(3) $S \to a\,A\,c \qquad A \to b\,b\,A \mid b$ ... ist nicht $LR(0)$, aber $LR(1)$:

Für $S \to_R^* \alpha\,X\,w \to \alpha\,\beta\,w$ mit $\{y\} = \mathsf{First}_k(w)$ ist $\alpha\,\underline{\beta}\,y$ von einer der Formen:

$$a\,b^{2n}\,\underline{b}\,c\ ,\ a\,b^{2n}\,\underline{b\,b\,A}\,c\ ,\ \underline{a\,A\,c}$$

(4) $S \to a\,A\,c \qquad A \to b\,A\,b \mid b$ ... ist nicht $LR(k)$ für jedes $k \geq 0$:

Betrachte einfach die Rechtsableitungen:

$$S \to_R^* a\,b^n\,A\,b^n\,c \to a\,b^n\,\underline{b}\,b^n\,c$$

In der Tat gilt:

Satz:

Die reduzierte Grammatik G ist genau dann $LR(0)$ wenn der kanonische $LR(0)$-Automat $LR(G)$ keine ungeeigneten Zustände enthält.

In der Tat gilt:

Satz:

Die reduzierte Grammatik G ist genau dann $LR(0)$ wenn der kanonische $LR(0)$-Automat $LR(G)$ keine ungeeigneten Zustände enthält.

Beweis:

Enthalte G einen ungeeigneten Zustand q.

Fall 1: $[A \to \gamma\bullet]\,,\ [A' \to \gamma'\bullet] \ \in\ q$ mit $A \to \gamma \ \neq\ A' \to \gamma'$

Dann gibt es ein zuverlässiges Präfix $\alpha\,\gamma = \alpha'\,\gamma'$ mit

$$S \to_R^* \alpha\, A\, w \to \alpha\,\gamma\, w \quad \wedge \quad S \to_R^* \alpha'\, A'\, x \to \alpha'\,\gamma'\, x$$

$$\Longrightarrow \qquad G \text{ ist nicht } LR(0) \quad \text{:-)}$$

Fall 2: $[A \to \gamma\bullet]\,,\ [A' \to \beta \bullet a\,\beta'] \ \in\ q$

Dann gibt es ein zuverlässiges Präfix $\alpha\,\gamma = \alpha'\,\beta$ mit

$$S \to_R^* \alpha\,A\,w \to \alpha\,\gamma\,w \quad \wedge \quad S \to_R^* \alpha'\,A'\,x \to \alpha'\,\beta\,a\,\beta'\,x$$

Ist $\beta' \in T^*$, dann ist G nicht $LR(0)$:-)

Andernfalls $\beta' \to_R^* v_1\,X\,v_2 \to v_1\,u\,v_2$. Damit erhalten wir:

$$S \to_R^* \alpha'\,\beta\,a\,v_1\,X\,v_2\,x \to \alpha'\,\beta\,a\,v_1\,u\,v_2\,x$$

$$\Longrightarrow \qquad G \text{ ist nicht } LR(0) \quad \text{:-)}$$

Fall 2: $[A \to \gamma\bullet]\,,\ [A' \to \beta \bullet a\,\beta'] \ \in\ q$

Dann gibt es ein zuverlässiges Präfix $\alpha\,\gamma = \alpha'\,\beta$ mit

$$S \to_R^* \alpha\,A\,w \to \alpha\,\gamma\,w \quad \wedge \quad S \to_R^* \alpha'\,A'\,x \to \alpha'\,\beta\,a\,\beta'\,x$$

Ist $\beta' \in T^*$, dann ist G nicht $LR(0)$:-)

Andernfalls $\beta' \to_R^* v_1\,X\,v_2 \to v_1\,u\,v_2$. Damit erhalten wir:

$$S \to_R^* \alpha'\,\beta\,a\,v_1\,X\,v_2\,x \to \alpha'\,\beta\,a\,v_1\,u\,v_2\,x$$

$$\Longrightarrow \qquad G \text{ ist nicht } LR(0) \quad \text{:-)}$$

Enthalte $LR(G)$ keine ungeeigneten Zustände. Betrachte:

$$S \to_R^* \alpha\,A\,w \to \alpha\,\gamma\,w \qquad\qquad S \to_R^* \alpha'\,A'\,w' \to \alpha'\,\gamma'\,x$$

Sei $\delta(q_0, \alpha\,\gamma) = q$. Insbesondere ist $[A \to \gamma\bullet] \ \in\ q$.

Annahme: $(\alpha, A, w') \neq (\alpha', A', x)$.

Fall 1: $w' = x$. Dann muss q $[A' \to \gamma'\bullet]$ enthalten :-)

Fall 2: $w' \neq x$. Weitere Fallunterscheidung :-))

Sei $k > 0$.

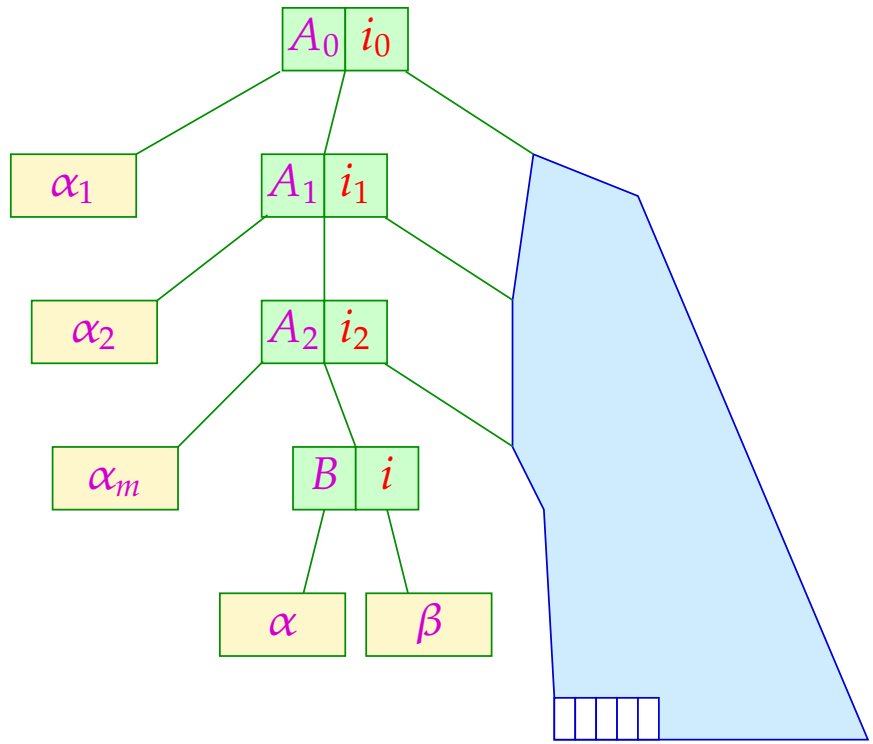
Idee: Wir statten Items mit k-Vorausschau aus :-)

Ein $LR(k)$-Item ist dann ein Paar:

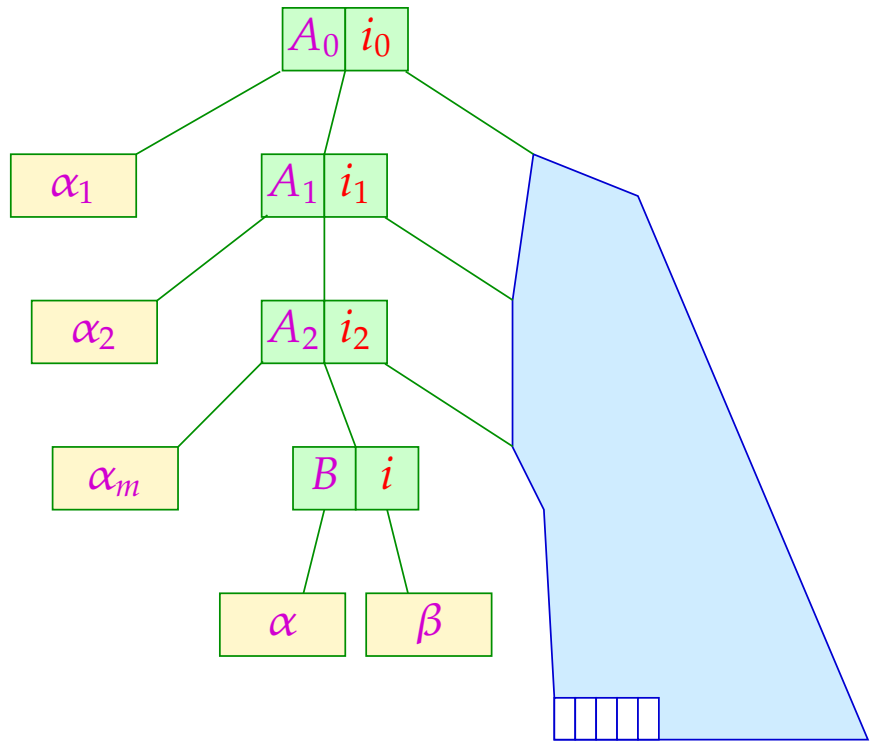
$$[B \to \alpha \bullet \beta,\ x]\ , \quad x \in \mathsf{Follow}_k(B)$$

Dieses Item ist gültig für $\gamma\,\alpha$ falls:

$$S \to_R^* \gamma\, B\, w \qquad \text{mit} \qquad \{x\} = \mathsf{First}_k(w)$$



... wobei $\alpha_1 \ldots \alpha_m = \gamma$



... wobei $\alpha_1 \ldots \alpha_m = \gamma$

Die Menge der gültigen $LR(k)$-Items für zuverlässige Präfixe berechnen wir wieder mithilfe eines endlichen Automaten :-)

Der Automat $c(G,k)$:

Zustände: $LR(k)$-Items :-)

Anfangszustand: $[S' \rightarrow \bullet\, S,\ \epsilon]$

Endzustände: $\{[B \rightarrow \gamma\bullet,\ x] \mid B \rightarrow \gamma \in P, x \in \mathsf{Follow}_k(B)\}$

Übergänge:

(1) $([A \rightarrow \alpha \bullet X\,\beta,\ x], X, [A \rightarrow \alpha\, X \bullet \beta,\ x]), \quad X \in (N \cup T)$

(2) $([A \rightarrow \alpha \bullet B\,\beta,\ x], \epsilon, [B \rightarrow \bullet\,\gamma,\ x']),$

$A \rightarrow \alpha\, B\, \beta\ ,\ \ B \rightarrow \gamma \in P, x' \in \mathsf{First}_k(\beta) \odot \{x\};$

Der Automat $c(G,k)$:

Zustände: $LR(k)$-Items :-)

Anfangszustand: $[S' \to \bullet\, S,\ \epsilon]$

Endzustände: $\{[B \to \gamma\bullet,\ x] \mid B \to \gamma \in P, x \in \mathsf{Follow}_k(B)\}$

Übergänge:

(1) $([A \to \alpha \bullet X\,\beta,\ x], X, [A \to \alpha\, X \bullet \beta,\ x]), \quad X \in (N \cup T)$

(2) $([A \to \alpha \bullet B\,\beta,\ x], \epsilon, [B \to \bullet\,\gamma,\ x']),$

$A \to \alpha\, B\, \beta\ ,\ \ B \to \gamma \in P, x' \in \mathsf{First}_k(\beta) \odot \{x\};$

Dieser Automat arbeitet wie $c(G)$ — verwaltet aber zusätzlich ein k-Präfix aus dem Follow_k der linken Seiten.

Den kanonischen $LR(k)$-Automaten $LR(G,k)$ erhält man aus $c(G,k)$, indem man nach jedem Übergang beliebig viele ϵ liest und dann den Automaten deterministisch macht ...

Den kanonischen $LR(k)$-Automaten $LR(G,k)$ erhält man aus $c(G,k)$, indem man nach jedem Übergang beliebig viele ϵ liest und dann den Automaten deterministisch macht ...

Man kann ihn aber auch direkt aus der Grammatik konstruieren werden :-)

Wie bei $LR(0)$ benötigt man eine Hilfsfunktion:

$$\begin{aligned}\delta^*_\epsilon(q) = q \cup \{[B \to \bullet\, \gamma,\, x] \mid \; & \exists\, [A \to \alpha \bullet B'\, \beta',\, x'] \in q\,, \\ & \beta \in (N \cup T)^* : \quad B' \to^* B\, \beta\} \wedge \\ & x \in \mathsf{First}_k(\beta\, \beta') \odot \{x'\}\}\end{aligned}$$

Den kanonischen $LR(k)$-Automaten $LR(G,k)$ erhält man aus $c(G,k)$, indem man nach jedem Übergang beliebig viele ϵ liest und dann den Automaten deterministisch macht ...

Man kann ihn aber auch direkt aus der Grammatik konstruieren werden :-)

Wie bei $LR(0)$ benötigt man eine Hilfsfunktion:

$$\begin{aligned}\delta^*_\epsilon(q) = q \cup \{[B \to \bullet\, \gamma,\, x] \mid \; & \exists\, [A \to \alpha \bullet B'\, \beta',\, x'] \in q\,, \\ & \beta \in (N \cup T)^* : \quad B' \to^* B\, \beta\} \wedge \\ & x \in \mathsf{First}_k(\beta\, \beta') \odot \{x'\}\}\end{aligned}$$

Dann definiert man:

Zustände: Mengen von $LR(k)$-Items;

Anfangszustand: $\delta^*_\epsilon\, \{[S' \to \bullet\, S,\, \epsilon]\}$

Endzustände: $\{q \mid \exists\, A \to \alpha \in P : \; [A \to \alpha \bullet,\, x] \in q\}$

Übergänge: $\delta(q, X) = \delta^*_\epsilon\, \{[A \to \alpha\, X \bullet\, \beta,\, x] \mid [A \to \alpha \bullet X\, \beta,\, x] \in q\}$

Im Beispiel:

$$
\begin{array}{lll}
q_0 & = & \{[S' \to \bullet E], \\
 & & [E \to \bullet E + T], \\
 & & [E \to \bullet T], \\
 & & [T \to \bullet T * F], \\
 & & [T \to \bullet F], \\
 & & [F \to \bullet (E)], \\
 & & [F \to \bullet \mathsf{int}]\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
q_1 & = & \delta(q_0, E) = \{[S' \to E \bullet], \\
 & & [E \to E \bullet + T]\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
q_2 & = & \delta(q_0, T) = \{[E \to T \bullet], \\
 & & [T \to T \bullet * F]\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
q_3 & = & \delta(q_0, F) = \{[T \to F \bullet]\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
q_4 & = & \delta(q_0, \mathsf{int}) = \{[F \to \mathsf{int} \bullet]\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
q_5 & = & \delta(q_0, ( ) = \{[F \to (\bullet E)], \\
 & & [E \to \bullet E + T], \\
 & & [E \to \bullet T], \\
 & & [T \to \bullet T * F], \\
 & & [T \to \bullet F], \\
 & & [F \to \bullet (E)], \\
 & & [F \to \bullet \mathsf{int}]\}
\end{array}
$$

Im Beispiel:

$$
\begin{array}{lll}
q_0 & = & \{[S' \to \bullet\, E,\ \{\epsilon\}], \\
 & & [E \to \bullet\, E + T,\ \{\epsilon, +\}], \\
 & & [E \to \bullet\, T,\ \{\epsilon, +\}], \\
 & & [T \to \bullet\, T * F,\ \{\epsilon, +, *\}], \\
 & & [T \to \bullet\, F,\ \{\epsilon, +, *\}], \\
 & & [F \to \bullet\, (\ E\ ),\ \{\epsilon, +, *\}], \\
 & & [F \to \bullet\, \mathsf{int}, \{\epsilon, +, *\}]\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
q_1 & = & \delta(q_0, E) & = & \{[S' \to E\, \bullet\ ], \\
 & & & & [E \to E\, \bullet + T\ ]\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
q_2 & = & \delta(q_0, T) & = & \{[E \to T\, \bullet\ ], \\
 & & & & [T \to T\, \bullet * F\ ]\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
q_3 & = & \delta(q_0, F) & = & \{[T \to F\, \bullet\ ]\} \\
q_4 & = & \delta(q_0, \mathsf{int}) & & \{[F \to \mathsf{int}\, \bullet\ ]\} \\
q_5 & = & \delta(q_0, (\ ) & = & \{[F \to (\ \bullet\, E\ )], \\
 & & & & [E \to \bullet\, E + T\ ], \\
 & & & & [E \to \bullet\, T\ ], \\
 & & & & [T \to \bullet\, T * F\ ], \\
 & & & & [T \to \bullet\, F\ ], \\
 & & & & [F \to \bullet\, (\ E\ )\ ], \\
 & & & & [F \to \bullet\, \mathsf{int}\ ]\}
\end{array}
$$

