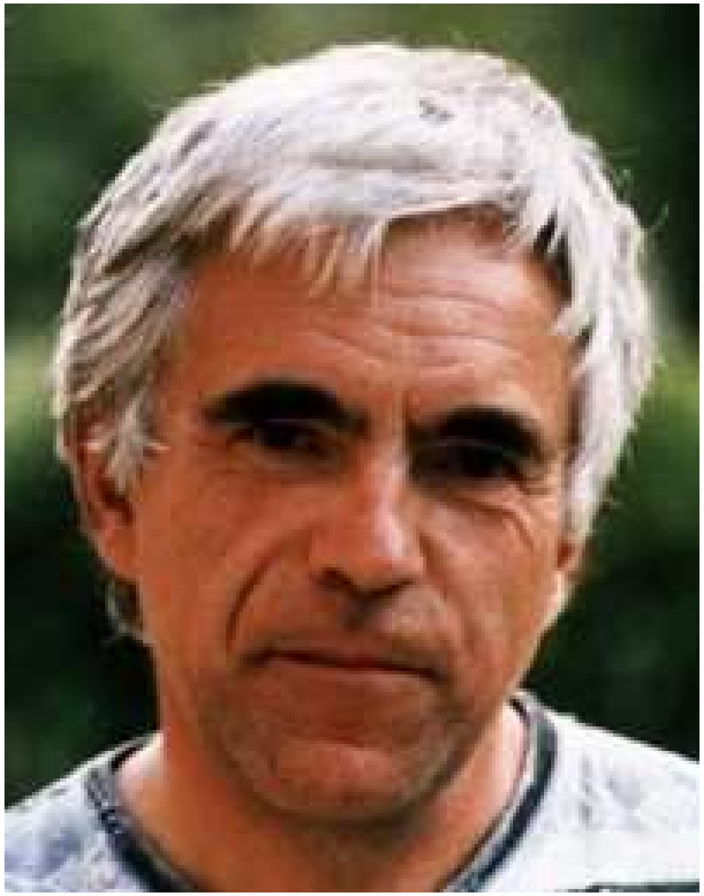
Den resultierenden Automaten bezeichnen wir mit A_e.

... im Beispiel:

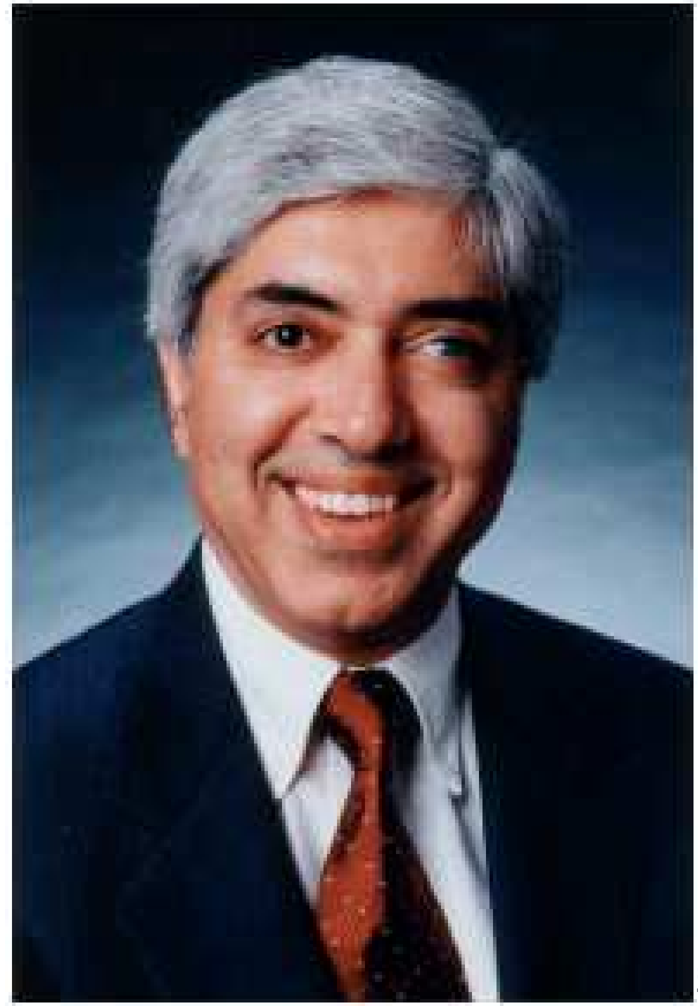


Bemerkung:

- Die Konstruktion heißt auch Berry-Sethi- oder Glushkow-Konstruktion.
- Sie wird in XML zur Definition von Content Models benutzt ;-)
- Das Ergebnis ist vielleicht nicht, was wir erwartet haben ...

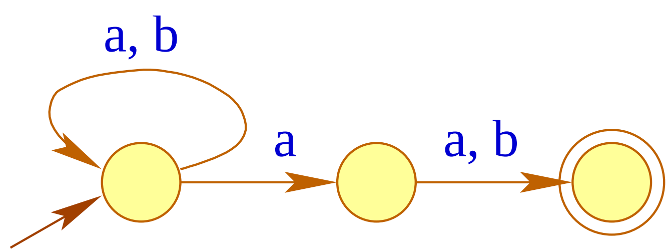


Gerard Berry, Esterel Technologies



Ravi Sethi, Research VR, Lucent Technologies

Der erwartete Automat:

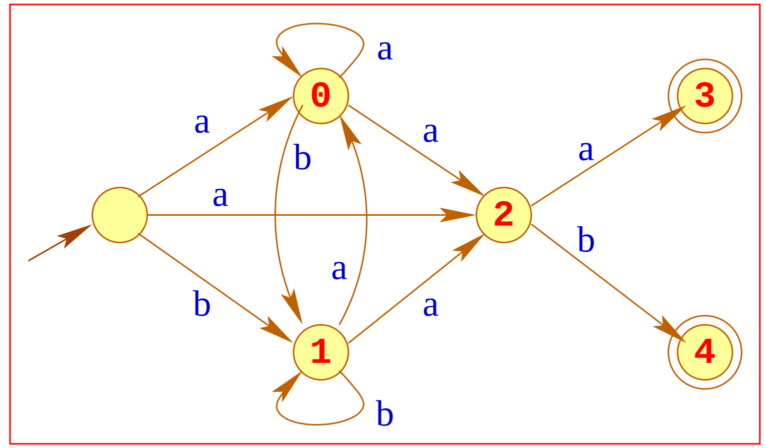


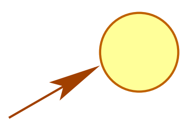
Bemerkung:

- in einen Zustand eingehende Kanten haben hier nicht unbedingt die gleiche Beschriftung :-)
- Dafür ist die Berry-Sethi-Konstruktion direkter ;-)
- In Wirklichkeit benötigen wir aber deterministische Automaten

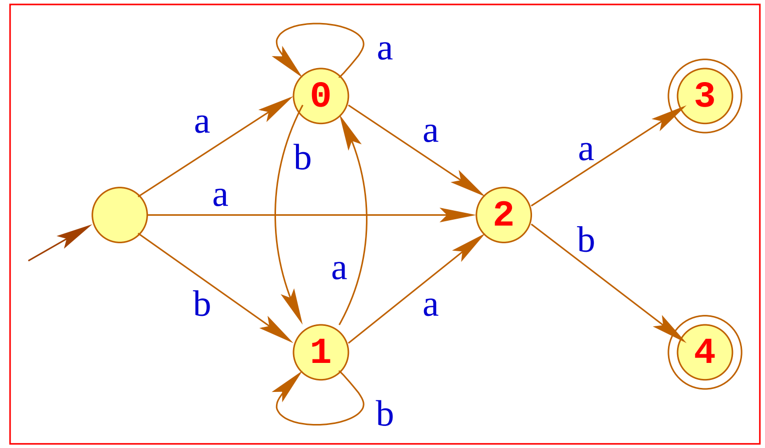
$\Longrightarrow$ Teilmengen-Konstruktion

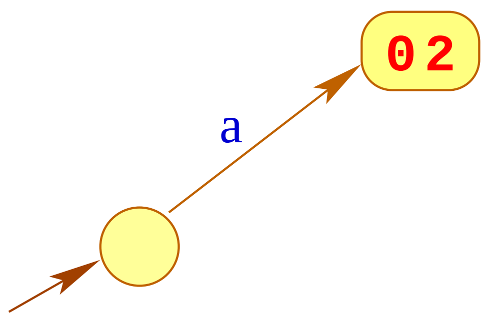
... im Beispiel:



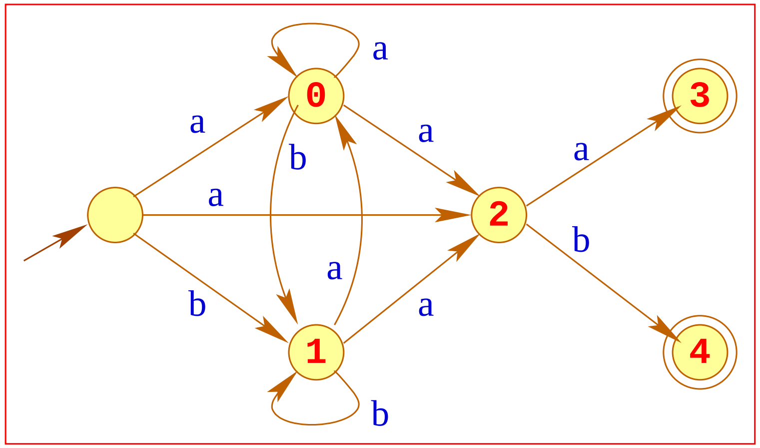


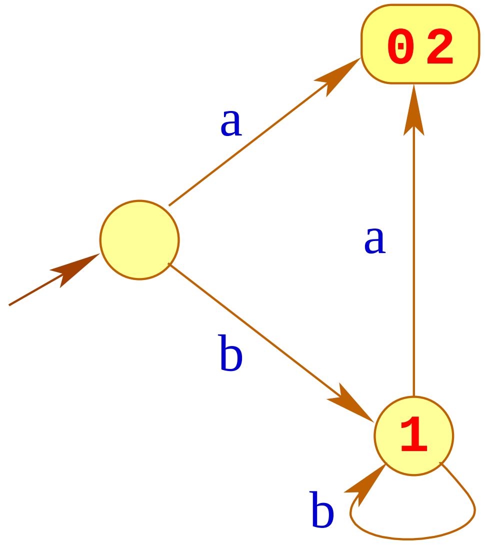
... im Beispiel:



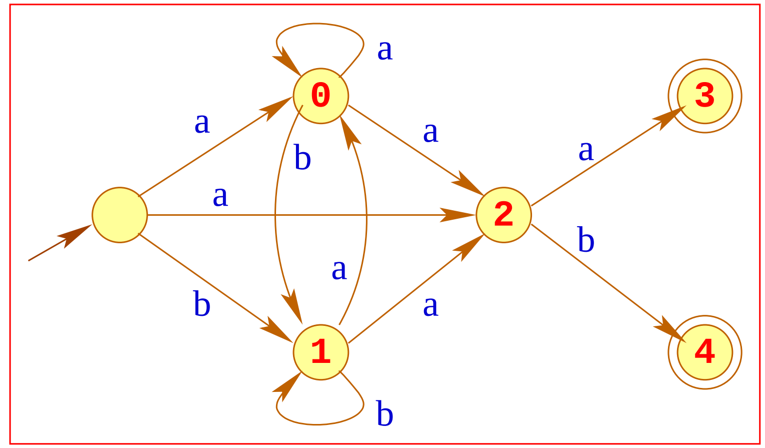


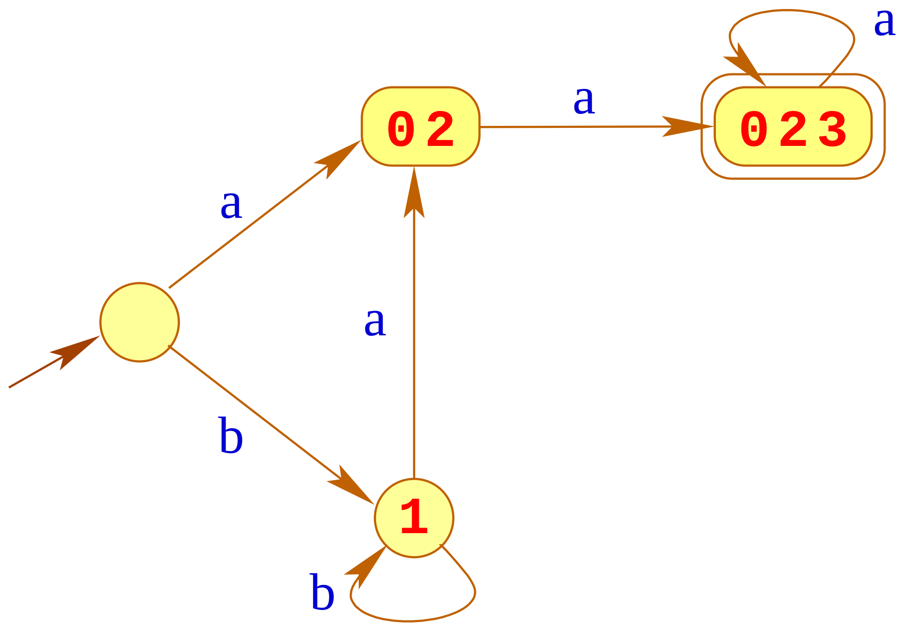
... im Beispiel:



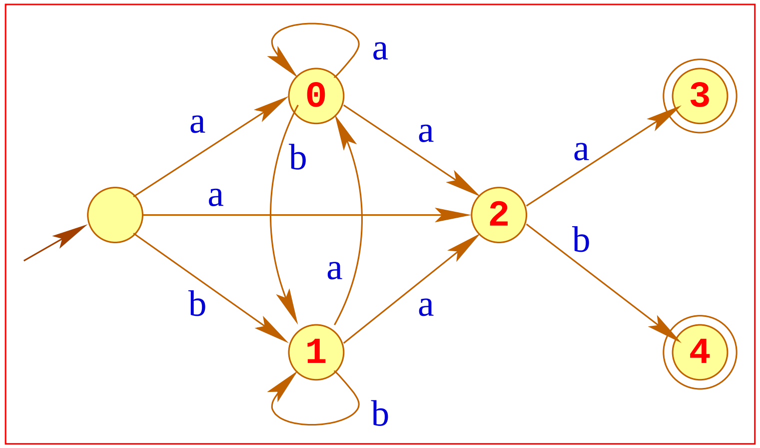


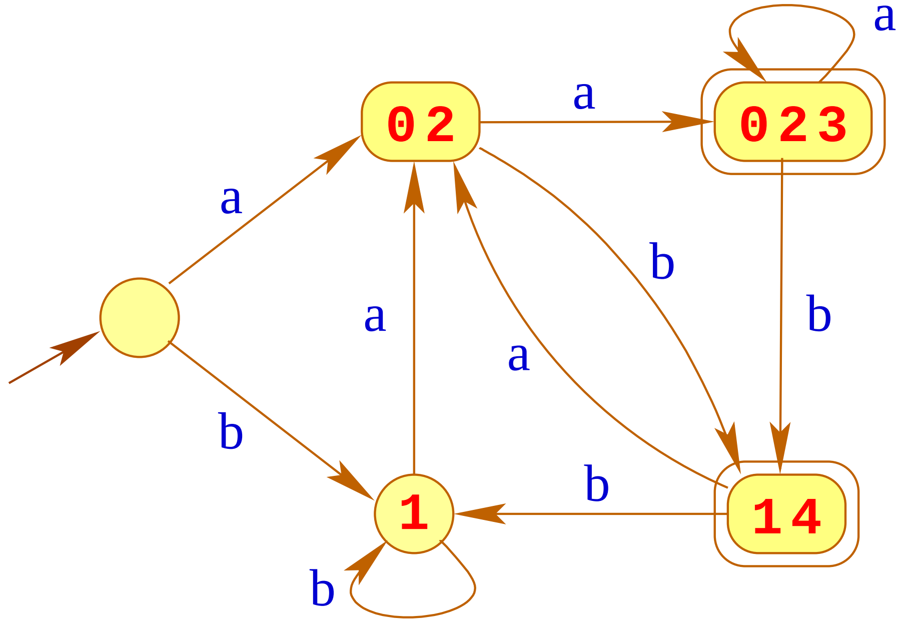
... im Beispiel:





... im Beispiel:





Satz:

Zu jedem nichtdeterministischen Automaten $A = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$ kann ein deterministischer Automat $\mathcal{P}(A)$ konstruiert werden mit

$$\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(\mathcal{P}(A))$$

Satz:

Zu jedem nichtdeterministischen Automaten $A = (Q, \Sigma, \delta, I, F)$ kann ein deterministischer Automat $\mathcal{P}(A)$ konstruiert werden mit

$$\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(\mathcal{P}(A))$$

Konstruktion:

Zustände: Teilmengen von Q;

Anfangszustände: $\{I\}$;

Endzustände: $\{Q' \subseteq Q \mid Q' \cap F \neq \emptyset\}$;

Übergangsfunktion: $\delta_{\mathcal{P}}(Q', a) = \{q \in Q \mid \exists\, p \in Q' :\ (p, a, q) \in \delta\}$.

Achtung:

- Leider gibt es exponentiell viele Teilmengen von Q :-(
- Um nur nützliche Teilmengen zu betrachten, starten wir mit der Menge $Q_{\mathcal{P}} = \{I\}$ und fügen weitere Zustände nur nach Bedarf hinzu ...
- d.h., wenn wir sie von einem Zustand in $Q_{\mathcal{P}}$ aus erreichen können :-)
- Trotz dieser Optimierung kann der Ergebnisautomat riesig sein :-((

  ... was aber in der Praxis (so gut wie) nie auftritt :-))

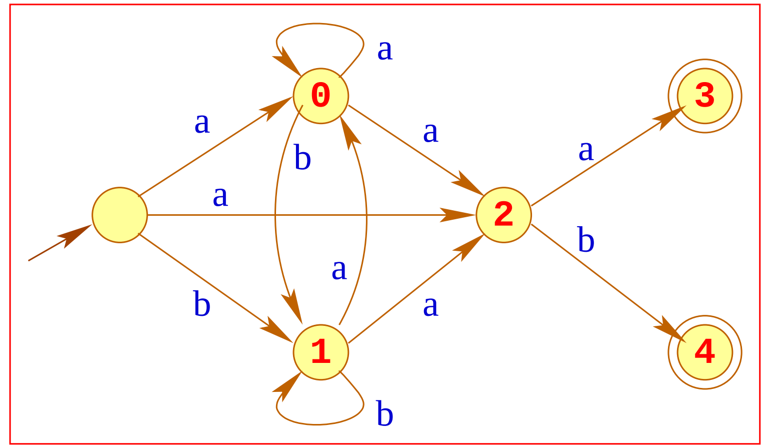
Achtung:

- Leider gibt es exponentiell viele Teilmengen von Q :-(
- Um nur nützliche Teilmengen zu betrachten, starten wir mit der Menge $Q_{\mathcal{P}} = \{I\}$ und fügen weitere Zustände nur nach Bedarf hinzu ...
- d.h., wenn wir sie von einem Zustand in $Q_{\mathcal{P}}$ aus erreichen können :-)
- Trotz dieser Optimierung kann der Ergebnisautomat riesig sein :-((

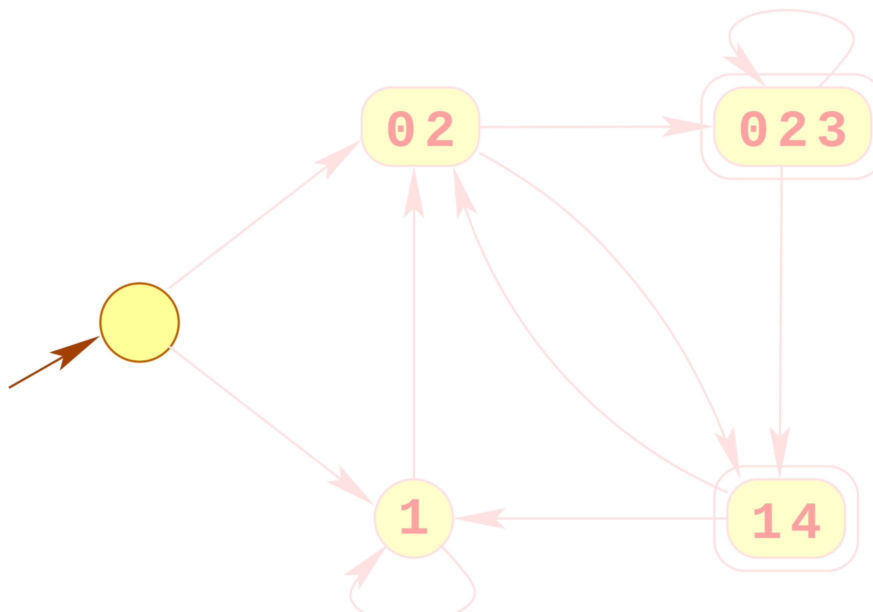
  ... was aber in der Praxis (so gut wie) nie auftritt :-))

- In Tools wie `grep` wird deshalb zu der DFA zu einem regulären Ausdruck nicht aufgebaut !!!
- Stattdessen werden während der Abbarbeitung der Eingabe genau die Mengen konstruiert, die für die Eingabe notwendig sind ...

... im Beispiel:

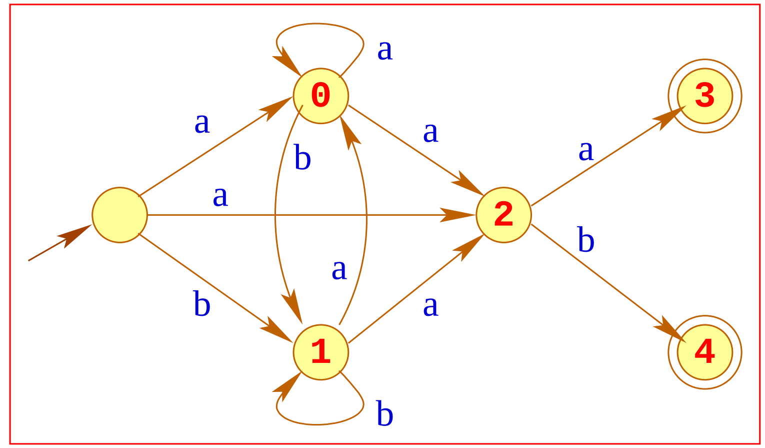


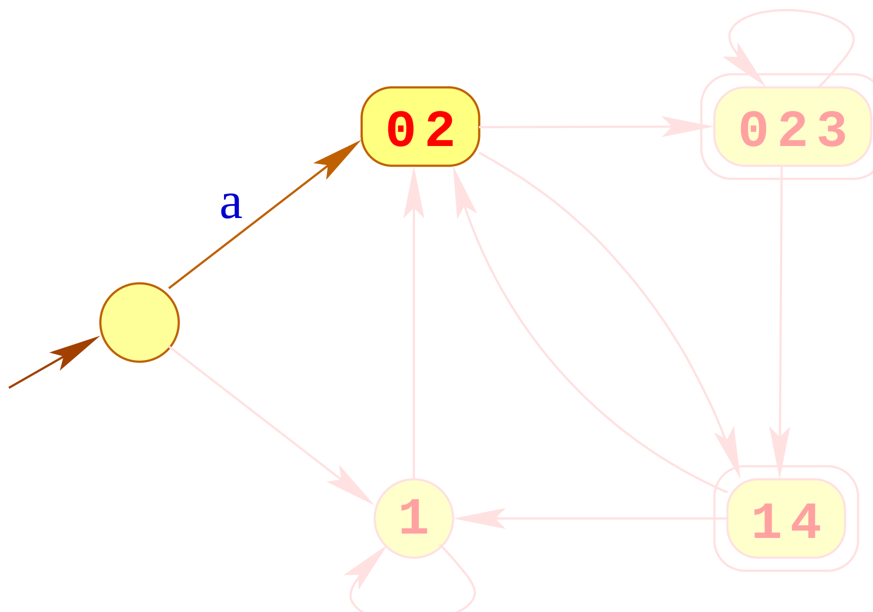
a	b	a	b



... im Beispiel:

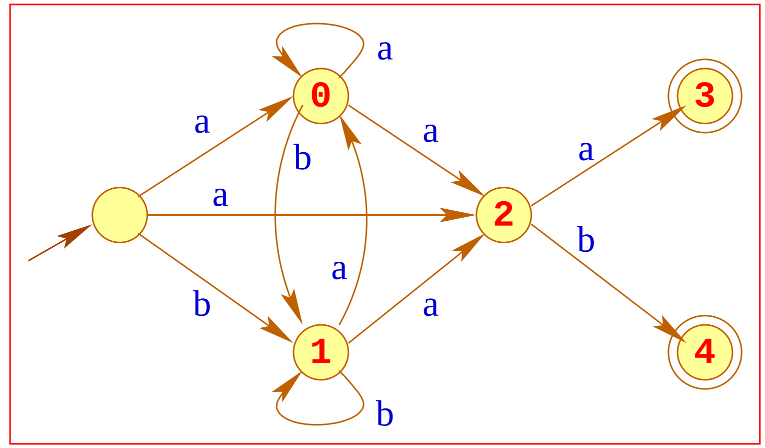
a	b	a	b

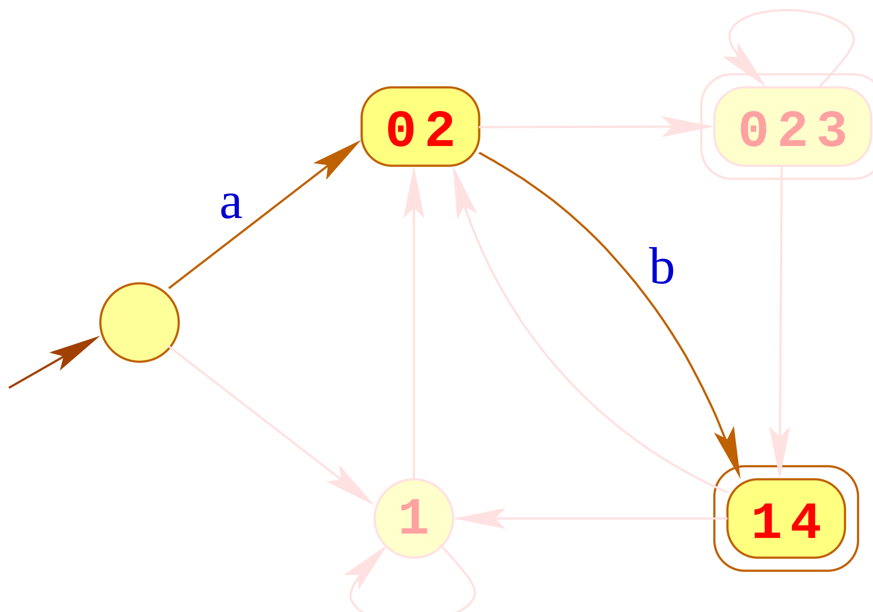




... im Beispiel:

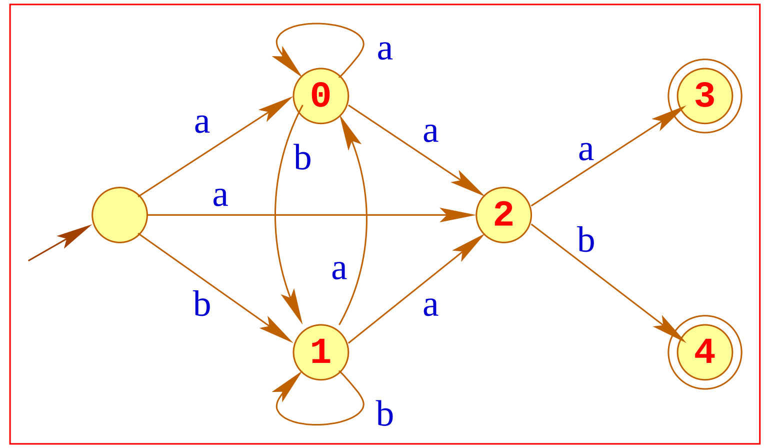
a	b	a	b

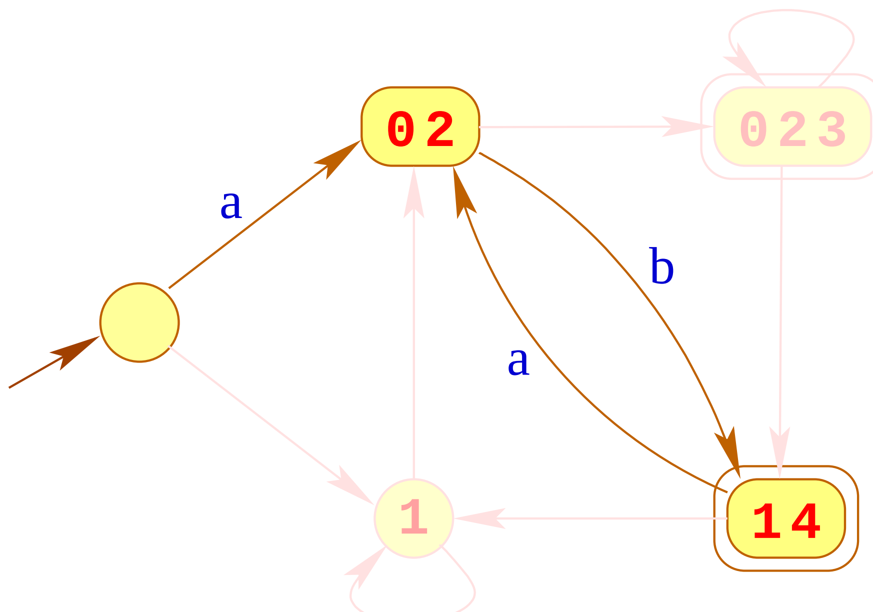




... im Beispiel:

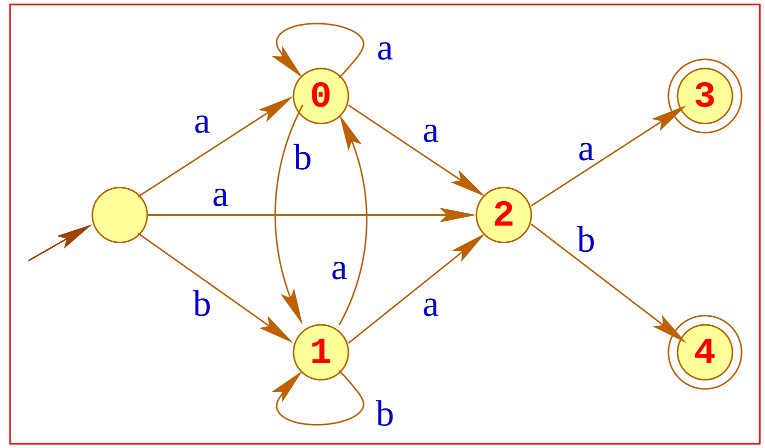
a	b	a	b

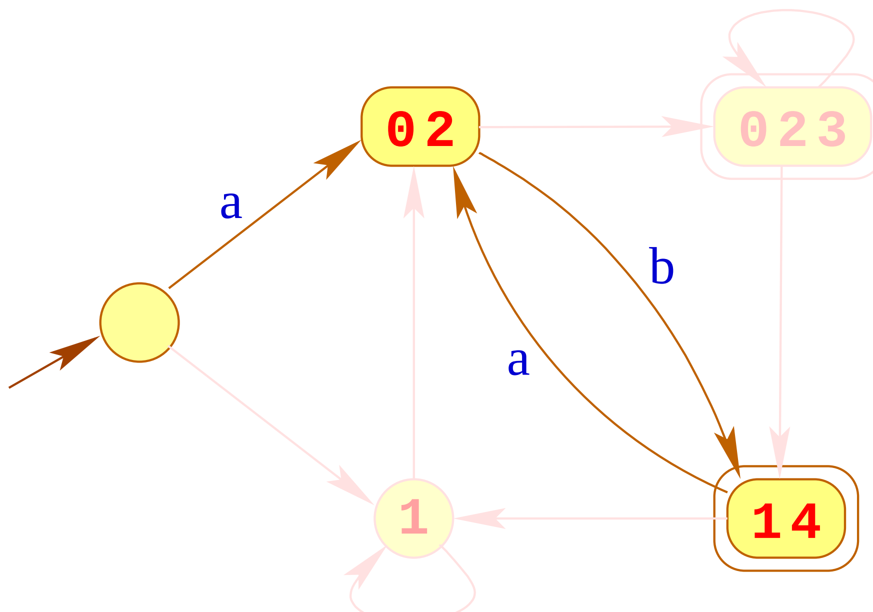




... im Beispiel:

a	b	a	b





Bemerkungen:

- Bei einem Eingabewort der Länge n werden maximal $\mathcal{O}(n)$ Mengen konstruiert :-)
- Ist eine Menge bzw. eine Kante des DFA einmal konstuiert, heben wir sie in einer Hash-Tabelle auf.
- Bevor wir einen neuen Übergang konstruieren, sehen wir erst nach, ob wir diesen nicht schon haben :-)

Bemerkungen:

- Bei einem Eingabewort der Länge n werden maximal $\mathcal{O}(n)$ Mengen konstruiert :-)
- Ist eine Menge bzw. eine Kante des DFA einmal konstuiert, heben wir sie in einer Hash-Tabelle auf.
- Bevor wir einen neuen Übergang konstruieren, sehen wir erst nach, ob wir diesen nicht schon haben :-)

Zusammen fassend finden wir:

Satz

Zu jedem regulären Ausdruck e kann ein deterministischer Automat $A = \mathcal{P}(A_e)$ konstruiert werden mit

$$\mathcal{L}(A) = [\![e]\!]$$

1.3 Design eines Scanners

Eingabe (vereinfacht): eine Menge von Regeln:

$$
\begin{array}{ll}
e_1 & \{\ \texttt{action}_1\ \} \\
e_2 & \{\ \texttt{action}_2\ \} \\
\quad\dots & \\
e_k & \{\ \texttt{action}_k\ \}
\end{array}
$$

1.3 Design eines Scanners

Eingabe (vereinfacht): eine Menge von Regeln:

$$\begin{array}{ll} e_1 & \{\ \texttt{action}_1\ \} \\ e_2 & \{\ \texttt{action}_2\ \} \\ & \dots \\ e_k & \{\ \texttt{action}_k\ \} \end{array}$$

Ausgabe: ein Programm, das

... von der Eingabe ein maximales Präfix w liest, das $e_1 \mid \ldots \mid e_k$ erfüllt;

... das minimale i ermittelt, so dass $w \in [\![e_i]\!]$;

... für w $\texttt{action}_i$ ausführt.

Implementierung:

Idee:

- Konstruiere den DFA $\mathcal{P}(A_e) = (Q, \Sigma, \delta, \{q_0\}, F)$ zu dem Ausdruck $e = (e_1 \mid \ldots \mid e_k)$;
- Definiere die Mengen:

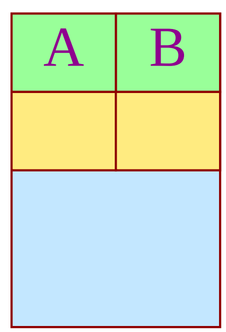
$$\begin{array}{lll} F_1 & = & \{q \in F \mid q \cap \mathsf{last}[e_1] \neq \emptyset\} \\ F_2 & = & \{q \in (F \backslash F_1) \mid q \cap \mathsf{last}[e_2] \neq \emptyset\} \\ & \ldots & \\ F_k & = & \{q \in (F \backslash (F_1 \cup \ldots \cup F_{k-1})) \mid q \cap \mathsf{last}[e_k] \neq \emptyset\} \end{array}$$

- Für Eingabe w gilt: $\delta^*(q_0, w) \in F_i$ genau dann wenn der Scanner für w $\texttt{action}_i$ ausführen soll :-)

Idee (Fortsetzung):

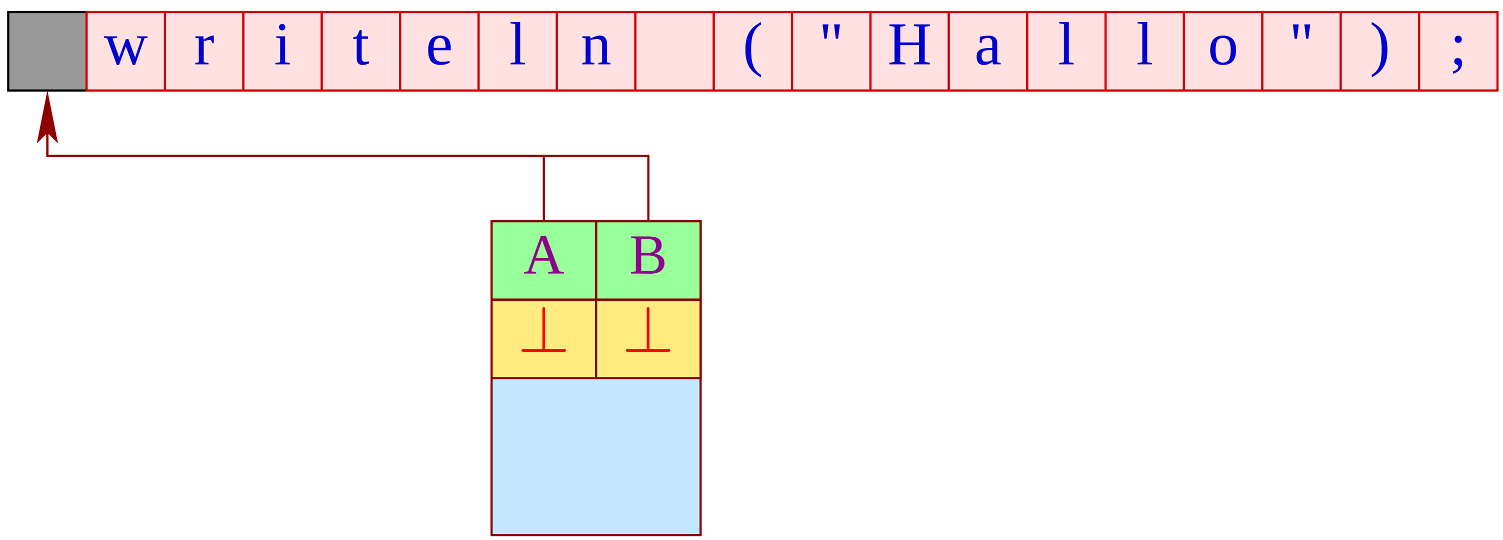
- Der Scanner verwaltet zwei Zeiger $\langle A, B\rangle$ und die zugehörigen Zustände $\langle q_A, q_B\rangle$...
- Der Zeiger A merkt sich die letzte Position in der Eingabe, nach der ein Zustand $q_A \in F$ erreicht wurde;
- Der Zeiger B verfolgt die aktuelle Position.

s	t	d	o	u	t	.	w	r	i	t	e	l	n		(	"	H	a	l	l	o	"	)	;



Idee (Fortsetzung):

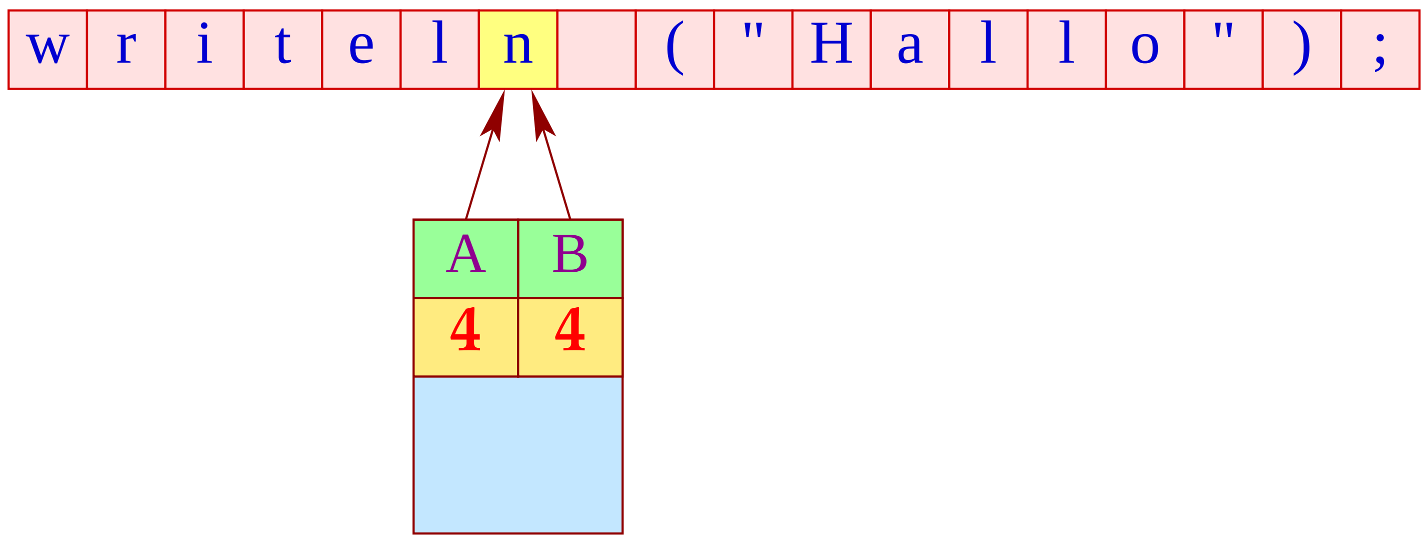
- Der Scanner verwaltet zwei Zeiger $\langle A, B \rangle$ und die zugehörigen Zustände $\langle q_A, q_B \rangle$...
- Der Zeiger A merkt sich die letzte Position in der Eingabe, nach der ein Zustand $q_A \in F$ erreicht wurde;
- Der Zeiger B verfolgt die aktuelle Position.



Idee (Fortsetzung):

- Ist der aktuelle Zustand $q_B = \emptyset$, geben wir Eingabe bis zur Postion A aus und setzen:

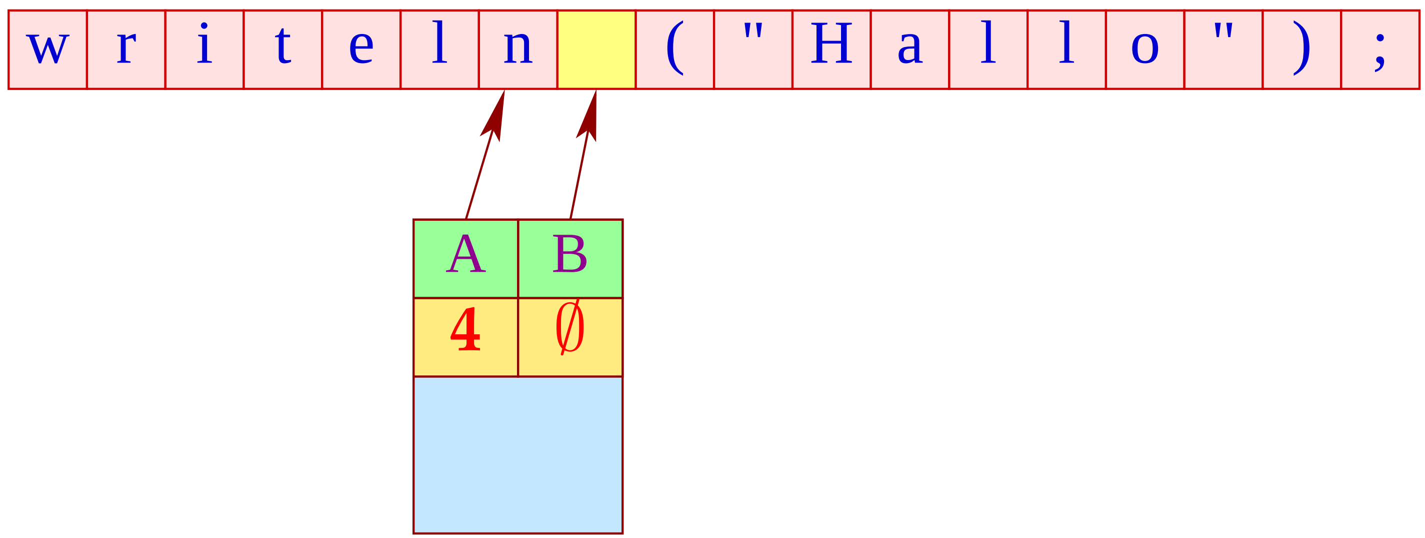
$$\begin{array}{llllll} B & := & A; & A & := & \perp; \\ q_B & := & q_0; & q_A & := & \perp \end{array}$$



Idee (Fortsetzung):

- Ist der aktuelle Zustand $q_B = \emptyset$, geben wir Eingabe bis zur Postion A aus und setzen:

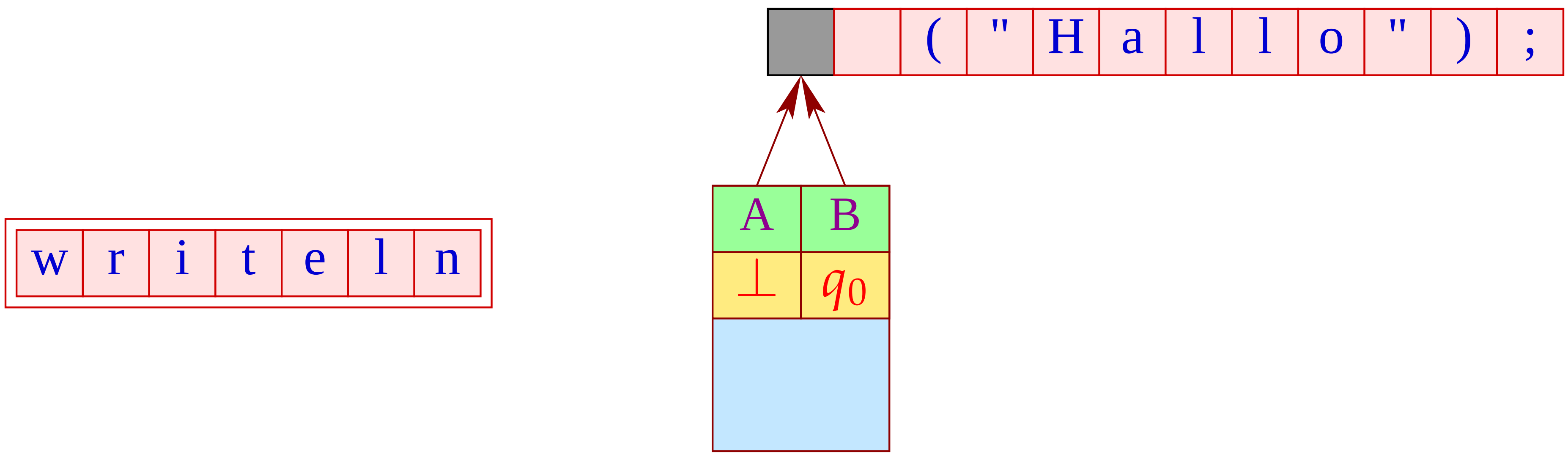
$$\begin{array}{llllll} B & := & A; & A & := & \perp; \\ q_B & := & q_0; & q_A & := & \perp \end{array}$$



Idee (Fortsetzung):

- Ist der aktuelle Zustand $q_B = \emptyset$, geben wir Eingabe bis zur Postion A aus und setzen:

$$\begin{array}{llllll} B & := & A; & A & := & \perp; \\ q_B & := & q_0; & q_A & := & \perp \end{array}$$



Erweiterung: Zustände

- Gelegentlich ist es nützlich, unterschiedliche Scanner-Zustände zu unterscheiden.
- In unterschiedlichen Zuständen sollen verschiedene Tokenklassen erkannt werden können.
- In Abhängigkeit der gelesenen Tokens kann der Scanner-Zustand geändert werden ;-)

Beispiel: Kommentare

Innerhalb eines Kommentars werden Identifier, Konstanten, Kommentare, ... nicht erkannt ;-)

Eingabe (verallgemeinert):

eine Menge von Regeln:

$$
\begin{array}{llll}
\langle\texttt{state}\rangle & \{ & e_1 & \{\,\texttt{action}_1 \quad \texttt{yybegin}(\texttt{state}_1);\,\} \\
 & & e_2 & \{\,\texttt{action}_2 \quad \texttt{yybegin}(\texttt{state}_2);\,\} \\
 & & \quad\ldots & \\
 & & e_k & \{\,\texttt{action}_k \quad \texttt{yybegin}(\texttt{state}_k);\,\} \\
 & \} & &
\end{array}
$$

- Der Aufruf `yybegin (state`$_i$`);` setzt den Zustand auf `state`$_i$.
- Der Startzustand ist (z.B. bei JFlex) `YYINITIAL`.

... im Beispiel:

$$
\begin{array}{llll}
\langle\texttt{YYINITIAL}\rangle & & "/*" & \{\,\texttt{yybegin}(\texttt{COMMENT});\,\} \\
\langle\texttt{COMMENT}\rangle & \{ & "*/" & \{\,\texttt{yybegin}(\texttt{YYINITIAL});\,\} \\
 & & .\ |\ \backslash\texttt{n} & \{\quad\} \\
 & \} & &
\end{array}
$$

Bemerkungen:

- “`.`” matcht alle Zeichen ungleich “`\n`”.
- Für jeden Zustand generieren wir den entsprechenden Scanner.
- Die Methode `yybegin (STATE);` schaltet zwischen den verschiedenen Scannern um.
- Kommentare könnte man auch direkt mithilfe einer geeigneten Token-Klasse implementieren. Deren Beschreibung ist aber ungleich komplizierter :-)
- Scanner-Zustände sind insbesondere nützlich bei der Implementierung von Präprozessoren, die in einen Text eingestreute Spezifikationen expandieren sollen.

1.4 Implementierung von DFAs

Aufgaben:

- Implementiere die Übergangsfunktion $\delta : Q \times \Sigma \to Q$
- Implementiere eine Klassifizierung $r : Q \to \mathbb{N}$

1.4 Implementierung von DFAs

Aufgaben:

- Implementiere die Übergangsfunktion $\delta : Q \times \Sigma \to Q$
- Implementiere eine Klassifizierung $r : Q \to \mathbb{N}$

Probleme:

- Die Anzahl der Zustände kann sehr groß sein :-(
- Das Alphabet kann sehr groß sein: z.B. Unicode :-((

Reduzierung der Anzahl der Zustände

Idee: Minimierung

- Identifiziere Zustände, die sich im Hinblick auf eine Klassifizierung r gleich verhalten :-)
- Sei $A = (Q, \Sigma, \delta, \{q_0\}, r)$ ein DFA mit Klassifizierung. Wir definieren auf den Zuständen eine Äquivalenzrelation durch:

$$p \equiv_r q \quad \text{gdw.} \quad \forall\, w \in \Sigma^* \;:\; r(\delta(p, w)) = r(\delta(q, w))$$

- Die neuen Zustände sind Äquivalenzklassen der alten Zustände :-)

Zustände	$[q]_r, q \in Q$
Anfangszustand	$[q_0]_r$
Klassifizierung	$r([q]_r) = r(q)$
Übergangsfunktion	$\delta([p]_r, a) = [\delta(p, a)]_r$

Problem: Wie berechnet man $\equiv_r$?

Idee:

- Wir nehmen an, maximal viel sei äquivalent :-)

  Wir starten mit der Partition:

$$\overline{Q} = \{r^{-1}(i) \neq \emptyset \mid i \in \mathbb{N}\}$$

- Finden wir in $\bar{q} \in \overline{Q}$ Zustände p_1, p_2 sodass $\delta(p_1, a)$ und $\delta(p_2, a)$ in verschiedenen Äquivalenzklassen liegen (für irgend ein a), müssen wir $\bar{q}$ aufteilen ...