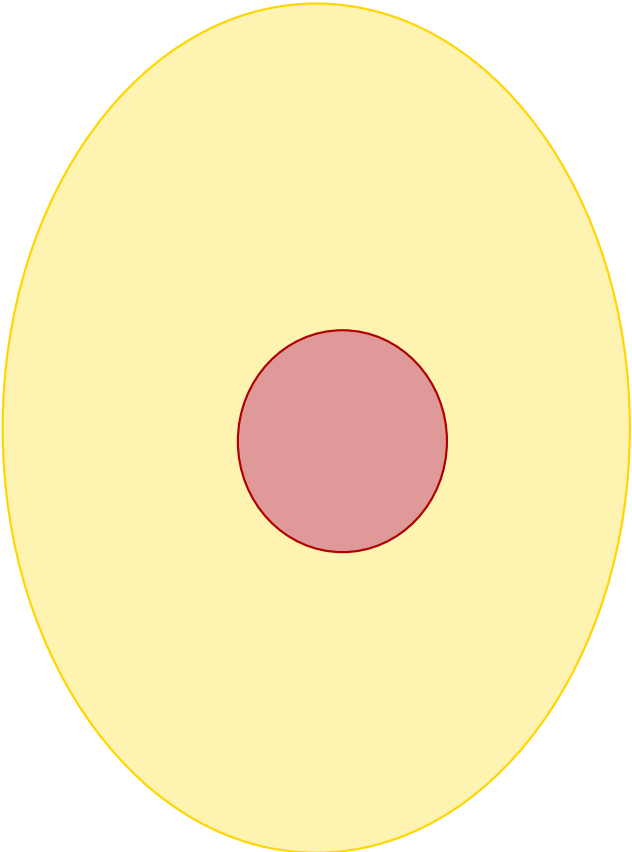
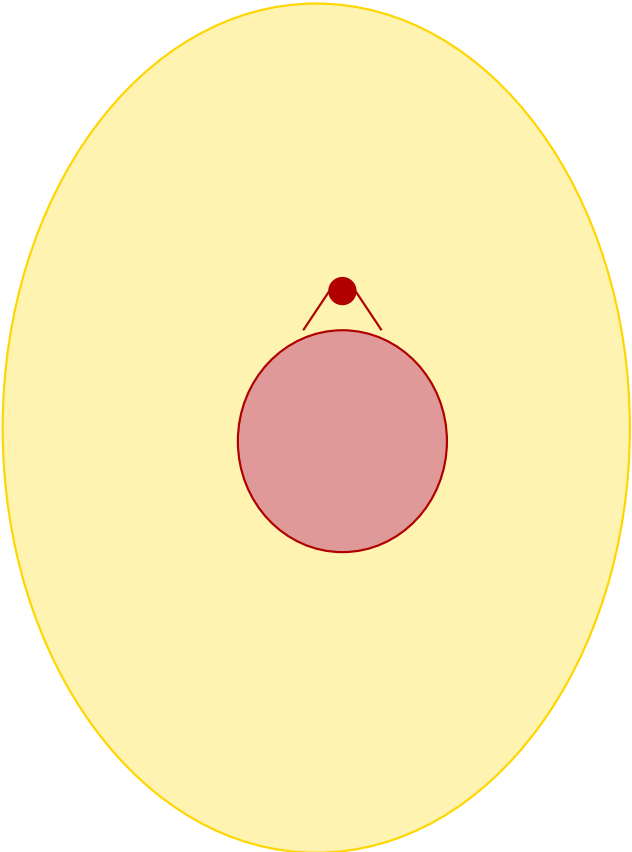
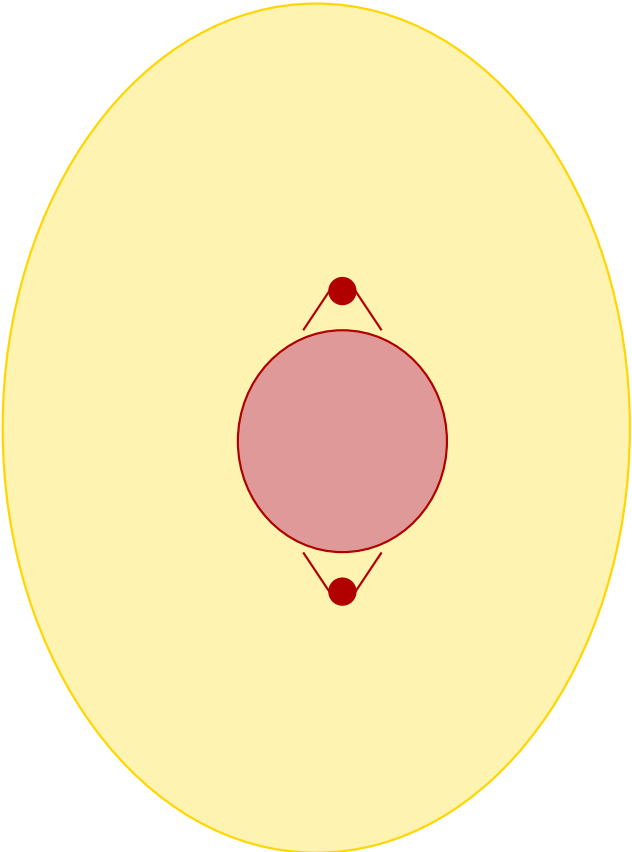






Wir suchen Lösungen für Ungleichungssysteme der Form:

$$x_i \quad \sqsupseteq \quad f_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (*)$$

Wir suchen Lösungen für Ungleichungssysteme der Form:

$$x_i \quad \sqsupseteq \quad f_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad\qquad (*)$$

wobei:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_i$ | Unbekannte | hier: | $\mathsf{First}_k(A)$ |
| $\mathbb{D}$ | Werte | hier: | $\mathbb{D}_k = 2^{T^{\leq k}}$ |
| $\sqsubseteq \;\subseteq\; \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ | Ordnungsrelation | hier: | $\subseteq$ |
| $f_i \colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$ | Bedingung | hier: | ... |

Wir suchen Lösungen für Ungleichungssysteme der Form:

$$x_i \quad \sqsupseteq \quad f_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad\qquad (*)$$

wobei:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_i$ | Unbekannte | hier: | $\mathsf{First}_k(A)$ |
| $\mathbb{D}$ | Werte | hier: | $\mathbb{D}_k = 2^{T^{\leq k}}$ |
| $\sqsubseteq \;\subseteq\; \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ | Ordnungsrelation | hier: | $\subseteq$ |
| $f_i\colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$ | Bedingung | hier: | ... |

Ungleichung für $\mathsf{First}_k(A)$ :

$$\mathsf{First}_k(A) \quad \supseteq \quad \bigcup\{\mathsf{First}_k(X_1) \odot \ldots \odot \mathsf{First}_k(X_m) \mid A \to X_1 \ldots X_m \;\in\; P\}$$

Wir suchen Lösungen für Ungleichungssysteme der Form:

$$x_i \quad \sqsupseteq \quad f_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad\qquad (*)$$

wobei:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_i$ | Unbekannte | hier: | $\mathsf{First}_k(A)$ |
| $\mathbb{D}$ | Werte | hier: | $\mathbb{D}_k = 2^{T^{\leq k}}$ |
| $\sqsubseteq \;\subseteq\; \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ | Ordnungsrelation | hier: | $\subseteq$ |
| $f_i\colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$ | Bedingung | hier: | ... |

Ungleichung für $\mathsf{First}_k(A)$ :

$$\mathsf{First}_k(A) \quad \supseteq \quad \bigcup\{\mathsf{First}_k(X_1) \odot \ldots \odot \mathsf{First}_k(X_m) \mid A \to X_1 \ldots X_m \;\in\; P\}$$

## Denn:

$$x \sqsupseteq d_1 \wedge \ldots \wedge x \sqsupseteq d_k \quad \text{gdw.} \quad x \sqsupseteq \bigsqcup\{d_1, \ldots, d_k\} \qquad \text{:-)}$$

Eine Abbildung $f : \mathbb{D}_1 \to \mathbb{D}_2$ heißt monoton, falls $f(a) \sqsubseteq f(b)$ für alle $a \sqsubseteq b$.

Eine Abbildung $f : \mathbb{D}_1 \to \mathbb{D}_2$ heißt monoton, falls $f(a) \sqsubseteq f(b)$ für alle $a \sqsubseteq b$.

## Beispiele:

(1) $\mathbb{D}_1 = \mathbb{D}_2 = 2^U$ für eine Menge $U$ und $f\,x = (x \cap a) \cup b$.

Offensichtlich ist jedes solche $f$ monoton :-)

Eine Abbildung $f : \mathbb{D}_1 \to \mathbb{D}_2$ heißt monoton, falls $f(a) \sqsubseteq f(b)$ für alle $a \sqsubseteq b$.

## Beispiele:

(1) $\mathbb{D}_1 = \mathbb{D}_2 = 2^U$ für eine Menge $U$ und $f\,x = (x \cap a) \cup b$.

Offensichtlich ist jedes solche $f$ monoton :-)

(2) $\mathbb{D}_1 = \mathbb{D}_2 = \mathbb{Z}$ (mit der Ordnung "$\leq$"). Dann gilt:

- $\mathsf{inc}\,x = x + 1$ ist monoton.
- $\mathsf{dec}\,x = x - 1$ ist monoton.

Eine Abbildung $f : \mathbb{D}_1 \to \mathbb{D}_2$ heißt monoton, falls $f(a) \sqsubseteq f(b)$ für alle $a \sqsubseteq b$.

## Beispiele:

(1) $\mathbb{D}_1 = \mathbb{D}_2 = 2^U$ für eine Menge $U$ und $f\,x = (x \cap a) \cup b$.

Offensichtlich ist jedes solche $f$ monoton :-)

(2) $\mathbb{D}_1 = \mathbb{D}_2 = \mathbb{Z}$ (mit der Ordnung "$\leq$"). Dann gilt:

- $\mathsf{inc}\,x = x + 1$ ist monoton.
- $\mathsf{dec}\,x = x - 1$ ist monoton.
- $\mathsf{inv}\,x = -x$ ist nicht monoton :-)

**Gesucht:** möglichst kleine Lösung für:

$$x_i \sqsupseteq f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n \qquad (*)$$

wobei alle $f_i : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$ monoton sind.

## Gesucht:

möglichst kleine Lösung für:

$$x_i \sqsupseteq f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n \qquad (*)$$

wobei alle $f_i : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$ monoton sind.

## Idee:

- Betrachte $F : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ mit

$$F(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \quad \text{wobei} \quad y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n).$$

**Gesucht:** möglichst kleine Lösung für:

$$x_i \sqsupseteq f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n \qquad (*)$$

wobei alle $f_i : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$ monoton sind.

**Idee:**

- Betrachte $F : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ mit

  $$F(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \quad \text{wobei} \quad y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n).$$

- Sind alle $f_i$ monoton, dann auch $F$ :-)

**Gesucht:** möglichst kleine Lösung für:

$$x_i \sqsupseteq f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n \qquad (*)$$

wobei alle $f_i : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$ monoton sind.

**Idee:**

- Betrachte $F : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ mit

  $$F(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \quad \text{wobei} \quad y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n).$$

- Sind alle $f_i$ monoton, dann auch $F$ :-)
- Wir approximieren sukzessive eine Lösung. Wir konstruieren:

  $$\underline{\bot}, \quad F\,\underline{\bot}, \quad F^2\,\underline{\bot}, \quad F^3\,\underline{\bot}, \quad \ldots$$

**Hoffnung:** Wir erreichen irgendwann eine Lösung ... ???

**Beispiel:** $\mathbb{D} = 2^{\{a,b,c\}}, \quad \sqsubseteq \; = \; \subseteq$

$$
\begin{aligned}
x_1 &\supseteq \{a\} \cup x_3 \\
x_2 &\supseteq x_3 \cap \{a, b\} \\
x_3 &\supseteq x_1 \cup \{c\}
\end{aligned}
$$

## Beispiel:

$$\mathbb{D} = 2^{\{a,b,c\}}, \quad \sqsubseteq \; = \; \subseteq$$

$$\begin{array}{lll} x_1 & \supseteq & \{a\} \cup x_3 \\ x_2 & \supseteq & x_3 \cap \{a, b\} \\ x_3 & \supseteq & x_1 \cup \{c\} \end{array}$$

Die Iteration:

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $\emptyset$ | | | | |
| $x_2$ | $\emptyset$ | | | | |
| $x_3$ | $\emptyset$ | | | | |

## Beispiel:

$$\mathbb{D} = 2^{\{a,b,c\}}, \quad \sqsubseteq \; = \; \subseteq$$

$$\begin{array}{lll} x_1 & \supseteq & \{a\} \cup x_3 \\ x_2 & \supseteq & x_3 \cap \{a, b\} \\ x_3 & \supseteq & x_1 \cup \{c\} \end{array}$$

Die Iteration:

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $\emptyset$ | $\{a\}$ | | | |
| $x_2$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | | | |
| $x_3$ | $\emptyset$ | $\{c\}$ | | | |

## Beispiel:

$$\mathbb{D} = 2^{\{a,b,c\}}, \quad \sqsubseteq \; = \; \subseteq$$

$$\begin{array}{lll} x_1 & \supseteq & \{a\} \cup x_3 \\ x_2 & \supseteq & x_3 \cap \{a, b\} \\ x_3 & \supseteq & x_1 \cup \{c\} \end{array}$$

Die Iteration:

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $\emptyset$ | $\{a\}$ | $\{a, c\}$ | | |
| $x_2$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | | |
| $x_3$ | $\emptyset$ | $\{c\}$ | $\{a, c\}$ | | |

## Beispiel:

$$\mathbb{D} = 2^{\{a,b,c\}}, \quad \sqsubseteq \; = \; \subseteq$$

$$\begin{array}{lll} x_1 & \supseteq & \{a\} \cup x_3 \\ x_2 & \supseteq & x_3 \cap \{a, b\} \\ x_3 & \supseteq & x_1 \cup \{c\} \end{array}$$

Die Iteration:

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $\emptyset$ | $\{a\}$ | $\{a, c\}$ | $\{a, c\}$ | |
| $x_2$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\{a\}$ | |
| $x_3$ | $\emptyset$ | $\{c\}$ | $\{a, c\}$ | $\{a, c\}$ | |

## Beispiel:

$$\mathbb{D} = 2^{\{a,b,c\}}, \quad \sqsubseteq \; = \; \subseteq$$

$$\begin{array}{lll} x_1 & \supseteq & \{a\} \cup x_3 \\ x_2 & \supseteq & x_3 \cap \{a, b\} \\ x_3 & \supseteq & x_1 \cup \{c\} \end{array}$$

Die Iteration:

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $\emptyset$ | $\{a\}$ | $\{a, c\}$ | $\{a, c\}$ | dito |
| $x_2$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\{a\}$ | |
| $x_3$ | $\emptyset$ | $\{c\}$ | $\{a, c\}$ | $\{a, c\}$ | |

## Offenbar gilt:

- Gilt $F^k \underline{\perp} = F^{k+1} \underline{\perp}$, ist eine Lösung gefunden :-)
- $\underline{\perp}, F \underline{\perp}, F^2 \underline{\perp}, \ldots$ bilden eine aufsteigende Kette :

$$\underline{\perp} \quad \sqsubseteq \quad F \underline{\perp} \quad \sqsubseteq \quad F^2 \underline{\perp} \quad \sqsubseteq \quad \ldots$$

- Sind alle aufsteigenden Ketten endlich, gibt es $k$ immer.

## Offenbar gilt:

- Gilt $F^k \underline{\perp} = F^{k+1} \underline{\perp}$, ist eine Lösung gefunden :-)
- $\underline{\perp}, F \underline{\perp}, F^2 \underline{\perp}, \ldots$ bilden eine aufsteigende Kette :

$$\underline{\perp} \quad \sqsubseteq \quad F \underline{\perp} \quad \sqsubseteq \quad F^2 \underline{\perp} \quad \sqsubseteq \quad \ldots$$

- Sind alle aufsteigenden Ketten endlich, gibt es $k$ immer.

Die zweite Aussage folgt mit vollständiger Induktion:

## Offenbar gilt:

- Gilt $F^k \underline{\perp} = F^{k+1} \underline{\perp}$, ist eine Lösung gefunden :-)
- $\underline{\perp}, F \underline{\perp}, F^2 \underline{\perp}, \ldots$ bilden eine aufsteigende Kette :

$$\underline{\perp} \quad \sqsubseteq \quad F \underline{\perp} \quad \sqsubseteq \quad F^2 \underline{\perp} \quad \sqsubseteq \quad \ldots$$

- Sind alle aufsteigenden Ketten endlich, gibt es $k$ immer.

Die zweite Aussage folgt mit vollständiger Induktion:

**Anfang:** $F^0 \underline{\perp} = \underline{\perp} \sqsubseteq F^1 \underline{\perp}$ :-)

## Offenbar gilt:

- Gilt $F^k \underline{\perp} = F^{k+1} \underline{\perp}$, ist eine Lösung gefunden :-)
- $\underline{\perp}, F \underline{\perp}, F^2 \underline{\perp}, \ldots$ bilden eine aufsteigende Kette :

$$\underline{\perp} \quad \sqsubseteq \quad F \underline{\perp} \quad \sqsubseteq \quad F^2 \underline{\perp} \quad \sqsubseteq \quad \ldots$$

- Sind alle aufsteigenden Ketten endlich, gibt es $k$ immer.

Die zweite Aussage folgt mit vollständiger Induktion:

**Anfang:** $F^0 \underline{\perp} = \underline{\perp} \sqsubseteq F^1 \underline{\perp}$ :-)

**Schluss:** Gelte bereits $F^{i-1} \underline{\perp} \sqsubseteq F^i \underline{\perp}$. Dann

$$F^i \underline{\perp} = F\,(F^{i-1} \underline{\perp}) \sqsubseteq F\,(F^i \underline{\perp}) = F^{i+1} \underline{\perp}$$

da $F$ monoton ist :-)

## Fazit:

Wenn $\mathbb{D}$ endlich ist, finden wir mit Sicherheit eine Lösung :-)

## Fragen:

## Fazit:

Wenn $\mathbb{D}$ endlich ist, finden wir mit Sicherheit eine Lösung :-)

## Fragen:

1. Gibt es eine kleinste Lösung ?

## Fazit:

Wenn $\mathbb{D}$ endlich ist, finden wir mit Sicherheit eine Lösung :-)

## Fragen:

1. Gibt es eine kleinste Lösung ?
2. Wenn ja: findet Iteration die kleinste Lösung ??

## Fazit:

Wenn $\mathbb{D}$ endlich ist, finden wir mit Sicherheit eine Lösung :-)

## Fragen:

1. Gibt es eine kleinste Lösung ?
2. Wenn ja: findet Iteration die kleinste Lösung ??
3. Was, wenn $\mathbb{D}$ nicht endlich ist ???

## Satz — Kleene

In einer vollständigen Halbordnung $\mathbb{D}$ hat jede stetige Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ einen kleinsten Fixpunkt $d_0$.

Dieser ist gegeben durch $d_0 = \bigsqcup_{k \geq 0} f^k \bot$ .

## Satz — Kleene

In einer vollständigen Halbordnung $\mathbb{D}$ hat jede stetige Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ einen kleinsten Fixpunkt $d_0$.

Dieser ist gegeben durch $d_0 = \bigsqcup_{k \geq 0} f^k \bot$ .

## Bemerkung:

- Eine Funktion $f$ heißt stetig, falls für jede aufsteigende Kette $d_0 \sqsubseteq \ldots \sqsubseteq d_m \sqsubseteq \ldots$ gilt: $f\,(\bigsqcup_{m \geq 0} d_m) = \bigsqcup_{m \geq 0} (f\, d_m)$ .
- Werden alle aufsteigenden Ketten irgendwann stabil, ist jede monotone Funktion automatisch stetig :-)

## Satz — Kleene

In einer vollständigen Halbordnung $\mathbb{D}$ hat jede stetige Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ einen kleinsten Fixpunkt $d_0$.

Dieser ist gegeben durch $d_0 = \bigsqcup_{k \geq 0} f^k \bot$ .

## Bemerkung:

- Eine Funktion $f$ heißt stetig, falls für jede aufsteigende Kette $d_0 \sqsubseteq \ldots \sqsubseteq d_m \sqsubseteq \ldots$ gilt: $f\,(\bigsqcup_{m \geq 0} d_m) = \bigsqcup_{m \geq 0} (f\, d_m)$ .
- Werden alle aufsteigenden Ketten irgendwann stabil, ist jede monotone Funktion automatisch stetig :-)
- Eine Halbordnung heißt vollständig (CPO), falls alle aufsteigenden Ketten kleinste obere Schranken haben :-)
- Jeder vollständige Verband ist auch eine vollständige Halbordnung :-)

# Beweis:

(1) $f\,d_0 = d_0$ :

$$\begin{aligned} f\,d_0 &= f\left(\bigsqcup_{m\geq 0}(f^m\bot)\right) \\ &= \bigsqcup_{m\geq 0}(f^{m+1}\bot) \qquad \text{wegen Stetigkeit} \quad \text{:-)} \\ &= \bot \sqcup \left(\bigsqcup_{m\geq 0}(f^{m+1}\bot)\right) \\ &= \bigsqcup_{m\geq 0}(f^m\bot) \\ &= d_0 \end{aligned}$$

(2) $d_0$ ist kleinster Fixpunkt:

Sei $f\,d_1 = d_1$ weiterer Fixpunkt. Wir zeigen: $\forall\, m \geq 0 :\ f^m\bot \sqsubseteq d_1$ .

$m = 0$ :

$$\bot \sqsubseteq d_1 \qquad \text{nach Definition}$$

$m > 0$ : Gelte

$$\begin{aligned} f^{m-1}\bot &\sqsubseteq d_1 \qquad \text{Dann folgt:} \\ f^m\bot &= f\,(f^{m-1}\bot) \\ &\sqsubseteq f\,d_1 \qquad \text{wegen Monotonie} \quad \text{:-)} \\ &= d_1 \end{aligned}$$

## Bemerkung:

- Jede stetige Funktion ist auch monoton :-)
- Betrachte die Menge der Postfixpunkte:

$$P = \{x \in \mathbb{D} \mid x \sqsupseteq f\,x\}$$

Der kleinste Fixpunkt $d_0$ ist in $P$ und untere Schranke :-)

$\Longrightarrow$ $d_0$ ist der kleinste Wert $x$ mit $x \sqsupseteq f\,x$

## Bemerkung:

- Jede stetige Funktion ist auch monoton :-)
- Betrachte die Menge der Postfixpunkte:

$$P = \{x \in \mathbb{D} \mid x \sqsupseteq f\,x\}$$

Der kleinste Fixpunkt $d_0$ ist in $P$ und untere Schranke :-)

$\Longrightarrow$ $d_0$ ist der kleinste Wert $x$ mit $x \sqsupseteq f\,x$

## Anwendung:

Sei $$x_i \sqsupseteq f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n \qquad (*)$$

ein Ungleichungssystem, wobei alle $f_i : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$ monoton sind.

## Bemerkung:

- Jede stetige Funktion ist auch monoton :-)
- Betrachte die Menge der Postfixpunkte:

$$P = \{x \in \mathbb{D} \mid x \sqsupseteq f\,x\}$$

Der kleinste Fixpunkt $d_0$ ist in $P$ und untere Schranke :-)

$\Longrightarrow$ $d_0$ ist der kleinste Wert $x$ mit $x \sqsupseteq f\,x$

## Anwendung:

Sei $$x_i \sqsupseteq f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n \qquad (*)$$

ein Ungleichungssystem, wobei alle $f_i : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$ monoton sind.

$\Longrightarrow$ kleinste Lösung von $(*)$ $==$ kleinster Fixpunkt von $F$ :-)

Der Kleenesche Fixpunkt-Satz liefert uns nicht nur die Existenz einer kleinsten Lösung sondern auch eine Charakterisierung :-)

## Satz

Die Mengen $\mathsf{First}_k(\{w \in T^* \mid A \to^* w\})$ , $A \in N$, sind die kleinste Lösung des Ungleichungssystems:

$$\mathsf{First}_k(A) \quad \supseteq \quad \mathsf{First}_k(X_1) \odot \ldots \odot \mathsf{First}_k(X_m) \ , \quad A \to X_1 \ldots X_m \quad \in \quad P$$

Der Kleenesche Fixpunkt-Satz liefert uns nicht nur die Existenz einer kleinsten Lösung sondern auch eine Charakterisierung :-)

## Satz

Die Mengen $\mathsf{First}_k(\{w \in T^* \mid A \to^* w\})$ , $A \in N$, sind die kleinste Lösung des Ungleichungssystems:

$$\mathsf{First}_k(A) \quad \supseteq \quad \mathsf{First}_k(X_1) \odot \ldots \odot \mathsf{First}_k(X_m) \;, \quad A \to X_1 \ldots X_m \quad \in \quad P$$

## Beweis-Idee:

Sei $\mathsf{F}^{(m)}(A)$ die $m$-te Approximation an den Fixpunkt.

(1) Falls $A \to^m u$ , dann $\mathsf{First}_k(u) \subseteq \mathsf{F}^{(m)}(A)$.

(2) Falls $w \in \mathsf{F}^{(m)}(A)$ , dann $A \to^* u$ für $u \in T^*$ mit $\mathsf{First}_k(u) = \{w\}$ :-)

## Fazit:

Wir können $\mathsf{First}_k$ durch Fixpunkt-Iteration berechnen, d.h. durch wiederholtes Einsetzen :-)

## Fazit:

Wir können $\mathsf{First}_k$ durch Fixpunkt-Iteration berechnen, d.h. durch wiederholtes Einsetzen :-)

## Achtung:

Naive Fixpunkt-Iteration ist ziemlich ineffizient :-(

## Fazit:

Wir können $\mathsf{First}_k$ durch Fixpunkt-Iteration berechnen, d.h. durch wiederholtes Einsetzen :-)

## Achtung: Naive Fixpunkt-Iteration ist ziemlich ineffizient :-(

## Idee: Round Robin Iteration

Benutze bei der Iteration nicht die Werte der letzten Iteration, sondern die jeweils aktuellen :-)

## Unser Mini-Beispiel: $\mathbb{D} = 2^{\{a,b,c\}}, \quad \sqsubseteq \; = \; \subseteq$

$$
\begin{array}{lll}
x_1 & \supseteq & \{a\} \cup x_3 \\
x_2 & \supseteq & x_3 \cap \{a, b\} \\
x_3 & \supseteq & x_1 \cup \{c\}
\end{array}
$$

Die Round-Robin-Iteration:

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $x_1$ | $\{a\}$ | $\{a, c\}$ | dito |
| $x_2$ | $\emptyset$ | $\{a\}$ | |
| $x_3$ | $\{a, c\}$ | $\{a, c\}$ | |

Der Code für Round Robin Iteration sieht in Java so aus:

```
for (i = 1; i ≤ n; i++) x_i = ⊥;
do {
    finished = true;
    for (i = 1; i ≤ n; i++) {
        new = f_i(x_1, ..., x_n);
        if (!(x_i ⊒ new)) {
            finished = false;
            x_i = x_i ⊔ new;
        }
    }
} while (!finished);
```

## Zur Korrektheit:

Sei $y_i^{(d)}$ die $i$-te Komponente von $F^d \underline{\perp}$.

Sei $x_i^{(d)}$ der Wert von $x_i$ nach der $i$-ten RR-Iteration.

# Zur Korrektheit:

Sei $y_i^{(d)}$ die $i$-te Komponente von $F^d\ \underline{\perp}$.

Sei $x_i^{(d)}$ der Wert von $x_i$ nach der $i$-ten RR-Iteration.

Man zeigt:

(1) $y_i^{(d)} \sqsubseteq x_i^{(d)}$ :-)

# Zur Korrektheit:

Sei $y_i^{(d)}$ die $i$-te Komponente von $F^d\ \underline{\perp}$.

Sei $x_i^{(d)}$ der Wert von $x_i$ nach der $i$-ten RR-Iteration.

Man zeigt:

(1) $y_i^{(d)} \sqsubseteq x_i^{(d)}$ :-)

(2) $x_i^{(d)} \sqsubseteq z_i$ für jede Lösung $(z_1, \ldots, z_n)$ :-)

# Zur Korrektheit:

Sei $y_i^{(d)}$ die $i$-te Komponente von $F^d\ \underline{\perp}$.

Sei $x_i^{(d)}$ der Wert von $x_i$ nach der $i$-ten RR-Iteration.

Man zeigt:

(1) $y_i^{(d)} \sqsubseteq x_i^{(d)}$ :-)

(2) $x_i^{(d)} \sqsubseteq z_i$ für jede Lösung $(z_1, \ldots, z_n)$ :-)

(3) Terminiert RR-Iteration nach $d$ Runden, ist
$(x_1^{(d)}, \ldots, x_n^{(d)})$ eine Lösung :-))

## Unsere Anwendung:

$$
\begin{array}{lcll}
\mathsf{First}_2(E) & \supseteq & \mathsf{First}_2(E) \odot \{+\} \odot \mathsf{First}_2(T) & \cup \quad \mathsf{First}_2(T) \\
\mathsf{First}_2(T) & \supseteq & \mathsf{First}_2(T) \odot \{*\} \odot \mathsf{First}_2(F) & \cup \quad \mathsf{First}_2(F) \\
\mathsf{First}_2(F) & \supseteq & \{(\} \odot \mathsf{First}_2(E) \odot \{)\} & \cup \quad \{\mathsf{name}, \mathsf{int}\}
\end{array}
$$

## Die RR-Iteration:

| $\mathsf{First}_2$ | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $F$ | name, int | ( name, ( int | ( ( |
| $T$ | name, int | ( name, ( int, name $*$, int $*$ | ( ( |
| $E$ | name, int | ( name, ( int, name $*$, int $*$, name $+$, int $+$ | ( ( |

Der Einfachkeit halber haben wir in jeder Iteration nur die neuen Elemente vermerkt :-)

# Diskussion:

- Die Länge $h$ der längsten echt aufsteigenden Kette nennen wir auch Höhe von $\mathbb{D}$ ...
- Im Falle von $\mathsf{First}_k$ ist die Höhe des Verbands exponentiell in $k$ :-(
- Die Anzahl der Runden von RR-Iteration ist beschränkt durch $\mathcal{O}(n \cdot h)$ ($n$ die Anzahl der Variablen)
- Die praktische Effizienz von RR-Iteration hängt allerdings auch von der Anordnung der Variablen ab :-)
- Anstelle von RR-Iteration gibt es auch schnellere Fixpunkt-Verfahren, die aber im schlimmsten Fall immer noch exponentiell sind :-((

$\Longrightarrow$ Man beschränkt sich i.a. auf kleine $k$ !!!

## 2.4 Topdown Parsing

### Idee:

- Benutze den Item-Kellerautomaten.
- Benutze die nächsten $k$ Zeichen, um die Regeln für die Expansionen zu bestimmen ;-)
- Eine Grammatik heißt $LL(k)$, falls dies immer eindeutig möglich ist.

## 2.4 Topdown Parsing

### Idee:

- Benutze den Item-Kellerautomaten.
- Benutze die nächsten $k$ Zeichen, um die Regeln für die Expansionen zu bestimmen ;-)
- Eine Grammatik heißt $LL(k)$, falls dies immer eindeutig möglich ist.

### Wir definieren:

Eine reduzierte Grammatik heißt dann $LL(k)$, falls für je zwei verschiedene Regeln $A \to \alpha$, $A \to \alpha' \in P$ und jede Ableitung $S \to_L^* u\, A\, \beta$ mit $u \in T^*$ gilt:

$$\mathsf{First}_k(\alpha\,\beta) \cap \mathsf{First}_k(\alpha'\,\beta) = \emptyset$$

## Beispiel 1:

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & \mathsf{if}\ (\ E\ )\ S\ \mathsf{else}\ S \quad | \\
 & & \mathsf{while}\ (\ E\ )\ S \quad | \\
 & & E\ ; \\
E & \rightarrow & \mathsf{id}
\end{array}
$$

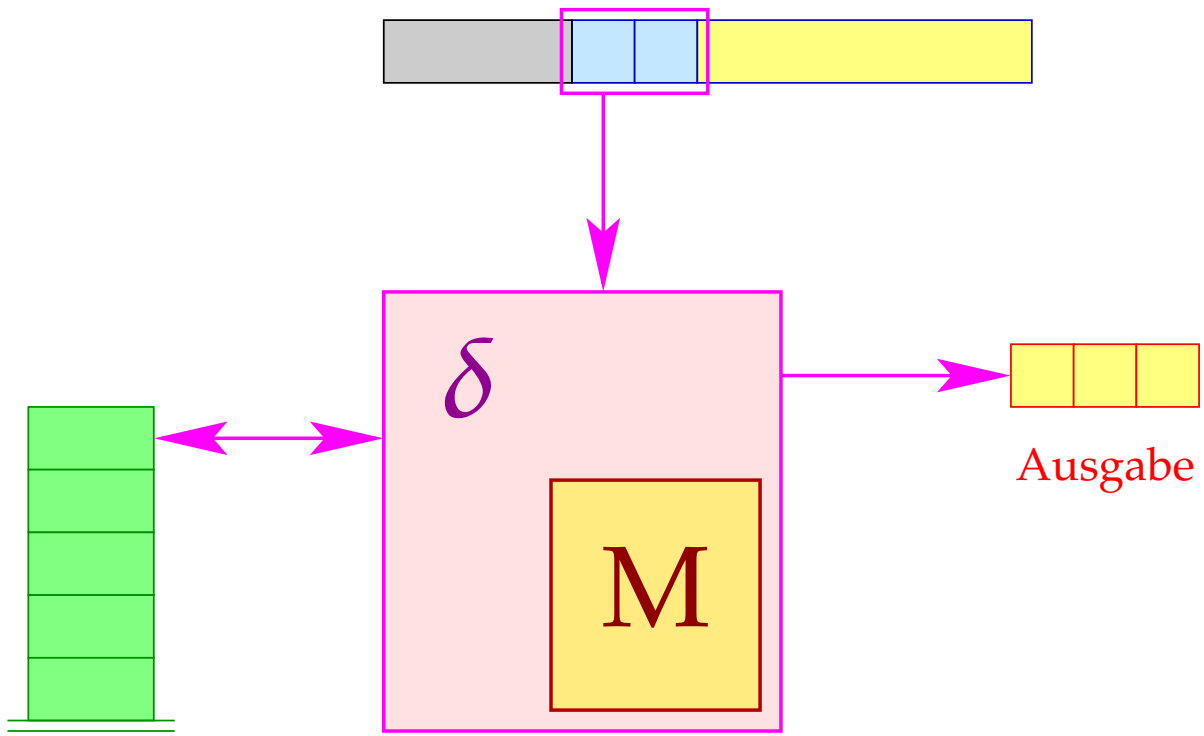
ist $LL(1)$, da $\quad \mathsf{First}_k(E) = \{\mathsf{id}\}$ :-)

## Beispiel 2:

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & \text{if} \ ( \ E \ ) \ S \ \text{else} \ S \quad | \\
 & & \text{if} \ ( \ E \ ) \ S \quad | \\
 & & \text{while} \ ( \ E \ ) \ S \quad | \\
 & & E \ ; \\
E & \rightarrow & \text{id}
\end{array}
$$

... ist nicht $LL(k)$ für jedes $k > 0$.

# Struktur des $LL(k)$-Parsers:




- Der Parser sieht ein Fenster der Länge $k$ der Eingabe;
- er realisiert im Wesentlichen den Item-Kellerautomaten;
- die Tabelle $M[q, w]$ enthält die jeweils zuwählende Regel :-)

## ... im Beispiel:

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & \text{if}\ (\ E\ )\ S\ \text{else}\ S^{\,0} \quad | \\
 & & \text{while}\ (\ E\ )\ S^{\,1} \quad | \\
 & & E\ ;^{\,2} \\
E & \rightarrow & \text{id}^{\,0}
\end{array}
$$

**Zustände:** Items

**Tabelle:**

| | if | while | id |
|---|---|---|---|
| $[\ldots \rightarrow \ldots \bullet S \ldots]$ | 0 | 1 | 2 |
| $[\ldots \rightarrow \ldots \bullet E \ldots]$ | – | – | 0 |

# Im Allgemeinen ...

- ist die Menge der möglichen nächsten $k$ Zeichen gegeben durch:

$$\mathsf{First}_k(\alpha\,\beta) \;=\; \mathsf{First}_k(\alpha) \odot \mathsf{First}_k(\beta)$$

  wobei:

  (1) $\alpha$ die rechte Seite der passenden Regel;

  (2) $\beta$ ein möglicher rechter Kontext von $A$ ist :-)

- $\mathsf{First}_k(\beta)$ müssen wir dynamisch akkumulieren.

$\Longrightarrow$ Wir erweitern Items um Vorausschau-Mengen ...

Ein erweitertes Item ist ein Paar: $[A \to \alpha \bullet \gamma\,,\ L]$ $(A \to \alpha\,\gamma \in P,\ L \subseteq T^{\leq k})$

Die Menge $L$ benutzen wir, um $\mathsf{First}_k(\beta)$ für den rechten Kontext $\beta$ von $A$ zu repräsentieren :-)

Ein erweitertes Item ist ein Paar: $[A \to \alpha \bullet \gamma\,,\ L]$ $(A \to \alpha\,\gamma \in P,\ L \subseteq T^{\leq k})$

Die Menge $L$ benutzen wir, um $\mathsf{First}_k(\beta)$ für den rechten Kontext $\beta$ von $A$ zu repräsentieren :-)

# Konstruktion:

**Zustände:** erweiterte Items

**Anfangszustand:** $[S' \to \bullet\ S,\ \{\epsilon\}]$

**Endzustand:** $[S' \to S\,\bullet,\ \{\epsilon\}]$

**Übergänge:**

Ein erweitertes Item ist ein Paar: $[A \to \alpha \bullet \gamma\,,\ L]$ $(A \to \alpha\,\gamma \in P,\ L \subseteq T^{\leq k})$

Die Menge $L$ benutzen wir, um $\mathsf{First}_k(\beta)$ für den rechten Kontext $\beta$ von $A$ zu repräsentieren :-)

# Konstruktion:

**Zustände:** erweiterte Items

**Anfangszustand:** $[S' \to \bullet\ S,\ \{\epsilon\}]$

**Endzustand:** $[S' \to S\,\bullet,\ \{\epsilon\}]$

**Übergänge:**

**Expansionen:** $([A \to \alpha \bullet B\,\beta\,,\ L], \epsilon, [A \to \alpha \bullet B\,\beta\,,\ L]\,[B \to \bullet\,\gamma\,,\ \boxed{\mathsf{First}_k(\beta) \odot L}])$

für $A \to \alpha\,B\,\beta,\ B \to \gamma \in P$

**Shifts:** $([A \to \alpha \bullet a\,\beta\,,\ L], a, [A \to \alpha\,a \bullet \beta\,,\ L])$ für $A \to \alpha\,a\,\beta \in P$

**Reduce:** $([A \to \alpha \bullet B\,\beta\,,\ L]\,[B \to \gamma\bullet\,,\ L'], \epsilon, [A \to \alpha\,B \bullet \beta\,,\ L])$ für

$A \to \alpha\,B\,\beta,\ B \to \gamma \in P$