Im Beispiel:

$$
\begin{array}{lll}
q_0 & = & \{[S' \to \bullet E, \{\epsilon\}], \\
 & & [E \to \bullet E + T, \{\epsilon, +\}], \\
 & & [E \to \bullet T, \{\epsilon, +\}], \\
 & & [T \to \bullet T * F, \{\epsilon, +, *\}], \\
 & & [T \to \bullet F, \{\epsilon, +, *\}], \\
 & & [F \to \bullet (\ E\ ), \{\epsilon, +, *\}], \\
 & & [F \to \bullet \mathsf{int}, \{\epsilon, +, *\}]\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
q_1 & = & \delta(q_0, E) & = & \{[S' \to E\bullet, \{\epsilon\}], \\
 & & & & [E \to E \bullet + T, \{\epsilon, +\}]\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
q_2 & = & \delta(q_0, T) & = & \{[E \to T\bullet, \{\epsilon, +\}], \\
 & & & & [T \to T \bullet * F, \{\epsilon, +, *\}]\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
q_3 & = & \delta(q_0, F) & = & \{[T \to F\bullet, \{\epsilon, +, *\}]\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
q_4 & = & \delta(q_0, \mathsf{int}) & & \{[F \to \mathsf{int}\,\bullet, \{\epsilon, +, *\}]\}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
q_5 & = & \delta(q_0, (\ ) & = & \{[F \to (\ \bullet E\ ) \quad], \\
 & & & & [E \to \bullet E + T \quad], \\
 & & & & [E \to \bullet T \quad], \\
 & & & & [T \to \bullet T * F \quad], \\
 & & & & [T \to \bullet F \quad], \\
 & & & & [F \to \bullet (\ E\ ) \quad], \\
 & & & & [F \to \bullet \mathsf{int} \quad]\}
\end{array}
$$

Im Beispiel:

$$
\begin{aligned}
q_0 &= \{[S' \to \bullet E, \{\epsilon\}], \\
&\quad [E \to \bullet E + T, \{\epsilon, +\}], \\
&\quad [E \to \bullet T, \{\epsilon, +\}], \\
&\quad [T \to \bullet T * F, \{\epsilon, +, *\}], \\
&\quad [T \to \bullet F, \{\epsilon, +, *\}], \\
&\quad [F \to \bullet (\ E\ ), \{\epsilon, +, *\}], \\
&\quad [F \to \bullet \mathsf{int}, \{\epsilon, +, *\}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \delta(q_0, E) = \{[S' \to E\bullet, \{\epsilon\}], \\
&\quad [E \to E \bullet + T, \{\epsilon, +\}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_2 &= \delta(q_0, T) = \{[E \to T\bullet, \{\epsilon, +\}], \\
&\quad [T \to T \bullet * F, \{\epsilon, +, *\}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_3 &= \delta(q_0, F) = \{[T \to F\bullet, \{\epsilon, +, *\}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_4 &= \delta(q_0, \mathsf{int}) \quad \{[F \to \mathsf{int}\,\bullet, \{\epsilon, +, *\}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_5 &= \delta(q_0, (\,) = \{[F \to (\ \bullet E\ ), \{\epsilon, +, *\}], \\
&\quad [E \to \bullet E + T, \{\,),+\}], \\
&\quad [E \to \bullet T, \{\,),+\}], \\
&\quad [T \to \bullet T * F, \{\,),+,*\}], \\
&\quad [T \to \bullet F, \{\,),+,*\}], \\
&\quad [F \to \bullet (\ E\ ), \{\,),+,*\}], \\
&\quad [F \to \bullet \mathsf{int}, \{\,),+,*\}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q'_5 = \delta(q_5, (\,) = \{ & [F \to (\,\bullet E\,)], \\
& [E \to \bullet E + T], \\
& [E \to \bullet T], \\
& [T \to \bullet T * F], \\
& [T \to \bullet F], \\
& [F \to \bullet (\,E\,)], \\
& [F \to \bullet \mathsf{int}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_6 = \delta(q_1, +) = \{ & [E \to E + \bullet T], \\
& [T \to \bullet T * F], \\
& [T \to \bullet F], \\
& [F \to \bullet (\,E\,)], \\
& [F \to \bullet \mathsf{int}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_7 = \delta(q_2, *) = \{ & [T \to T * \bullet F], \\
& [F \to \bullet (\,E\,)], \\
& [F \to \bullet \mathsf{int}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_8 = \delta(q_5, E) = \{ & [F \to (\,E \bullet\,)] \\
& [E \to E \bullet + T]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_9 = \delta(q_6, T) = \{ & [E \to E + T \bullet], \\
& [T \to T \bullet * F]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_{10} = \delta(q_7, F) = \{ & [T \to T * F \bullet]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_{11} = \delta(q_8,)) = \{ & [F \to (\,E\,) \bullet]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_5' = \delta(q_5, (\,) = \{ & [F \to (\,\bullet E\,), \{\,),+,*\}], \\
& [E \to \bullet E + T, \{\,),+\}], \\
& [E \to \bullet T, \{\,),+\}], \\
& [T \to \bullet T * F, \{\,),+,*\}], \\
& [T \to \bullet F, \{\,),+,*\}], \\
& [F \to \bullet (\,E\,), \{\,),+,*\}], \\
& [F \to \bullet \mathsf{int}, \{\,),+,*\}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_6 = \delta(q_1, +) = \{ & [E \to E + \bullet T], \\
& [T \to \bullet T * F], \\
& [T \to \bullet F], \\
& [F \to \bullet (\,E\,)], \\
& [F \to \bullet \mathsf{int}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_7 = \delta(q_2, *) = \{ & [T \to T * \bullet F], \\
& [F \to \bullet (\,E\,)], \\
& [F \to \bullet \mathsf{int}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_8 = \delta(q_5, E) = \{ & [F \to (\,E \bullet\,)]\} \\
& [E \to E \bullet + T]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_9 = \delta(q_6, T) = \{ & [E \to E + T \bullet], \\
& [T \to T \bullet * F]\}
\end{aligned}
$$

$$
q_{10} = \delta(q_7, F) = \{[T \to T * F \bullet]\}
$$

$$
q_{11} = \delta(q_8, \,) = \{[F \to (\,E\,) \bullet]\}
$$

$$
\begin{aligned}
q_5' = \delta(q_5, (\,) = \{ & [F \to (\,\bullet E\,), \{\,),+,*\}], \\
& [E \to \bullet E + T, \{\,),+\}], \\
& [E \to \bullet T, \{\,),+\}], \\
& [T \to \bullet T * F, \{\,),+,*\}], \\
& [T \to \bullet F, \{\,),+,*\}], \\
& [F \to \bullet (\,E\,), \{\,),+,*\}], \\
& [F \to \bullet \mathsf{int}, \{\,),+,*\}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_6 = \delta(q_1, +) = \{ & [E \to E + \bullet T, \{\epsilon,+\}], \\
& [T \to \bullet T * F, \{\epsilon,+,*\}], \\
& [T \to \bullet F, \{\epsilon,+,*\}], \\
& [F \to \bullet (\,E\,), \{\epsilon,+,*\}], \\
& [F \to \bullet \mathsf{int}, \{\epsilon,+,*\}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_7 = \delta(q_2, *) = \{ & [T \to T * \bullet F], \\
& [F \to \bullet (\,E\,)], \\
& [F \to \bullet \mathsf{int}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_8 = \delta(q_5, E) = \{ & [F \to (\,E \bullet\,)]\} \\
& [E \to E \bullet + T]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_9 = \delta(q_6, T) = \{ & [E \to E + T \bullet], \\
& [T \to T \bullet * F]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_{10} = \delta(q_7, F) = \{ & [T \to T * F \bullet]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_{11} = \delta(q_8,)) = \{ & [F \to (\,E\,) \bullet]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_5' = \delta(q_5, (\,) = \{ & [F \to (\,\bullet E\,), \{\,),+,*\}], \\
& [E \to \bullet E + T, \{\,),+\}], \\
& [E \to \bullet T, \{\,),+\}], \\
& [T \to \bullet T * F, \{\,),+,*\}], \\
& [T \to \bullet F, \{\,),+,*\}], \\
& [F \to \bullet (\,E\,), \{\,),+,*\}], \\
& [F \to \bullet \mathsf{int}, \{\,),+,*\}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_6 = \delta(q_1, +) = \{ & [E \to E + \bullet T, \{\epsilon,+\}], \\
& [T \to \bullet T * F, \{\epsilon,+,*\}], \\
& [T \to \bullet F, \{\epsilon,+,*\}], \\
& [F \to \bullet (\,E\,), \{\epsilon,+,*\}], \\
& [F \to \bullet \mathsf{int}, \{\epsilon,+,*\}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_7 = \delta(q_2, *) = \{ & [T \to T * \bullet F, \{\epsilon,+,*\}], \\
& [F \to \bullet (\,E\,), \{\epsilon,+,*\}], \\
& [F \to \bullet \mathsf{int}, \{\epsilon,+,*\}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_8 = \delta(q_5, E) = \{ & [F \to (\,E \bullet\,), \{\epsilon,+,*\}]\} \\
& [E \to E \bullet + T, \{\,),+\}]\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_9 = \delta(q_6, T) = \{ & [E \to E + T \bullet, \{\epsilon,+\}], \\
& [T \to T \bullet * F, \{\epsilon,+,*\}]\}
\end{aligned}
$$

$$
q_{10} = \delta(q_7, F) = \{[T \to T * F \bullet, \{\epsilon,+,*\}]\}
$$

$$
q_{11} = \delta(q_8, \,) = \{[F \to (\,E\,) \bullet, \{\epsilon,+,*\}]\}
$$

$$q'_2 = \delta(q'_5, T) = \{[E \to T\bullet, \{\,),+\}],\ [T \to T \bullet * F, \{\,),+,*\}]\}$$

$$q'_3 = \delta(q'_5, F) = \{[F \to F\bullet, \{\,),+,*\}]\}$$

$$q'_4 = \delta(q'_5, \mathsf{int}) = \{[F \to \mathsf{int}\bullet, \{\,),+,*\}]\}$$

$$q'_6 = \delta(q_8, +) = \{[E \to E + \bullet T, \{\,),+\}],\ [T \to \bullet T * F, \{\,),+,*\}],\ [T \to \bullet F, \{\,),+,*\}],\ [F \to \bullet (\ E\ ), \{\,),+,*\}],\ [F \to \bullet \mathsf{int}, \{\,),+,*\}]\}$$

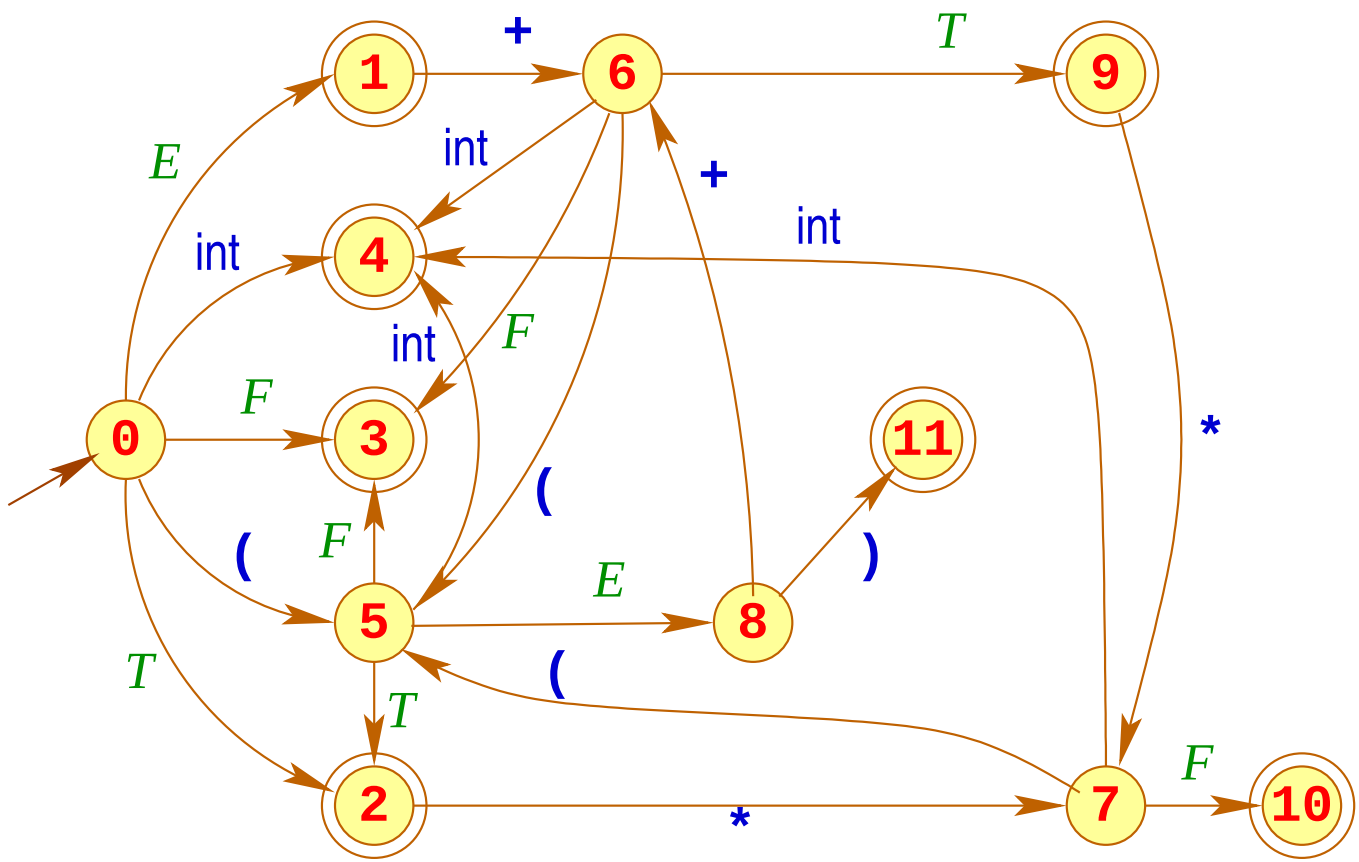
$$q'_7 = \delta(q_9, *) = \{[T \to T * \bullet F, \{\,),+,*\}],\ [F \to \bullet (\ E\ ), \{\,),+,*\}],\ [F \to \bullet \mathsf{int}, \{\,),+,*\}]\}$$

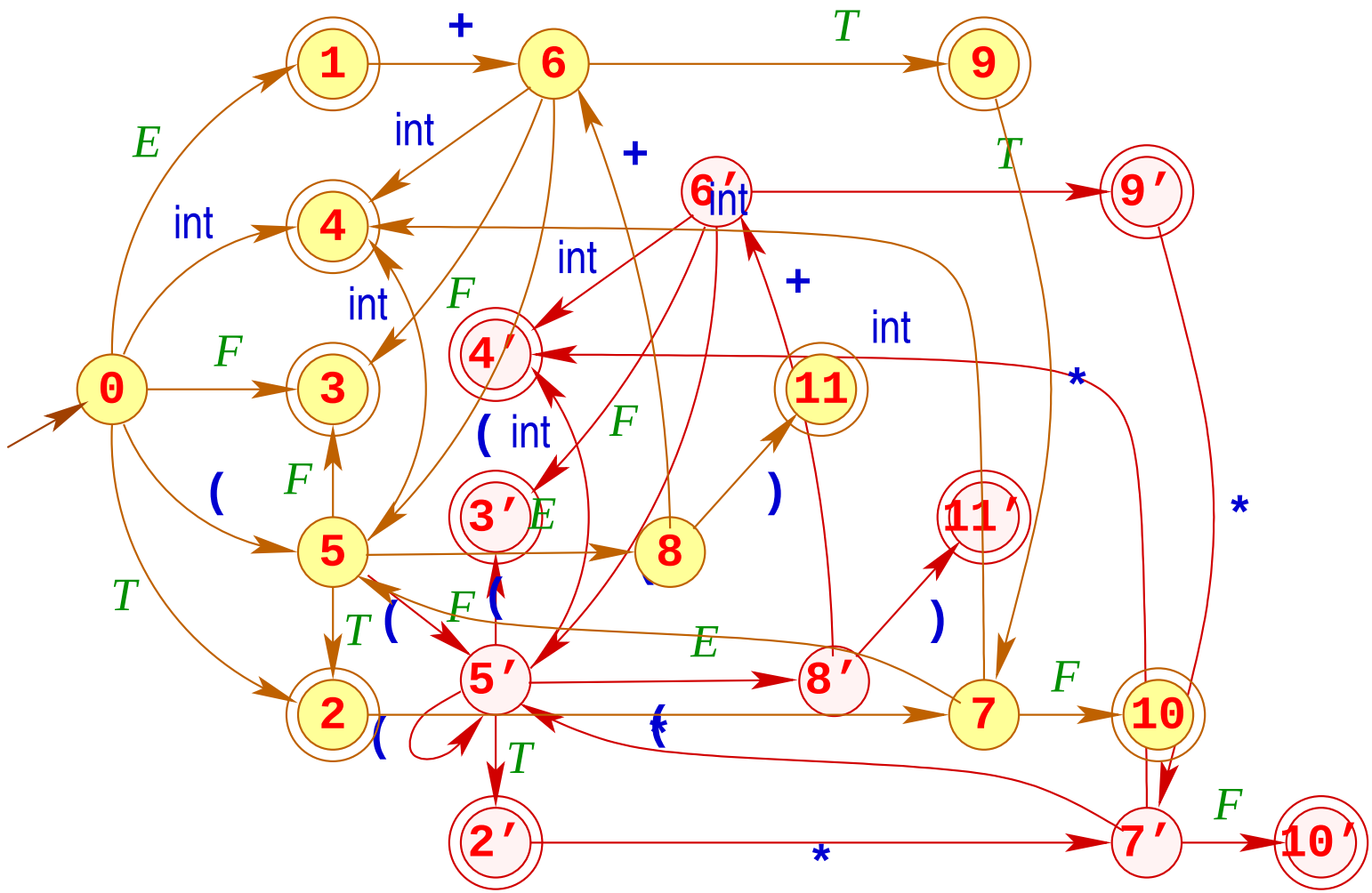
$$q'_8 = \delta(q'_5, E) = \{[F \to (\ E \bullet\ ), \{\,),+,*\}]\}\ [E \to E \bullet + T, \{\,),+\}]\}$$

$$q'_9 = \delta(q'_6, T) = \{[E \to E + T\bullet, \{\,),+\}],\ [T \to T \bullet * F, \{\,),+,*\}]$$

$$q'_{10} = \delta(q'_7, F) = \{[T \to T * F\bullet, \{\,),+,*\}]\}$$

$$q'_{11} = \delta(q'_8, \,)) = \{[F \to (\ E\ )\bullet, \{\,),+,*\}]\}$$


0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
E
int
F
T
+
(
)
*


0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
2′
3′
4′
5′
6′
7′
8′
9′
10′
11′
E
T
F
int
+
(
)
*

Diskussion:

- Im Beispiel hat sich die Anzahl der Zustände fast verdoppelt :-)
  Es kann noch schlimmer kommen :-(

- Die Konflikte in den Zuständen q_1, q_2, q_9 sind nun aufgelöst ...
  Z.B. haben wir für:

$$\begin{aligned} q_9 = \; & \{[E \to E + T \bullet, \{\epsilon, +\}], \\ & [T \to T \bullet * F, \{\epsilon, +, *\}]\} \end{aligned}$$

mit:

$$\{\epsilon, +\} \cap (\mathsf{First}_1(* F) \odot \{\epsilon, +, *\}) \;=\; \{\epsilon, +\} \cap \{*\} = \emptyset$$

Allgemein: Wir identifizieren zwei Konflikte:

Reduce-Reduce-Konflikt:

$$[A \to \gamma \bullet,\ x]\,,\ \ [A' \to \gamma' \bullet,\ x] \ \in\ q \quad \text{mit} \quad A \neq A' \vee \gamma \neq \gamma'$$

Shift-Reduce-Konflikt:

$$[A \to \gamma \bullet,\ x]\,,\ \ [A' \to \alpha \bullet a\,\beta,\ y] \ \in\ q \quad \text{mit} \quad a \in T \quad \text{und}$$

$$x \ \in\ \{a\} \odot \mathsf{First}_k(\beta) \odot \{y\}\ .$$

für einen Zustand $q \in Q$.

Solche Zustände nennen wir jetzt $LR(k)$-ungeeignet :-)

Satz

Eine reduzierte kontextfreie Grammatik G ist genau dann $LR(k)$ wenn der kanonische $LR(k)$-Automat $LR(G,k)$ keine $LR(k)$-ungeeigneten Zustände besitzt.

Satz

Eine reduzierte kontextfreie Grammatik G ist genau dann $LR(k)$ wenn der kanonische $LR(k)$-Automat $LR(G,k)$ keine $LR(k)$-ungeeigneten Zustände besitzt.

Diskussion:

- Unser Beispiel ist offenbar $LR(1)$:-)
- Im Allgemeinen hat der kanonische $LR(k)$-Automat sehr viel mehr Zustände als $LR(G) = LR(G,0)$:-(
- Man betrachtet darum i.a. Teilklassen von $LR(k)$-Grammatiken, bei denen man nur $LR(G)$ benutzt ...

Satz

Eine reduzierte kontextfreie Grammatik G ist genau dann $LR(k)$ wenn der kanonische $LR(k)$-Automat $LR(G,k)$ keine $LR(k)$-ungeeigneten Zustände besitzt.

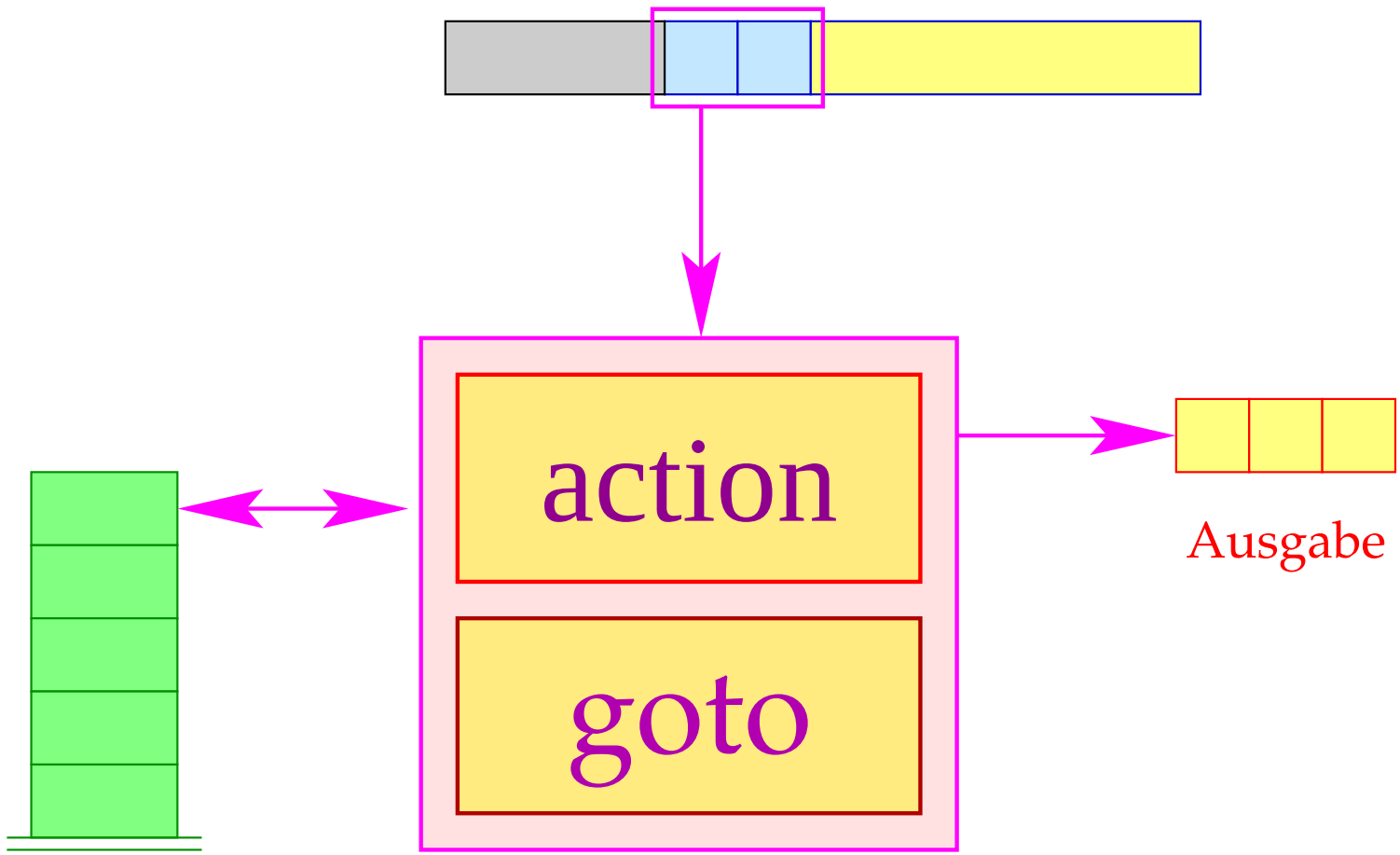
Diskussion:

- Unser Beispiel ist offenbar $LR(1)$:-)
- Im Allgemeinen hat der kanonische $LR(k)$-Automat sehr viel mehr Zustände als $LR(G) = LR(G,0)$:-(
- Man betrachtet darum i.a. Teilklassen von $LR(k)$-Grammatiken, bei denen man nur $LR(G)$ benutzt ...
- Zur Konflikt-Auflösung ordnet man den Items in den Zuständen Vorausschau-Mengen zu:

  (1) Die Zuordnung ist unabhängig vom Zustand $\Longrightarrow$ Simple $LR(k)$

  (2) Die Zuordnung hängt vom Zustand ab $\Longrightarrow$ $LALR(k)$

Der $LR(k)$-Parser:



Erläuterung:

- Die goto-Tabelle kodiert die Zustandsübergänge:

$$\mathsf{goto}[q, X] = \delta(q, X) \quad \in \quad Q$$

- Die action-Tabelle beschreibt für jeden Zustand q und möglichen Look-ahead w die erforderliche Aktion.

Diese sind:

shift	//	Shift-Operation
reduce $(A \to \gamma)$	//	Reduktion mit Ausgabe
error	//	Fehler

... im Beispiel:

$$
\begin{array}{lcl}
E & \rightarrow & E + T^{\,0} \quad | \quad T^{\,1} \\
T & \rightarrow & T * F^{\,0} \quad | \quad F^{\,1} \\
F & \rightarrow & (\ E\ )^{\,0} \quad | \quad \mathsf{int}^{\,1}
\end{array}
$$

action	ϵ	int	(	)	+	*
q_1	$S', 0$					s
q_2	$E, 1$					s
q_2'				$E, 1$		s
q_3	$T, 1$				$T, 1$	$T, 1$
q_3'				$T, 1$	$T, 1$	$T, 1$
q_4	$F, 1$				$F, 1$	$F, 1$
q_4'				$F, 1$	$F, 1$	$F, 1$
q_9	$E, 0$				$E, 0$	s
q_9'				$E, 0$	$E, 0$	s
q_{10}	$T, 0$				$T, 0$	$T, 0$
q_{10}'				$T, 0$	$T, 0$	$T, 0$
q_{11}	$F, 0$				$F, 0$	$F, 0$
q_{11}'				$F, 0$	$F, 0$	$F, 0$

2.7 Spezielle Bottom-up-Verfahren mit $LR(G)$

Idee 1: Benutze Follow_k-Mengen zur Konflikt-Lösung ...

Reduce-Reduce-Konflikt:

Falls für $[A \to \gamma \bullet], \; [A' \to \gamma' \bullet] \;\in\; q$ mit $A \neq A' \vee \gamma \neq \gamma'$,

$$\mathsf{Follow}_k(A) \cap \mathsf{Follow}_k(A') \neq \emptyset$$

Shift-Reduce-Konflikt:

Falls für $[A \to \gamma \bullet], \; [A' \to \alpha \bullet a\,\beta] \;\in\; q$ mit $a \in T$,

$$\mathsf{Follow}_k(A) \cap (\{a\} \odot \mathsf{First}_k(\beta) \odot \mathsf{Follow}_k(A')) \neq \emptyset$$

für einen Zustand $q \in Q$.

Dann nennen wir den Zustand q $SLR(k)$-ungeeignet :-)

Die reduzierte Grammatik G nennen wir $SLR(k)$ (simple $LR(k)$:-), falls der kanonische $LR(0)$-Automat $LR(G)$ keine $SLR(k)$-ungeeigneten Zustände enthält :-)

Die reduzierte Grammatik G nennen wir $SLR(k)$ (simple $LR(k)$:-), falls der kanonische $LR(0)$-Automat $LR(G)$ keine $SLR(k)$-ungeeigneten Zustände enthält :-)

... im Beispiel:

Bei unserer Beispiel-Grammatik treten Konflikte möglicherweise in den Zuständen q_1, q_2, q_9 auf:

$$q_1 = \{[S' \to E\bullet], \quad [E \to E \bullet + T]\}$$

$$\mathsf{Follow}_1(S') \cap \{+\} \odot \{\ldots\} = \{\epsilon\} \cap \{+\} = \emptyset$$

Die reduzierte Grammatik G nennen wir $SLR(k)$ (simple $LR(k)$:-), falls der kanonische $LR(0)$-Automat $LR(G)$ keine $SLR(k)$-ungeeigneten Zustände enthält :-)

... im Beispiel:

Bei unserer Beispiel-Grammatik treten Konflikte möglicherweise in den Zuständen q_1, q_2, q_9 auf:

$$
\begin{array}{lcl}
q_1 & = & \{[S' \to E\bullet], \\
 & & \quad [E \to E \bullet + T]\}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lcl}
\mathsf{Follow}_1(S') \cap \{+\} \odot \{\ldots\} & = & \{\epsilon\} \cap \{+\} \\
 & = & \emptyset
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
q_2 & = & \{[E \to T\bullet], \\
 & & \quad [T \to T \bullet * F]\}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lcl}
\mathsf{Follow}_1(E) \cap \{*\} \odot \{\ldots\} & = & \{\epsilon, +,)\} \cap \{*\} \\
 & = & \emptyset
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
q_9 & = & \{[E \to E + T\bullet], \\
 & & \quad [T \to T \bullet * F]\}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lcl}
\mathsf{Follow}_1(E) \cap \{*\} \odot \{\ldots\} & = & \{\epsilon, +,)\} \cap \{*\} \\
 & = & \emptyset
\end{array}
$$

Idee 2: Berechne für jeden Zustand q Follow-Mengen :-)

Für $[A \to \alpha \bullet \beta] \in q$ definieren wir:

$$\begin{array}{rcl} \Lambda_k(q, [A \to \alpha \bullet \beta]) & = & \{\mathsf{First}_k(w) \mid S' \to_R^* \gamma\, A\, w \;\wedge \\ & & \qquad \delta(q_0, \gamma\, \alpha) = q\} \\ & // \subseteq & \mathsf{Follow}_k(A) \end{array}$$

Idee 2: Berechne für jeden Zustand q Follow-Mengen :-)

Für $[A \to \alpha \bullet \beta] \in q$ definieren wir:

$$\begin{array}{rcl} \Lambda_k(q, [A \to \alpha \bullet \beta]) & = & \{\mathsf{First}_k(w) \mid S' \to_R^* \gamma\, A\, w \;\wedge \\ & & \qquad \delta(q_0, \gamma\, \alpha) = q\} \\ & // \quad \subseteq & \mathsf{Follow}_k(A) \end{array}$$

Reduce-Reduce-Konflikt:

$[A \to \gamma \bullet]\,,\; [A' \to \gamma' \bullet] \in q$ mit $A \neq A' \vee \gamma \neq \gamma'$ wobei:

$$\Lambda_k(q, [A \to \gamma \bullet]) \cap \Lambda_k(q, [A' \to \gamma' \bullet]) \neq \emptyset$$

Idee 2: Berechne für jeden Zustand q Follow-Mengen :-)

Für $[A \to \alpha \bullet \beta] \in q$ definieren wir:

$$\begin{array}{rcl} \Lambda_k(q, [A \to \alpha \bullet \beta]) & = & \{\mathsf{First}_k(w) \mid S' \to_R^* \gamma\, A\, w \;\wedge \\ & & \qquad \delta(q_0, \gamma\, \alpha) = q\} \\ & // \quad \subseteq & \mathsf{Follow}_k(A) \end{array}$$

Reduce-Reduce-Konflikt:

$$[A \to \gamma \bullet], \; [A' \to \gamma' \bullet] \;\in\; q \quad \text{mit} \quad A \neq A' \vee \gamma \neq \gamma' \quad \text{wobei:}$$

$$\Lambda_k(q, [A \to \gamma \bullet]) \;\cap\; \Lambda_k(q, [A' \to \gamma' \bullet]) \;\neq\; \emptyset$$

Shift-Reduce-Konflikt:

$$[A \to \gamma \bullet], \; [A' \to \alpha \bullet a\, \beta] \;\in\; q \quad \text{mit} \quad a \in T \quad \text{wobei:}$$

$$\Lambda_k(q, [A \to \gamma \bullet]) \;\cap\; (\{a\} \odot \mathsf{First}_k(\beta) \odot \Lambda_k(q, [A' \to \alpha \bullet a\, \beta])) \;\neq\; \emptyset$$

Solche Zustände nennen wir jetzt $LALR(k)$-ungeeignet :-)

Die reduzierte Grammatik G nennen wir $LALR(k)$, falls der kanonische $LR(0)$-Automat $LR(G)$ keine $LALR(k)$-ungeeigneten Zustände enthält :-)

Bevor wir Beispiele betrachten, überlegen wir erst, wie die Mengen $\Lambda_k(q, [A \to \alpha \bullet \beta])$ berechnet werden können :-)

Die reduzierte Grammatik G nennen wir $LALR(k)$, falls der kanonische $LR(0)$-Automat $LR(G)$ keine $LALR(k)$-ungeeigneten Zustände enthält :-)

Bevor wir Beispiele betrachten, überlegen wir erst, wie die Mengen $\Lambda_k(q, [A \to \alpha \bullet \beta])$ berechnet werden können :-)

Idee: Stelle ein Ungleichungssystem auf !!!

$$
\begin{array}{lcll}
\Lambda_k(q_0, [S' \to \bullet\, S]) & \supseteq & \{\epsilon\} & \\
\Lambda_k(q, [A \to \alpha\, X \bullet \beta]) & \supseteq & \Lambda_k(p, [A \to \alpha \bullet\, X\, \beta]) & \text{falls} \quad \delta(p, X) = q \\
\Lambda_k(q, [A \to \bullet\, \gamma]) & \supseteq & \mathsf{First}_k(\beta) \odot \Lambda_k(q, [B \to \alpha \bullet A\, \beta]) & \text{falls} \quad [B \to \alpha \bullet A\, \beta] \in q
\end{array}
$$

Beispiel:

$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & A\,b\,B \mid B \\
A & \rightarrow & a \mid b\,B \\
B & \rightarrow & A
\end{array}
$$

Der kanonische $LR(0)$-Automat hat dann die folgenden Zustände:

$$
\begin{array}{lll}
q_0 = & \{[S' \rightarrow \bullet\, S], & q_2 = \delta(q_0, a) = \{[A \rightarrow a\bullet]\} \\
 & [S \rightarrow \bullet\, A\,b\,B], & \\
 & [A \rightarrow \bullet\, a], & q_3 = \delta(q_0, b) = \{[A \rightarrow b \bullet B], \\
 & [A \rightarrow \bullet\, b\,B], & [B \rightarrow \bullet\, A], \\
 & [S \rightarrow \bullet\, B], & [A \rightarrow \bullet\, a], \\
 & [B \rightarrow \bullet\, A]\} & [A \rightarrow \bullet\, b\,B]\}
\end{array}
$$

$$
q_1 = \delta(q_0, S) = \{[S' \rightarrow S\bullet]\} \qquad q_4 = \delta(q_0, B) = \{[S \rightarrow B\bullet]\}
$$

$$q_5 = \delta(q_0, A) = \{[S \to A \bullet b\, B], [B \to A \bullet]\}$$

$$q_6 = \delta(q_3, A) = \{[B \to A \bullet]\}$$

$$q_7 = \delta(q_3, B) = \{[A \to b\, B \bullet]\}$$

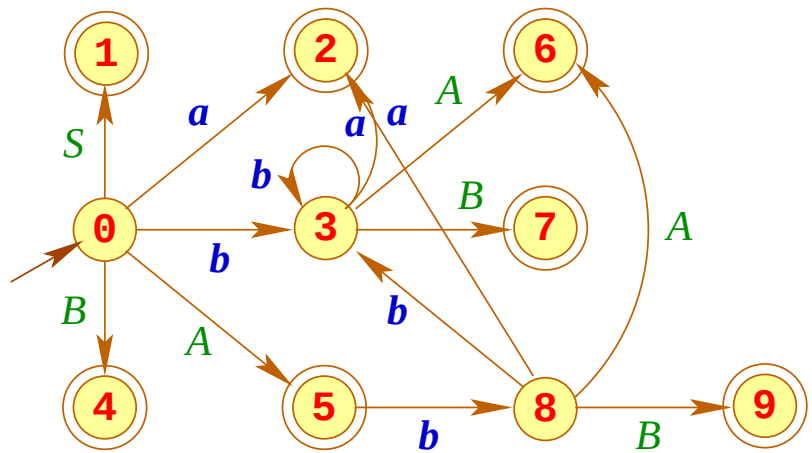
$$q_8 = \delta(q_5, b) = \{[S \to A\, b \bullet B], [B \to \bullet A], [A \to \bullet a], [A \to \bullet b\, B]\}$$

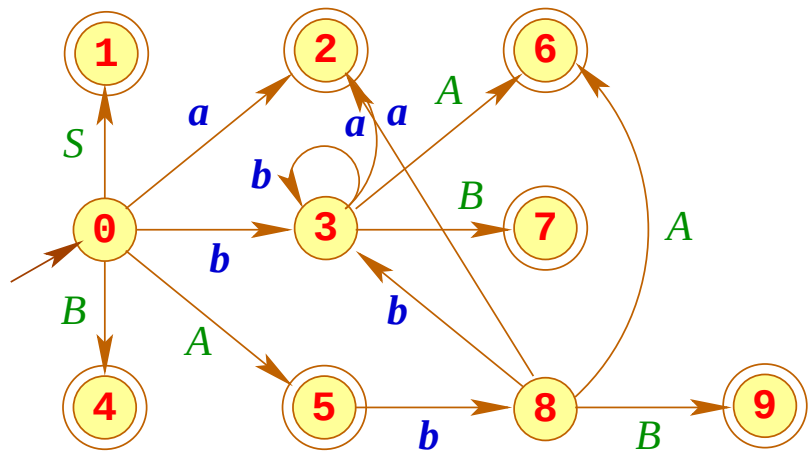
$$q_9 = \delta(q_8, B) = \{[S \to A\, b\, B \bullet]\}$$

Shift-Reduce-Konflikt:

$$q_5 = \{[S \to A \bullet b\, B], [B \to A \bullet]\}$$

Dabei ist: $\mathsf{Follow}_1(B) \cap \{b\} \odot \{\ldots\} = \{\epsilon, b\} \cap \{b\} \neq \emptyset$


1
2
6
0
3
7
4
5
8
9
S
a
a
a
A
b
B
A
b
b
B
A
b
B



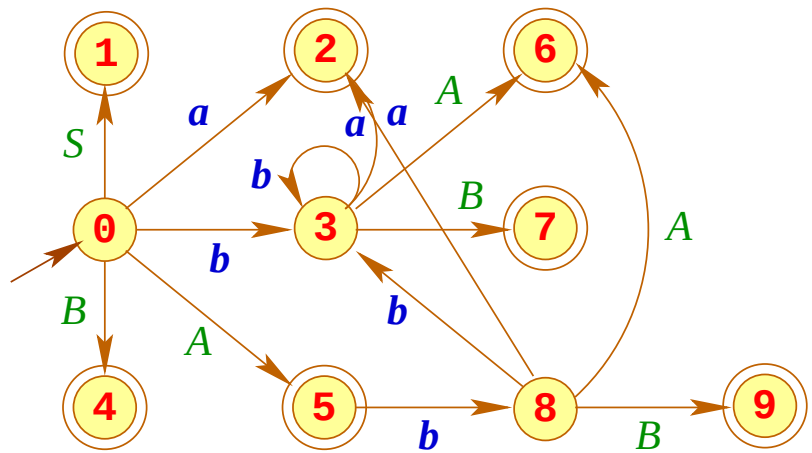
Ausschnitt des Ungleichungssystems:

$$\Lambda_1(q_5, [B \to A\bullet]) \supseteq \Lambda_1(q_0, [B \to \bullet A])$$

$$\Lambda_1(q_0, [B \to \bullet A]) \supseteq \Lambda_1(q_0, [S \to \bullet B])$$

$$\Lambda_1(q_0, [S \to \bullet B]) \supseteq \Lambda_1(q_0, [S' \to \bullet S])$$

$$\Lambda_1(q_0, [S' \to \bullet S]) \supseteq \{\epsilon\}$$



Ausschnitt des Ungleichungssystems:

$$\Lambda_1(q_1, [B \to A\bullet]) \supseteq \Lambda_1(q_0, [B \to \bullet A])$$

$$\Lambda_1(q_0, [B \to \bullet A]) \supseteq \Lambda_1(q_0, [S \to \bullet B])$$

$$\Lambda_1(q_0, [S \to \bullet B]) \supseteq \Lambda_1(q_0, [S' \to \bullet S])$$

$$\Lambda_1(q_0, [S' \to \bullet S]) \supseteq \{\epsilon\}$$

Folglich: $\Lambda_1(q_5, [B \to A\bullet]) = \{\epsilon\}$

Diskussion:

- Das Beispiel ist folglich nicht $SLR(1)$, aber $LALR(1)$:-)
- Das Beispiel ist nicht so an den Haaren herbei gezogen, wie es scheint ...
- Umbenennung: $A \Rightarrow L$ $B \Rightarrow R$ $a \Rightarrow \mathsf{id}$ $b \Rightarrow * \,/\, =$ liefert:

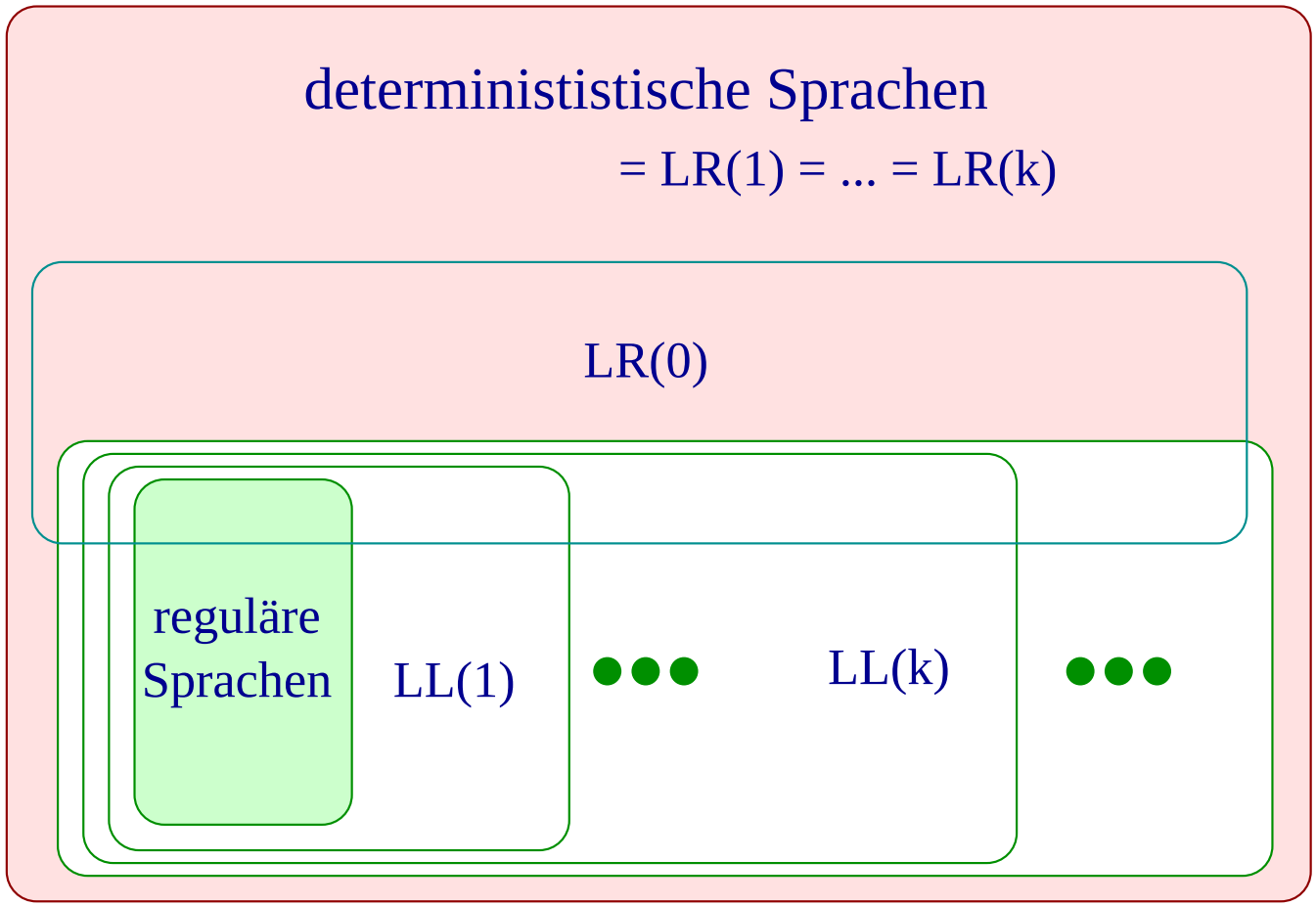
$$
\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & L = R \mid R \\
L & \rightarrow & \mathsf{id} \mid * R \\
R & \rightarrow & L
\end{array}
$$

... d.h. ein Fragment der Grammatik für C-Ausdrücke ;-)

Für $k = 1$ lassen sich die Mengen $\Lambda_k(q, [A \to \alpha \bullet \beta])$ wieder effizient berechnen :-)

Das verbesserte Ungleichungsssystem:

$$
\begin{array}{lcll}
\Lambda_1(q_0, [S' \to \bullet\, S]) & \supseteq & \{\epsilon\} & \\
\Lambda_1(q, [A \to \alpha\, X \bullet \beta]) & \supseteq & \Lambda_1(p, [A \to \alpha \bullet\, X\, \beta]) & \text{falls} \quad \delta(p, X) = q \\
\Lambda_1(q, [A \to \bullet\, \gamma]) & \supseteq & F_\epsilon(X_j) & \text{falls} \quad [B \to \alpha \bullet A\, X_1 \ldots X_m] \in q \\
 & & & \text{und} \quad \mathsf{empty}(X_1) \wedge \ldots \wedge \mathsf{empty}(X_{j-1}) \\
\Lambda_1(q, [A \to \bullet\, \gamma]) & \supseteq & \Lambda_1(q, [B \to \alpha \bullet A\, X_1 \ldots X_m]) & \text{falls} \quad [B \to \alpha \bullet A\, X_1 \ldots X_m] \in q \\
 & & & \text{und} \quad \mathsf{empty}(X_1) \wedge \ldots \wedge \mathsf{empty}(X_m)
\end{array}
$$

$\Longrightarrow$ ein reines Vereinigungsproblem :-))

Übersicht über die Sprachklassen: