(3) $S \rightarrow a\, A\, c \qquad A \rightarrow b\, b\, A \;\mid\; b$ ... ist nicht $LR(0)$, aber $LR(1)$:

Für $S \rightarrow_R^* \alpha\, X\, w \rightarrow \alpha\, \beta\, w$ mit $\{y\} = \mathsf{First}_k(w)$ ist $\alpha\, \underline{\beta}\, y$ von einer der Formen:

$$a\, b^{2n}\, \underline{b}\, c\ ,\ a\, b^{2n}\, \underline{b\, b\, A}\, c\ ,\ \underline{a\, A\, c}$$

(4) $S \rightarrow a\, A\, c \qquad A \rightarrow b\, A\, b \;\mid\; b$ ... ist nicht $LR(k)$ für jedes $k \geq 0$:

Betrachte einfach die Rechtsableitungen:

$$S \rightarrow_R^* a\, b^n\, A\, b^n\, c \rightarrow a\, b^n\, \underline{b}\, b^n\, c$$

In der Tat gilt:

Satz:

Die reduzierte Grammatik G ist genau dann $LR(0)$ wenn der kanonische $LR(0)$-Automat $LR(G)$ keine ungeeigneten Zustände enthält.

In der Tat gilt:

Satz:

Die reduzierte Grammatik G ist genau dann $LR(0)$ wenn der kanonische $LR(0)$-Automat $LR(G)$ keine ungeeigneten Zustände enthält.

Beweis:

Enthalte G einen ungeeigneten Zustand q.

Fall 1: $[A \to \gamma \bullet], [A' \to \gamma' \bullet] \in q$ mit $A \to \gamma \neq A' \to \gamma'$

Dann gibt es ein zuverlässiges Präfix $\alpha\,\gamma = \alpha'\,\gamma'$ mit

$$S \to_R^* \alpha\, A\, w \to \alpha\, \gamma\, w \quad \wedge \quad S \to_R^* \alpha'\, A'\, x \to \alpha'\, \gamma'\, x$$

$$\Longrightarrow \quad G \text{ ist nicht } LR(0) \quad \text{:-)}$$

Fall 2: $[A \to \gamma \bullet]\,,\; [A' \to \beta \bullet a\, \beta'] \;\in\; q$

Dann gibt es ein zuverlässiges Präfix $\alpha\,\gamma = \alpha'\,\beta$ mit

$$S \to_R^* \alpha\, A\, w \to \alpha\,\gamma\, w \quad \wedge \quad S \to_R^* \alpha'\, A'\, x \to \alpha'\,\beta\, a\, \beta'\, x$$

Ist $\beta' \in T^*$, dann ist G nicht $LR(0)$:-)

Andernfalls $\beta' \to_R^* v_1\, X\, v_2 \to v_1\, u\, v_2$. Damit erhalten wir:

$$S \to_R^* \alpha'\,\beta\, a\, v_1\, X\, v_2\, x \to \alpha'\,\beta\, a\, v_1\, u\, v_2\, x$$

$$\Longrightarrow \qquad G \quad \text{ist nicht } LR(0) \quad \text{:-)}$$

Fall 2: $[A \to \gamma \bullet]$, $[A' \to \beta \bullet a\, \beta'] \in q$

Dann gibt es ein zuverlässiges Präfix $\alpha\,\gamma = \alpha'\,\beta$ mit

$$S \to_R^* \alpha\, A\, w \to \alpha\,\gamma\, w \quad \wedge \quad S \to_R^* \alpha'\, A'\, x \to \alpha'\,\beta\, a\,\beta'\, x$$

Ist $\beta' \in T^*$, dann ist G nicht $LR(0)$:-)

Andernfalls $\beta' \to_R^* v_1\, X\, v_2 \to v_1\, u\, v_2$. Damit erhalten wir:

$$S \to_R^* \alpha'\,\beta\, a\, v_1\, X\, v_2\, x \to \alpha'\,\beta\, a\, v_1\, u\, v_2\, x$$

$\Longrightarrow$ G ist nicht $LR(0)$:-)

Enthalte $LR(G)$ keine ungeeigneten Zustände. Betrachte:

$$S \to_R^* \alpha\, A\, w \to \alpha\,\gamma\, w \qquad\qquad S \to_R^* \alpha'\, A'\, w' \to \alpha'\,\gamma'\, x$$

Sei $\delta(q_0, \alpha\,\gamma) = q$. Insbesondere ist $[A \to \gamma \bullet] \in q$.

Annahme: $(\alpha, A, w') \neq (\alpha', A', x)$.

Fall 1: $w' = x$. Dann muss q $[A' \to \gamma' \bullet]$ enthalten :-)

Fall 2: $w' \neq x$. Weitere Fallunterscheidung :-))

Sei $k > 0$.

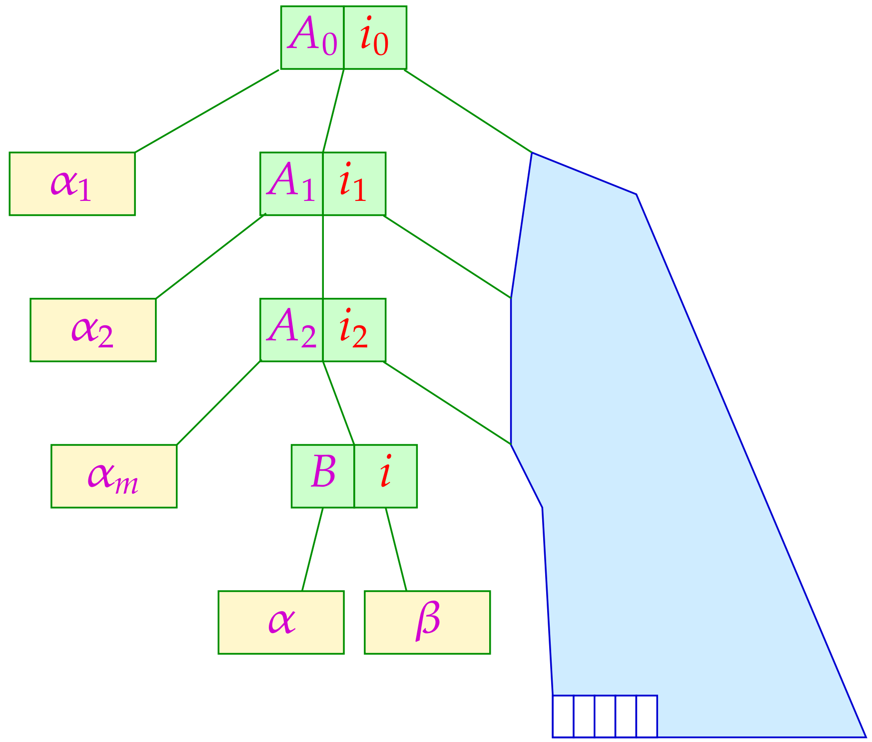
Idee: Wir statten Items mit k-Vorausschau aus :-)

Ein $LR(k)$-Item ist dann ein Paar:

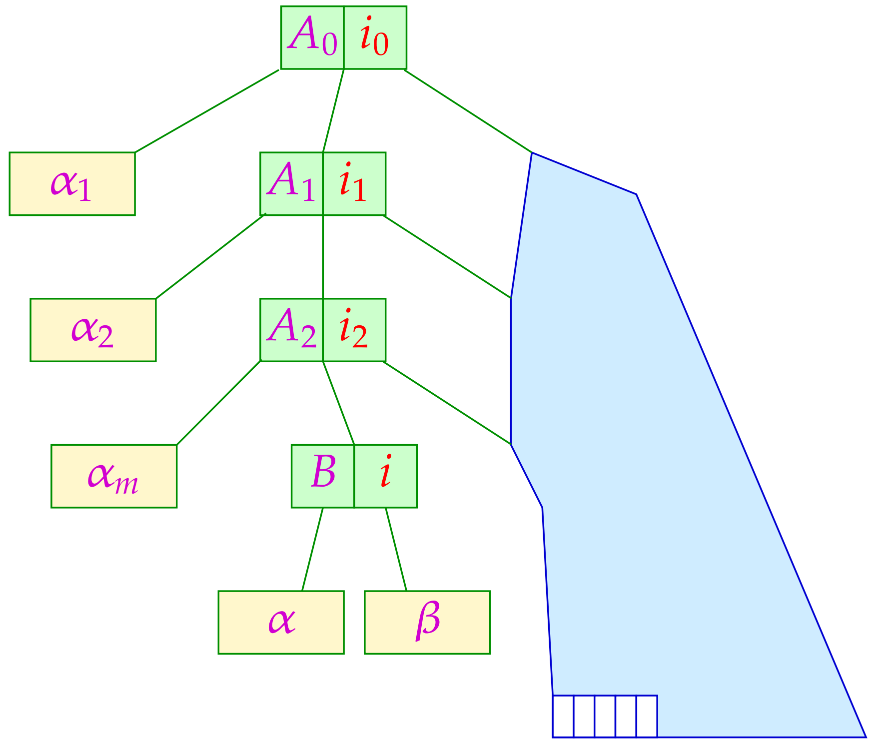
$$[B \to \alpha \bullet \beta,\, x]\,, \qquad x \in \mathsf{Follow}_k(B)$$

Dieses Item ist gültig für $\gamma\,\alpha$ falls:

$$S \to_R^* \gamma\, B\, w \qquad \text{mit} \qquad \{x\} = \mathsf{First}_k(w)$$



... wobei $\alpha_1 \ldots \alpha_m = \gamma$



... wobei $\quad \alpha_1 \ldots \alpha_m = \gamma$

Die Menge der gültigen $LR(k)$-Items für zuverlässige Präfixe berechnen wir wieder mithilfe eines endlichen Automaten :-)

Der Automat $c(G,k)$:

Zustände: $LR(k)$-Items :-)

Anfangszustand: $[S' \to \bullet\, S,\ \epsilon]$

Endzustände: $\{[B \to \gamma\bullet,\ x] \mid B \to \gamma \in P, x \in \textsf{Follow}_k(B)\}$

Übergänge:

(1) $([A \to \alpha \bullet X\, \beta,\ x], X, [A \to \alpha\, X \bullet \beta,\ x]), \quad X \in (N \cup T)$

(2) $([A \to \alpha \bullet B\, \beta,\ x], \epsilon, [B \to \bullet\, \gamma,\ x']),$

$$A \to \alpha\, B\, \beta\,, \quad B \to \gamma \in P, x' \in \textsf{First}_k(\beta) \odot \{x\};$$

Der Automat $c(G,k)$:

Zustände: $LR(k)$-Items :-)

Anfangszustand: $[S' \to \bullet\, S,\ \epsilon]$

Endzustände: $\{[B \to \gamma\bullet,\ x] \mid B \to \gamma \in P, x \in \mathsf{Follow}_k(B)\}$

Übergänge:

(1) $([A \to \alpha \bullet X\, \beta,\ x], X, [A \to \alpha\, X \bullet \beta,\ x]), \quad X \in (N \cup T)$

(2) $([A \to \alpha \bullet B\, \beta,\ x], \epsilon, [B \to \bullet\, \gamma,\ x']),$

$$A \to \alpha\, B\, \beta\ ,\quad B \to \gamma \in P, x' \in \mathsf{First}_k(\beta) \odot \{x\};$$

Dieser Automat arbeitet wie $c(G)$ — verwaltet aber zusätzlich ein k-Präfix aus dem Follow_k der linken Seiten.

Den kanonischen $LR(k)$-Automaten $LR(G,k)$ erhält man aus $c(G,k)$, indem man nach jedem Übergang beliebig viele ϵ liest und dann den Automaten deterministisch macht ...

Den kanonischen $LR(k)$-Automaten $LR(G,k)$ erhält man aus $c(G,k)$, indem man nach jedem Übergang beliebig viele ϵ liest und dann den Automaten deterministisch macht ...

Man kann ihn aber auch direkt aus der Grammatik konstruieren werden :-)

Wie bei $LR(0)$ benötigt man eine Hilfsfunktion:

$$
\begin{aligned}
\delta_\epsilon^*(q) = q \cup \{[B \to \bullet\, \gamma, x] \mid \quad & \exists\, [A \to \alpha \bullet B'\, \beta', x'] \in q\,, \\
& \beta \in (N \cup T)^* : \quad B' \to^* B\, \beta\} \wedge \\
& x \in \mathsf{First}_k(\beta\, \beta') \odot \{x'\}\}
\end{aligned}
$$

Den kanonischen $LR(k)$-Automaten $LR(G,k)$ erhält man aus $c(G,k)$, indem man nach jedem Übergang beliebig viele ϵ liest und dann den Automaten deterministisch macht ...

Man kann ihn aber auch direkt aus der Grammatik konstruieren werden :-)

Wie bei $LR(0)$ benötigt man eine Hilfsfunktion:

$$
\begin{aligned}
\delta^*_\epsilon(q) = q \cup \{[B \to \bullet\, \gamma, x] \mid \quad & \exists\, [A \to \alpha \bullet B'\, \beta', x'] \in q, \\
& \beta \in (N \cup T)^* : \quad B' \to^* B\, \beta\} \wedge \\
& x \in \mathsf{First}_k(\beta\, \beta') \odot \{x'\}\}
\end{aligned}
$$

Dann definiert man:

Zustände: Mengen von $LR(k)$-Items;

Anfangszustand: $\delta^*_\epsilon\, \{[S' \to \bullet\, S, \epsilon]\}$

Endzustände: $\{q \mid \exists\, A \to \alpha \in P : \; [A \to \alpha\, \bullet, x] \in q\}$

Übergänge: $\delta(q, X) = \delta^*_\epsilon\, \{[A \to \alpha\, X \bullet\, \beta, x] \mid [A \to \alpha \bullet X\, \beta, x] \in q\}$

Im Beispiel:

$$
\begin{aligned}
q_0 &= \{[S' \to \bullet\, E],\\
&\quad [E \to \bullet\, E + T],\\
&\quad [E \to \bullet\, T],\\
&\quad [T \to \bullet\, T * F],\\
&\quad [T \to \bullet\, F],\\
&\quad [F \to \bullet\, (\, E\,)],\\
&\quad [F \to \bullet\, \text{int}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \delta(q_0, E) = \{[S' \to E\, \bullet],\\
&\quad [E \to E\, \bullet + T]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_2 &= \delta(q_0, T) = \{[E \to T\, \bullet],\\
&\quad [T \to T\, \bullet * F]\}
\end{aligned}
$$

$$
q_3 = \delta(q_0, F) = \{[T \to F\, \bullet]\}
$$

$$
q_4 = \delta(q_0, \text{int}) \quad \{[F \to \text{int}\, \bullet]\}
$$

$$
\begin{aligned}
q_5 &= \delta(q_0, (\,) = \{[F \to (\, \bullet\, E\,)],\\
&\quad [E \to \bullet\, E + T],\\
&\quad [E \to \bullet\, T],\\
&\quad [T \to \bullet\, T * F],\\
&\quad [T \to \bullet\, F],\\
&\quad [F \to \bullet\, (\, E\,)],\\
&\quad [F \to \bullet\, \text{int}]\}
\end{aligned}
$$

Im Beispiel:

$$
\begin{array}{lllll}
q_0 & = & & & \{[S' \to \bullet\, E,\ \{\epsilon\}], \\
& & & & [E \to \bullet\, E + T,\ \{\epsilon, +\}], \\
& & & & [E \to \bullet\, T,\ \{\epsilon, +\}], \\
& & & & [T \to \bullet\, T * F,\ \{\epsilon, +, *\}], \\
& & & & [T \to \bullet\, F,\ \{\epsilon, +, *\}], \\
& & & & [F \to \bullet\, (\, E\,),\ \{\epsilon, +, *\}], \\
& & & & [F \to \bullet\, \mathsf{int},\ \{\epsilon, +, *\}]\} \\
\\
q_1 & = & \delta(q_0, E) & = & \{[S' \to E\, \bullet \quad], \\
& & & & [E \to E\, \bullet + T \quad]\} \\
\\
q_2 & = & \delta(q_0, T) & = & \{[E \to T\, \bullet \quad], \\
& & & & [T \to T\, \bullet * F \quad]\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
q_3 & = & \delta(q_0, F) & = & \{[T \to F\, \bullet \quad]\} \\
\\
q_4 & = & \delta(q_0, \mathsf{int}) & & \{[F \to \mathsf{int}\, \bullet \quad]\} \\
\\
q_5 & = & \delta(q_0, (\,) & = & \{[F \to (\, \bullet\, E\,) \quad], \\
& & & & [E \to \bullet\, E + T \quad], \\
& & & & [E \to \bullet\, T \quad], \\
& & & & [T \to \bullet\, T * F \quad], \\
& & & & [T \to \bullet\, F \quad], \\
& & & & [F \to \bullet\, (\, E\,) \quad], \\
& & & & [F \to \bullet\, \mathsf{int} \quad]\}
\end{array}
$$

Im Beispiel:

$$
\begin{array}{rcl}
q_0 & = & \{[S' \to \bullet\, E,\ \{\epsilon\}], \\
 & & \ [E \to \bullet\, E + T,\ \{\epsilon, +\}], \\
 & & \ [E \to \bullet\, T,\ \{\epsilon, +\}], \\
 & & \ [T \to \bullet\, T * F,\ \{\epsilon, +, *\}], \\
 & & \ [T \to \bullet\, F,\ \{\epsilon, +, *\}], \\
 & & \ [F \to \bullet\, (\, E\,),\ \{\epsilon, +, *\}], \\
 & & \ [F \to \bullet\, \mathsf{int}, \{\epsilon, +, *\}]\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcccl}
q_1 & = & \delta(q_0, E) & = & \{[S' \to E \bullet,\ \{\epsilon\}], \\
 & & & & \ [E \to E \bullet + T,\ \{\epsilon, +\}]\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcccl}
q_2 & = & \delta(q_0, T) & = & \{[E \to T \bullet,\ \{\epsilon, +\}], \\
 & & & & \ [T \to T \bullet * F,\ \{\epsilon, +, *\}]\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcccl}
q_3 & = & \delta(q_0, F) & = & \{[T \to F \bullet,\ \{\epsilon, +, *\}]\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcccl}
q_4 & = & \delta(q_0, \mathsf{int}) & & \{[F \to \mathsf{int} \bullet,\ \{\epsilon, +, *\}]\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcccl}
q_5 & = & \delta(q_0, (\,) & = & \{[F \to (\, \bullet\, E\,) \quad], \\
 & & & & \ [E \to \bullet\, E + T \quad], \\
 & & & & \ [E \to \bullet\, T \quad], \\
 & & & & \ [T \to \bullet\, T * F \quad], \\
 & & & & \ [T \to \bullet\, F \quad], \\
 & & & & \ [F \to \bullet\, (\, E\,) \quad], \\
 & & & & \ [F \to \bullet\, \mathsf{int} \quad]\}
\end{array}
$$

Im Beispiel:

$$
\begin{array}{lllll}
q_0 & = & & & \{[S' \to \bullet\, E,\ \{\epsilon\}], \\
& & & & \ [E \to \bullet\, E+T,\ \{\epsilon,+\}], \\
& & & & \ [E \to \bullet\, T,\ \{\epsilon,+\}], \\
& & & & \ [T \to \bullet\, T*F,\ \{\epsilon,+,*\}], \\
& & & & \ [T \to \bullet\, F,\ \{\epsilon,+,*\}], \\
& & & & \ [F \to \bullet\, (\ E\ ),\ \{\epsilon,+,*\}], \\
& & & & \ [F \to \bullet\, \mathsf{int},\ \{\epsilon,+,*\}]\} \\
\\
q_1 & = & \delta(q_0, E) & = & \{[S' \to E\bullet,\ \{\epsilon\}], \\
& & & & \ [E \to E\bullet +T,\ \{\epsilon,+\}]\} \\
\\
q_2 & = & \delta(q_0, T) & = & \{[E \to T\bullet,\ \{\epsilon,+\}], \\
& & & & \ [T \to T\bullet *F,\ \{\epsilon,+,*\}]\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
q_3 & = & \delta(q_0, F) & = & \{[T \to F\bullet,\ \{\epsilon,+,*\}]\} \\
\\
q_4 & = & \delta(q_0, \mathsf{int}) & & \{[F \to \mathsf{int}\bullet,\ \{\epsilon,+,*\}]\} \\
\\
q_5 & = & \delta(q_0, (\,) & = & \{[F \to (\ \bullet\, E\ ),\ \{\epsilon,+,*\}], \\
& & & & \ [E \to \bullet\, E+T,\ \{\ )\ ,+\}], \\
& & & & \ [E \to \bullet\, T,\ \{\ )\ ,+\}], \\
& & & & \ [T \to \bullet\, T*F,\ \{\ )\ ,+,*\}], \\
& & & & \ [T \to \bullet\, F,\ \{\ )\ ,+,*\}], \\
& & & & \ [F \to \bullet\, (\ E\ ),\ \{\ )\ ,+,*\}], \\
& & & & \ [F \to \bullet\, \mathsf{int},\ \{\ )\ ,+,*\}]\}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
q_5' &= \delta(q_5, () &&= \{[F \rightarrow (\bullet E)], \\
&&& \quad [E \rightarrow \bullet E + T], \\
&&& \quad [E \rightarrow \bullet T], \\
&&& \quad [T \rightarrow \bullet T * F], \\
&&& \quad [T \rightarrow \bullet F], \\
&&& \quad [F \rightarrow \bullet (E)], \\
&&& \quad [F \rightarrow \bullet \mathsf{int}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_6 &= \delta(q_1, +) &&= \{[E \rightarrow E + \bullet T], \\
&&& \quad [T \rightarrow \bullet T * F], \\
&&& \quad [T \rightarrow \bullet F], \\
&&& \quad [F \rightarrow \bullet (E)], \\
&&& \quad [F \rightarrow \bullet \mathsf{int}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_7 &= \delta(q_2, *) &&= \{[T \rightarrow T * \bullet F], \\
&&& \quad [F \rightarrow \bullet (E)], \\
&&& \quad [F \rightarrow \bullet \mathsf{int}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_8 &= \delta(q_5, E) &&= \{[F \rightarrow (E \bullet)]\} \\
&&& \quad [E \rightarrow E \bullet + T]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_9 &= \delta(q_6, T) &&= \{[E \rightarrow E + T \bullet], \\
&&& \quad [T \rightarrow T \bullet * F]\}
\end{aligned}
$$

$$
q_{10} = \delta(q_7, F) = \{[T \rightarrow T * F \bullet]\}
$$

$$
q_{11} = \delta(q_8,)) = \{[F \rightarrow (E) \bullet]\}
$$

$$
\begin{aligned}
q_5' &= \delta(q_5, (\,) = \{[F \longrightarrow (\bullet E), \{), +, *\}], \\
&\qquad [E \longrightarrow \bullet E + T, \{), +\}], \\
&\qquad [E \longrightarrow \bullet T, \{), +\}], \\
&\qquad [T \longrightarrow \bullet T * F, \{), +, *\}], \\
&\qquad [T \longrightarrow \bullet F, \{), +, *\}], \\
&\qquad [F \longrightarrow \bullet (E), \{), +, *\}], \\
&\qquad [F \longrightarrow \bullet \mathsf{int}, \{), +, *\}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_6 &= \delta(q_1, +) = \{[E \longrightarrow E + \bullet T \quad], \\
&\qquad [T \longrightarrow \bullet T * F \quad], \\
&\qquad [T \longrightarrow \bullet F \quad], \\
&\qquad [F \longrightarrow \bullet (E) \quad], \\
&\qquad [F \longrightarrow \bullet \mathsf{int} \quad]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_7 &= \delta(q_2, *) = \{[T \longrightarrow T * \bullet F \quad], \\
&\qquad [F \longrightarrow \bullet (E) \quad], \\
&\qquad [F \longrightarrow \bullet \mathsf{int} \quad]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_8 &= \delta(q_5, E) = \{[F \longrightarrow (E \bullet) \quad]\} \\
&\qquad [E \longrightarrow E \bullet + T \quad]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_9 &= \delta(q_6, T) = \{[E \longrightarrow E + T \bullet \quad], \\
&\qquad [T \longrightarrow T \bullet * F \quad]\}
\end{aligned}
$$

$$
q_{10} = \delta(q_7, F) = \{[T \longrightarrow T * F \bullet \quad]\}
$$

$$
q_{11} = \delta(q_8,)\,) = \{[F \longrightarrow (E) \bullet \quad]\}
$$

$$
\begin{aligned}
q_5' &= \delta(q_5, () &= \{&[F \rightarrow (\bullet E), \{), +, *\}],\\
&&& [E \rightarrow \bullet E + T, \{), +\}],\\
&&& [E \rightarrow \bullet T, \{), +\}],\\
&&& [T \rightarrow \bullet T * F, \{), +, *\}],\\
&&& [T \rightarrow \bullet F, \{), +, *\}],\\
&&& [F \rightarrow \bullet (E), \{), +, *\}],\\
&&& [F \rightarrow \bullet \mathsf{int}, \{), +, *\}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_6 &= \delta(q_1, +) &= \{&[E \rightarrow E + \bullet T, \{\epsilon, +\}],\\
&&& [T \rightarrow \bullet T * F, \{\epsilon, +, *\}],\\
&&& [T \rightarrow \bullet F, \{\epsilon, +, *\}],\\
&&& [F \rightarrow \bullet (E), \{\epsilon, +, *\}],\\
&&& [F \rightarrow \bullet \mathsf{int}, \{\epsilon, +, *\}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_7 &= \delta(q_2, *) &= \{&[T \rightarrow T * \bullet F \quad],\\
&&& [F \rightarrow \bullet (E) \quad],\\
&&& [F \rightarrow \bullet \mathsf{int} \quad]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_8 &= \delta(q_5, E) &= \{&[F \rightarrow (E \bullet) \quad]\}\\
&&& [E \rightarrow E \bullet + T \quad]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_9 &= \delta(q_6, T) &= \{&[E \rightarrow E + T \bullet \quad],\\
&&& [T \rightarrow T \bullet * F \quad]\}
\end{aligned}
$$

$$
q_{10} = \delta(q_7, F) = \{[T \rightarrow T * F \bullet \quad]\}
$$

$$
q_{11} = \delta(q_8,)) = \{[F \rightarrow (E) \bullet \quad]\}
$$

$$
\begin{aligned}
q_5' &= \delta(q_5, (\,) &= \{&[F \rightarrow (\bullet E\,), \{\,)\,, +, *\}],\\
&&&[E \rightarrow \bullet E + T, \{\,)\,, +\}],\\
&&&[E \rightarrow \bullet T, \{\,)\,, +\}],\\
&&&[T \rightarrow \bullet T * F, \{\,)\,, +, *\}],\\
&&&[T \rightarrow \bullet F, \{\,)\,, +, *\}],\\
&&&[F \rightarrow \bullet (\,E\,), \{\,)\,, +, *\}],\\
&&&[F \rightarrow \bullet \mathsf{int}, \{\,)\,, +, *\}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_6 &= \delta(q_1, +) &= \{&[E \rightarrow E + \bullet T, \{\epsilon, +\}],\\
&&&[T \rightarrow \bullet T * F, \{\epsilon, +, *\}],\\
&&&[T \rightarrow \bullet F, \{\epsilon, +, *\}],\\
&&&[F \rightarrow \bullet (\,E\,), \{\epsilon, +, *\}],\\
&&&[F \rightarrow \bullet \mathsf{int}, \{\epsilon, +, *\}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_7 &= \delta(q_2, *) &= \{&[T \rightarrow T * \bullet F, \{\epsilon, +, *\}],\\
&&&[F \rightarrow \bullet (\,E\,), \{\epsilon, +, *\}],\\
&&&[F \rightarrow \bullet \mathsf{int}, \{\epsilon, +, *\}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_8 &= \delta(q_5, E) &= \{&[F \rightarrow (\,E \bullet\,), \{\epsilon, +, *\}]\}\\
&&&[E \rightarrow E \bullet + T, \{\,)\,, +\}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_9 &= \delta(q_6, T) &= \{&[E \rightarrow E + T\bullet, \{\epsilon, +\}],\\
&&&[T \rightarrow T \bullet * F, \{\epsilon, +, *\}]\}
\end{aligned}
$$

$$
q_{10} = \delta(q_7, F) = \{[T \rightarrow T * F\bullet, \{\epsilon, +, *\}]\}
$$

$$
q_{11} = \delta(q_8, \,)\,) = \{[F \rightarrow (\,E\,)\bullet, \{\epsilon, +, *\}]\}
$$

$$
\begin{aligned}
q'_2 &= \delta(q'_5, T) &&= \{[E \to T\bullet, \{\,)\,, +\}], \\
&&& \quad [T \to T \bullet * F, \{\,)\,, +, *\}]\}
\end{aligned}
$$

$$
q'_3 = \delta(q'_5, F) = \{[F \to F\bullet, \{\,)\,, +, *\}]\}
$$

$$
q'_4 = \delta(q'_5, \mathsf{int}) = \{[F \to \mathsf{int}\bullet, \{\,)\,, +, *\}]\}
$$

$$
\begin{aligned}
q'_6 &= \delta(q_8, +) &&= \{[E \to E + \bullet\, T, \{\,)\,, +\}], \\
&&& \quad [T \to \bullet\, T * F, \{\,)\,, +, *\}], \\
&&& \quad [T \to \bullet\, F, \{\,)\,, +, *\}], \\
&&& \quad [F \to \bullet\, (\,E\,), \{\,)\,, +, *\}], \\
&&& \quad [F \to \bullet\, \mathsf{int}, \{\,)\,, +, *\}]\}
\end{aligned}
$$

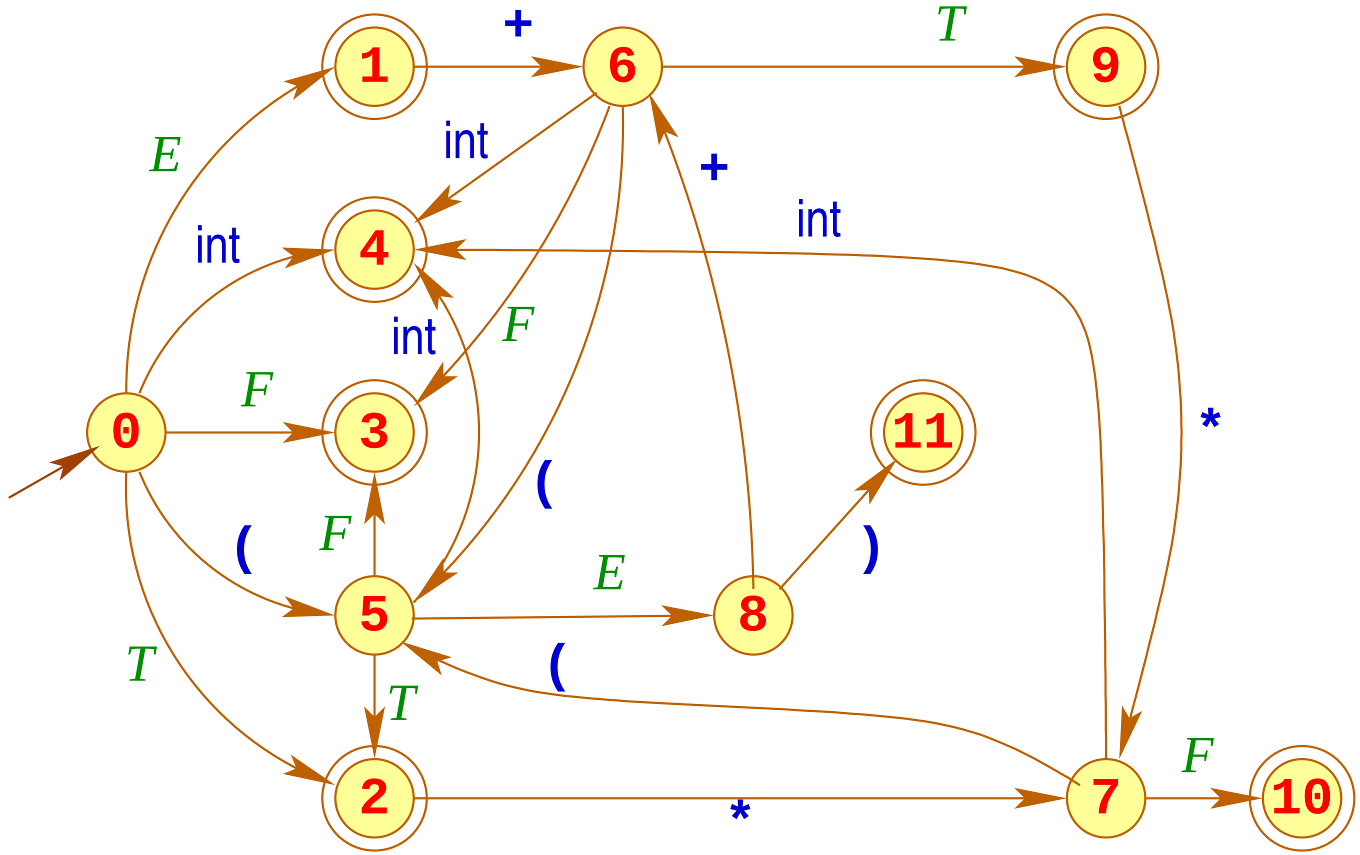
$$
\begin{aligned}
q'_7 &= \delta(q_9, *) &&= \{[T \to T * \bullet\, F, \{\,)\,, +, *\}], \\
&&& \quad [F \to \bullet\, (\,E\,), \{\,)\,, +, *\}], \\
&&& \quad [F \to \bullet\, \mathsf{int}, \{\,)\,, +, *\}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q'_8 &= \delta(q'_5, E) &&= \{[F \to (\,E \bullet\,), \{\,)\,, +, *\}]\} \\
&&& \quad [E \to E \bullet + T, \{\,)\,, +\}]\}
\end{aligned}
$$

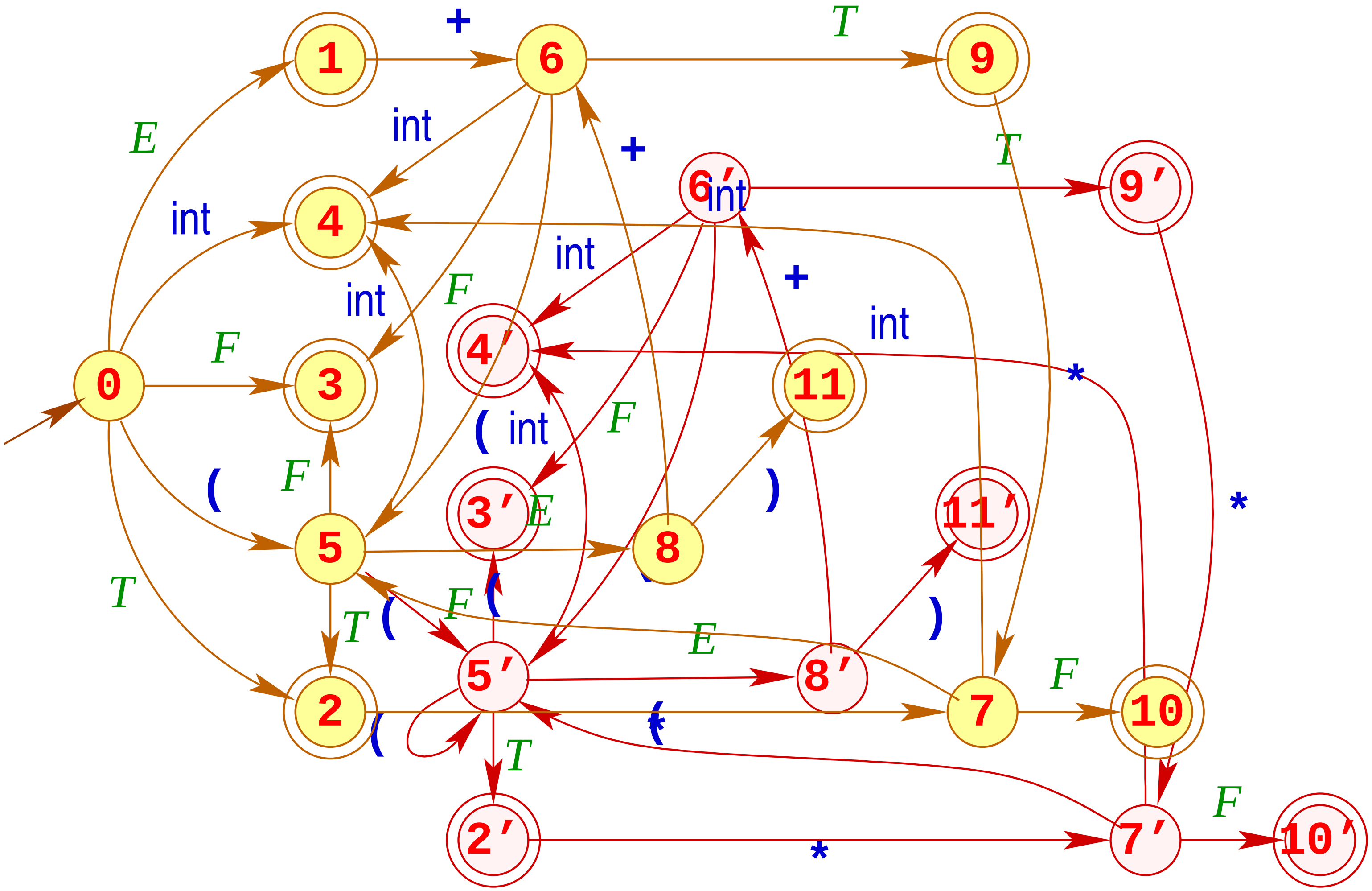
$$
\begin{aligned}
q'_9 &= \delta(q'_6, T) &&= \{[E \to E + T\bullet, \{\,)\,, +\}], \\
&&& \quad [T \to T \bullet * F, \{\,)\,, +, *\}]
\end{aligned}
$$

$$
q'_{10} = \delta(q'_7, F) = \{[T \to T * F\bullet, \{\,)\,, +, *\}]\}
$$

$$
q'_{11} = \delta(q'_8, \,)\,) = \{[F \to (\,E\,)\bullet, \{\,)\,, +, *\}]\}
$$



0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
E
T
F
int
(
+
*
)



0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
2′
3′
4′
5′
6′
7′
8′
9′
10′
11′
E
T
F
int
(
)
+
*

Diskussion:

- Im Beispiel hat sich die Anzahl der Zustände fast verdoppelt :-)

  Es kann noch schlimmer kommen :-(

- Die Konflikte in den Zuständen q_1, q_2, q_9 sind nun aufgelöst ...

  Z.B. haben wir für:

$$\begin{array}{lll} q_9 & = & \{[E \to E + T \bullet, \{\epsilon, +\}], \\ & & \ [T \to T \bullet * F, \{\epsilon, +, *\}]\} \end{array}$$

mit:

$$\{\epsilon, +\} \cap (\mathsf{First}_1(* F) \odot \{\epsilon, +, *\}) = \{\epsilon, +\} \cap \{*\} = \emptyset$$

Allgemein: Wir identifizieren zwei Konflikte:

Reduce-Reduce-Konflikt:

$$[A \to \gamma \bullet, x]\,,\;\; [A' \to \gamma' \bullet, x] \;\in\; q \quad \text{mit} \quad A \neq A' \vee \gamma \neq \gamma'$$

Shift-Reduce-Konflikt:

$$[A \to \gamma \bullet, x]\,,\;\; [A' \to \alpha \bullet a\, \beta, y] \;\in\; q \quad \text{mit} \quad a \in T \quad \text{und}$$

$$x \;\in\; \{a\} \odot \mathsf{First}_k(\beta) \odot \{y\}\,.$$

für einen Zustand $q \in Q$.

Solche Zustände nennen wir jetzt $LR(k)$-ungeeignet :-)

Satz

Eine reduzierte kontextfreie Grammatik G ist genau dann $LR(k)$ wenn der kanonische $LR(k)$-Automat $LR(G,k)$ keine $LR(k)$-ungeeigneten Zustände besitzt.

Satz

Eine reduzierte kontextfreie Grammatik G ist genau dann $LR(k)$ wenn der kanonische $LR(k)$-Automat $LR(G,k)$ keine $LR(k)$-ungeeigneten Zustände besitzt.

Diskussion:

- Unser Beispiel ist offenbar $LR(1)$:-)
- Im Allgemeinen hat der kanonische $LR(k)$-Automat sehr viel mehr Zustände als $LR(G) = LR(G,0)$:-(
- Man betrachtet darum i.a. Teilklassen von $LR(k)$-Grammatiken, bei denen man nur $LR(G)$ benutzt ...

Satz

Eine reduzierte kontextfreie Grammatik G ist genau dann $LR(k)$ wenn der kanonische $LR(k)$-Automat $LR(G,k)$ keine $LR(k)$-ungeeigneten Zustände besitzt.

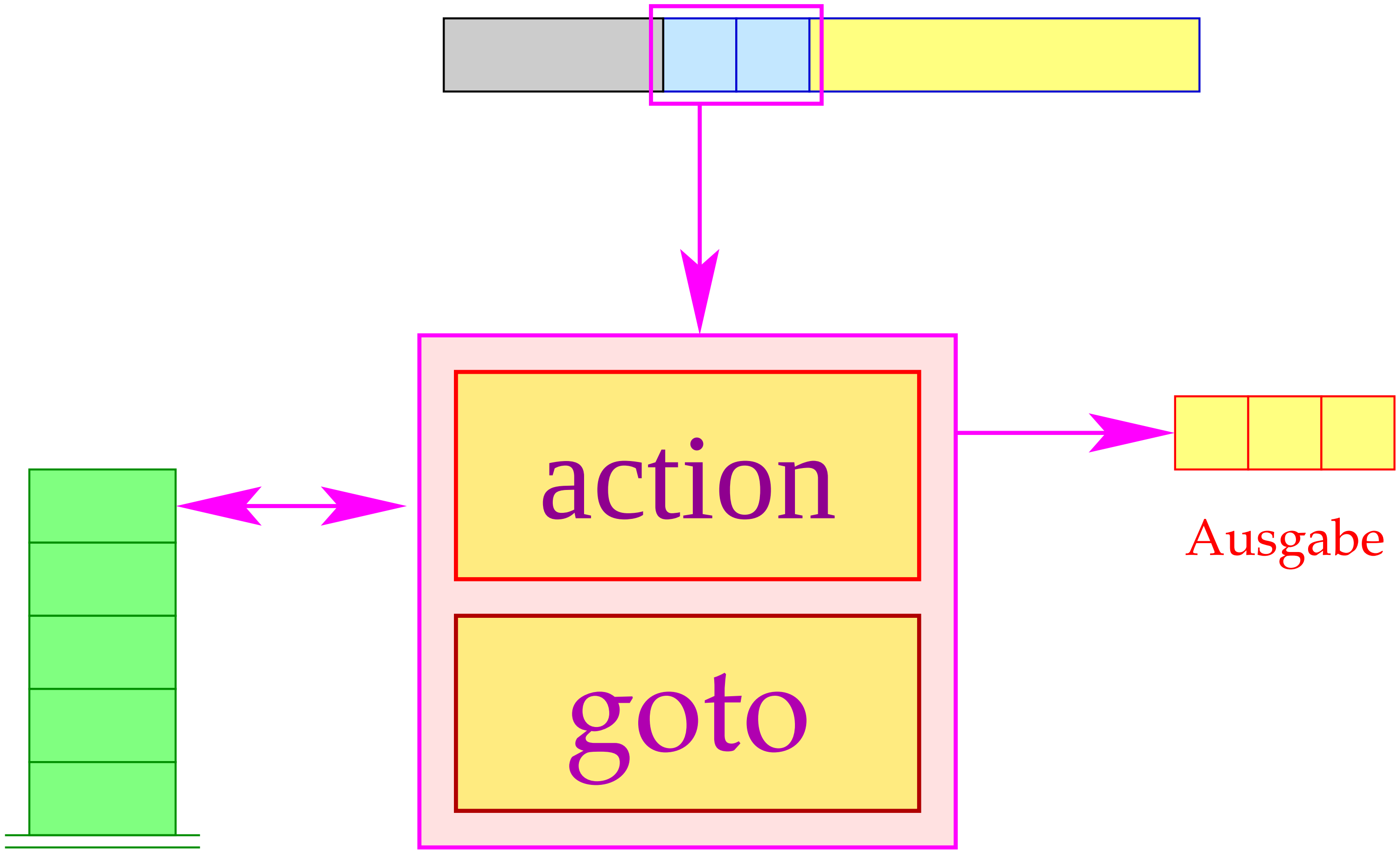
Diskussion:

- Unser Beispiel ist offenbar $LR(1)$:-)
- Im Allgemeinen hat der kanonische $LR(k)$-Automat sehr viel mehr Zustände als $LR(G) = LR(G,0)$:-(
- Man betrachtet darum i.a. Teilklassen von $LR(k)$-Grammatiken, bei denen man nur $LR(G)$ benutzt ...
- Zur Konflikt-Auflösung ordnet man den Items in den Zuständen Vorausschau-Mengen zu:

  (1) Die Zuordnung ist unabhängig vom Zustand $\Longrightarrow$ Simple $LR(k)$

  (2) Die Zuordnung hängt vom Zustand ab $\Longrightarrow$ $LALR(k)$

Der $LR(k)$-Parser:



Erläuterung:

- Die goto-Tabelle kodiert die Zustandsübergänge:

$$\text{goto}[q, X] = \delta(q, X) \quad \in \quad Q$$

- Die action-Tabelle beschreibt für jeden Zustand q und möglichen Look-ahead w die erforderliche Aktion.

Diese sind:

shift	//	Shift-Operation
reduce $(A \to \gamma)$	//	Reduktion mit Ausgabe
error	//	Fehler

... im Beispiel:

$$
\begin{array}{lcl}
E & \rightarrow & E + T^{\,0} \quad | \quad T^{\,1} \\
T & \rightarrow & T * F^{\,0} \quad | \quad F^{\,1} \\
F & \rightarrow & (\, E \,)^{\,0} \quad | \quad \mathsf{int}^{\,1}
\end{array}
$$

action	ϵ	int	(	)	$+$	$*$
q_1	$S', 0$					s
q_2	$E, 1$					s
q_2'				$E, 1$		s
q_3	$T, 1$				$T, 1$	$T, 1$
q_3'				$T, 1$	$T, 1$	$T, 1$
q_4	$F, 1$				$F, 1$	$F, 1$
q_4'				$F, 1$	$F, 1$	$F, 1$
q_9	$E, 0$				$E, 0$	s
q_9'				$E, 0$	$E, 0$	s
q_{10}	$T, 0$				$T, 0$	$T, 0$
q_{10}'				$T, 0$	$T, 0$	$T, 0$
q_{11}	$F, 0$				$F, 0$	$F, 0$
q_{11}'				$F, 0$	$F, 0$	$F, 0$

2.7 Spezielle Bottom-up-Verfahren mit $LR(G)$

Idee 1: Benutze Follow_k-Mengen zur Konflikt-Lösung ...

Reduce-Reduce-Konflikt:

Falls für $[A \to \gamma \bullet], [A' \to \gamma' \bullet] \in q$ mit $A \neq A' \vee \gamma \neq \gamma'$,

$$\text{Follow}_k(A) \cap \text{Follow}_k(A') \neq \emptyset$$

Shift-Reduce-Konflikt:

Falls für $[A \to \gamma \bullet], [A' \to \alpha \bullet a\, \beta] \in q$ mit $a \in T$,

$$\text{Follow}_k(A) \cap (\{a\} \odot \text{First}_k(\beta) \odot \text{Follow}_k(A')) \neq \emptyset$$

für einen Zustand $q \in Q$.

Dann nennen wir den Zustand q $SLR(k)$-ungeeignet :-)

Die reduzierte Grammatik G nennen wir $SLR(k)$ (simple $LR(k)$:-), falls der kanonische $LR(0)$-Automat $LR(G)$ keine $SLR(k)$-ungeeigneten Zustände enthält :-)

Die reduzierte Grammatik G nennen wir $SLR(k)$ (simple $LR(k)$:-), falls der kanonische $LR(0)$-Automat $LR(G)$ keine $SLR(k)$-ungeeigneten Zustände enthält :-)

... im Beispiel:

Bei unserer Beispiel-Grammatik treten Konflikte möglicherweise in den Zuständen q_1, q_2, q_9 auf:

$$\begin{array}{lllclcl} q_1 & = & \{[S' \to E \bullet], & \qquad & \mathsf{Follow}_1(S') \cap \{+\} \odot \{\ldots\} & = & \{\epsilon\} \cap \{+\} \\ & & \;[E \to E \bullet + T]\} & & & = & \emptyset \end{array}$$

Die reduzierte Grammatik G nennen wir $SLR(k)$ (simple $LR(k)$:-), falls der kanonische $LR(0)$-Automat $LR(G)$ keine $SLR(k)$-ungeeigneten Zustände enthält :-)

... im Beispiel:

Bei unserer Beispiel-Grammatik treten Konflikte möglicherweise in den Zuständen q_1, q_2, q_9 auf:

$$
\begin{array}{lll}
q_1 = \{[S' \to E\bullet], & \text{Follow}_1(S') \cap \{+\} \odot \{\dots\} & = \{\epsilon\} \cap \{+\} \\
\quad [E \to E \bullet + T]\} & & = \emptyset \\
q_2 = \{[E \to T\bullet], & \text{Follow}_1(E) \cap \{*\} \odot \{\dots\} & = \{\epsilon, +,)\} \cap \{*\} \\
\quad [T \to T \bullet * F]\} & & = \emptyset \\
q_9 = \{[E \to E + T\bullet], & \text{Follow}_1(E) \cap \{*\} \odot \{\dots\} & = \{\epsilon, +,)\} \cap \{*\} \\
\quad [T \to T \bullet * F]\} & & = \emptyset
\end{array}
$$

Idee 2:

Berechne für jeden Zustand q Follow-Mengen :-)

Für $[A \to \alpha \bullet \beta] \in q$ definieren wir:

$$
\begin{array}{lll}
\Lambda_k(q, [A \to \alpha \bullet \beta]) & = & \{\text{First}_k(w) \mid S' \to_R^* \gamma\, A\, w \;\wedge \\
& & \qquad\qquad\qquad \delta(q_0, \gamma\, \alpha) = q\} \\
& // \subseteq & \text{Follow}_k(A)
\end{array}
$$

Idee 2: Berechne für jeden Zustand q Follow-Mengen :-)

Für $[A \to \alpha \bullet \beta] \in q$ definieren wir:

$$\Lambda_k(q, [A \to \alpha \bullet \beta]) \quad = \quad \{\mathsf{First}_k(w) \mid S' \to_R^* \gamma\, A\, w \;\wedge\; \delta(q_0, \gamma\,\alpha) = q\}$$

$$// \quad \subseteq \quad \mathsf{Follow}_k(A)$$

Reduce-Reduce-Konflikt:

$[A \to \gamma \bullet]\,,\ [A' \to \gamma' \bullet] \in q$ mit $A \neq A' \vee \gamma \neq \gamma'$ wobei:

$$\Lambda_k(q, [A \to \gamma \bullet]) \cap \Lambda_k(q, [A' \to \gamma' \bullet]) \neq \emptyset$$

Idee 2: Berechne für jeden Zustand q Follow-Mengen :-)

Für $[A \to \alpha \bullet \beta] \in q$ definieren wir:

$$\Lambda_k(q, [A \to \alpha \bullet \beta]) = \{\mathsf{First}_k(w) \mid S' \to_R^* \gamma\, A\, w \;\wedge\; \delta(q_0, \gamma\,\alpha) = q\}$$

$$// \subseteq \mathsf{Follow}_k(A)$$

Reduce-Reduce-Konflikt:

$[A \to \gamma \bullet]\,,\; [A' \to \gamma' \bullet] \in q$ mit $A \neq A' \vee \gamma \neq \gamma'$ wobei:

$$\Lambda_k(q, [A \to \gamma \bullet]) \cap \Lambda_k(q, [A' \to \gamma' \bullet]) \neq \emptyset$$

Shift-Reduce-Konflikt:

$[A \to \gamma \bullet]\,,\; [A' \to \alpha \bullet a\, \beta] \in q$ mit $a \in T$ wobei:

$$\Lambda_k(q, [A \to \gamma \bullet]) \cap (\{a\} \odot \mathsf{First}_k(\beta) \odot \Lambda_k(q, [A' \to \alpha \bullet a\, \beta])) \neq \emptyset$$

Solche Zustände nennen wir jetzt $LALR(k)$-ungeeignet :-)

Die reduzierte Grammatik G nennen wir $LALR(k)$, falls der kanonische $LR(0)$-Automat $LR(G)$ keine $LALR(k)$-ungeeigneten Zustände enthält :-)

Bevor wir Beispiele betrachten, überlegen wir erst, wie die Mengen $\Lambda_k(q, [A \to \alpha \bullet \beta])$ berechnet werden können :-)

Die reduzierte Grammatik G nennen wir $LALR(k)$, falls der kanonische $LR(0)$-Automat $LR(G)$ keine $LALR(k)$-ungeeigneten Zustände enthält :-)

Bevor wir Beispiele betrachten, überlegen wir erst, wie die Mengen $\Lambda_k(q, [A \to \alpha \bullet \beta])$ berechnet werden können :-)

Idee: Stelle ein Ungleichungssystem auf !!!

$$
\begin{array}{lcll}
\Lambda_k(q_0, [S' \to \bullet\, S]) & \supseteq & \{\epsilon\} & \\
\Lambda_k(q, [A \to \alpha\, X \bullet \beta]) & \supseteq & \Lambda_k(p, [A \to \alpha \bullet\, X\, \beta]) & \text{falls} \quad \delta(p, X) = q \\
\Lambda_k(q, [A \to \bullet\, \gamma]) & \supseteq & \mathsf{First}_k(\beta) \odot \Lambda_k(q, [B \to \alpha \bullet A\, \beta]) & \text{falls} \quad [B \to \alpha \bullet A\, \beta] \in q
\end{array}
$$

Beispiel:

$$\begin{array}{lll} S & \to & A\,b\,B \mid B \\ A & \to & a \mid b\,B \\ B & \to & A \end{array}$$

Der kanonische $LR(0)$-Automat hat dann die folgenden Zustände:

$$\begin{array}{lll} q_0 & = & \{[S' \to \bullet\, S], \\ & & [S \to \bullet\, A\,b\,B], \\ & & [A \to \bullet\, a], \\ & & [A \to \bullet\, b\,B], \\ & & [S \to \bullet\, B], \\ & & [B \to \bullet\, A]\} \end{array}$$

$$q_1 \;=\; \delta(q_0, S) \;=\; \{[S' \to S\bullet]\}$$

$$q_2 \;=\; \delta(q_0, a) \;=\; \{[A \to a\bullet]\}$$

$$\begin{array}{lllll} q_3 & = & \delta(q_0, b) & = & \{[A \to b \bullet B], \\ & & & & [B \to \bullet\, A], \\ & & & & [A \to \bullet\, a], \\ & & & & [A \to \bullet\, b\,B]\} \end{array}$$

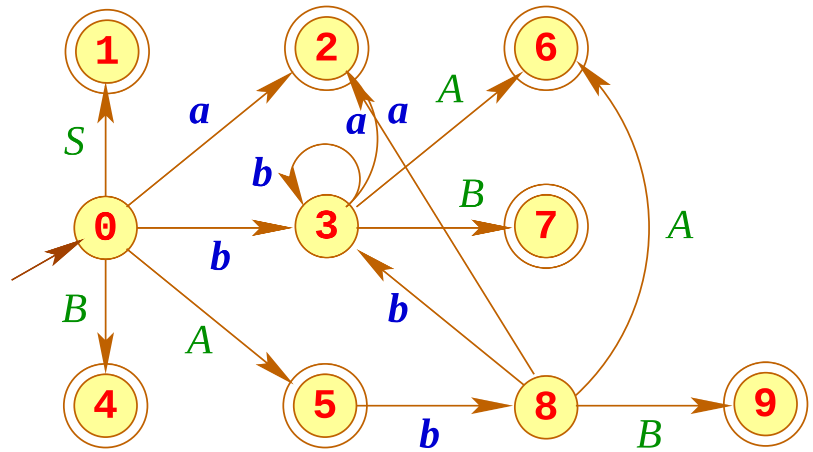
$$q_4 \;=\; \delta(q_0, B) \;=\; \{[S \to B\bullet]\}$$

$$
\begin{array}{lllllll}
q_5 & = & \delta(q_0, A) & = & \{[S \to A \bullet b\, B], & & \\
 & & & & \;[B \to A\bullet]\} & & \\
q_6 & = & \delta(q_3, A) & = & \{[B \to A\bullet]\} & & \\
q_7 & = & \delta(q_3, B) & = & \{[A \to b\, B\bullet]\} & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lllll}
q_8 & = & \delta(q_5, b) & = & \{[S \to A\, b \bullet B], \\
 & & & & \;[B \to \bullet A], \\
 & & & & \;[A \to \bullet a], \\
 & & & & \;[A \to \bullet b\, B]\} \\
q_9 & = & \delta(q_8, B) & = & \{[S \to A\, b\, B\bullet]\}
\end{array}
$$

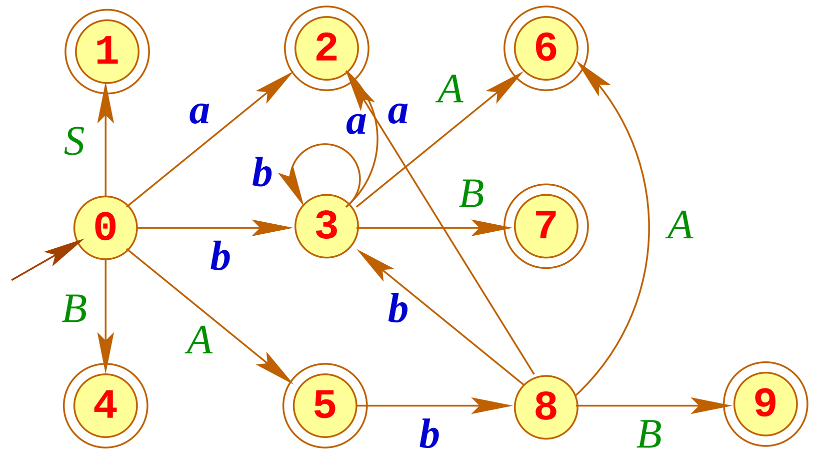
Shift-Reduce-Konflikt:

$$
\begin{array}{lll}
q_5 & = & \{[S \to A \bullet b\, B], \\
 & & \;[B \to A\bullet]\}
\end{array}
$$

Dabei ist: $\text{Follow}_1(B) \cap \{b\} \odot \{\dots\} = \{\epsilon, b\} \cap \{b\} \neq \emptyset$



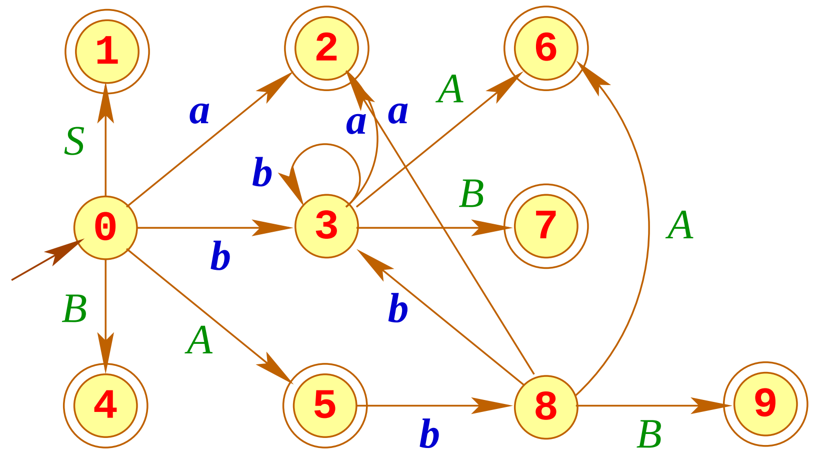
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
S
a
b
a
a
A
b
B
A
B
A
b
b
B



Ausschnitt des Ungleichungssystems:

$$\Lambda_1(q_5, [B \to A \bullet]) \quad \supseteq \quad \Lambda_1(q_0, [B \to \bullet\, A])$$

$$\begin{array}{lll} \Lambda_1(q_0, [B \to \bullet\, A]) & \supseteq & \Lambda_1(q_0, [S \to \bullet\, B]) \\ \Lambda_1(q_0, [S \to \bullet\, B]) & \supseteq & \Lambda_1(q_0, [S' \to \bullet\, S]) \\ \Lambda_1(q_0, [S' \to \bullet\, S]) & \supseteq & \{\epsilon\} \end{array}$$



Ausschnitt des Ungleichungssystems:

$$\Lambda_1(q_1, [B \to A\bullet]) \supseteq \Lambda_1(q_0, [B \to \bullet\, A])$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_1(q_0, [B \to \bullet\, A]) &\supseteq \Lambda_1(q_0, [S \to \bullet\, B]) \\
\Lambda_1(q_0, [S \to \bullet\, B]) &\supseteq \Lambda_1(q_0, [S' \to \bullet\, S]) \\
\Lambda_1(q_0, [S' \to \bullet\, S]) &\supseteq \{\epsilon\}
\end{aligned}$$

Folglich: $\Lambda_1(q_5, [B \to A\bullet]) = \{\epsilon\}$

Diskussion:

- Das Beispiel ist folglich nicht $SLR(1)$, aber $LALR(1)$:-)
- Das Beispiel ist nicht so an den Haaren herbei gezogen, wie es scheint ...
- Umbenennung: $A \Rightarrow L \quad B \Rightarrow R \quad a \Rightarrow \mathsf{id} \quad b \Rightarrow * \,/ =$ liefert:

$$
\begin{array}{lll}
S & \rightarrow & L = R \mid R \\
L & \rightarrow & \mathsf{id} \mid * R \\
R & \rightarrow & L
\end{array}
$$

... d.h. ein Fragment der Grammatik für C-Ausdrücke ;-)

Für $k = 1$ lassen sich die Mengen $\Lambda_k(q, [A \to \alpha \bullet \beta])$ wieder effizient berechnen :-)

Das verbesserte Ungleichungsssystem:

$$
\begin{array}{llll}
\Lambda_1(q_0, [S' \to \bullet\, S]) & \supseteq & \{\epsilon\} & \\
\Lambda_1(q, [A \to \alpha\, X \bullet \beta]) & \supseteq & \Lambda_1(p, [A \to \alpha \bullet\, X\, \beta]) & \text{falls} \quad \delta(p, X) = q \\
\Lambda_1(q, [A \to \bullet\, \gamma]) & \supseteq & F_\epsilon(X_j) & \text{falls} \quad [B \to \alpha \bullet A\, X_1 \ldots X_m] \in q \\
 & & & \text{und} \quad \mathsf{empty}(X_1) \wedge \ldots \wedge \mathsf{empty}(X_{j-1}) \\
\Lambda_1(q, [A \to \bullet\, \gamma]) & \supseteq & \Lambda_1(q, [B \to \alpha \bullet A\, X_1 \ldots X_m]) & \text{falls} \quad [B \to \alpha \bullet A\, X_1 \ldots X_m] \in q \\
 & & & \text{und} \quad \mathsf{empty}(X_1) \wedge \ldots \wedge \mathsf{empty}(X_m)
\end{array}
$$

$\Longrightarrow$ ein reines Vereinigungsproblem :-))

Übersicht über die Sprachklassen: