Typen werden durch Typ-Ausdrücke beschrieben.

Die Menge T der Typausdrücke enthält:

(1) Basis-Typen: **int**, **boolean**, **float**, **void** ...

(2) Typkonstruktoren, angewendet auf Typen, z.B.:

- Verbunde: **struct** $\{ t_1 \; a_1; \ldots t_k \; a_k; \}$
- Zeiger: $t *$
- Felder: t []

  Achtung:
  In C muss zusätzlich eine Größe spezifiziert werden; die Variable muss dann zwischen t und $[n]$ stehen :-(

- Funktionen: $t \; (t_1, \ldots, t_k)$

  Achtung:
  In C muss die Variable zwischen t und $(t_1, \ldots, t_k)$ stehen.

  In SML dagegen würde man diesen Typ anders herum schreiben:
  $t_1 * \ldots * t_k \to t$:-)

  Wir benutzen: $(t_1, \ldots, t_k)$ als Tupel-Typen.

(3) Typ-Namen.

Typ-Namen sind nützlich:

- als Abkürzung :-)

  In C kann man diese mithilfe von **typedef** einführen:

  $$\textbf{typedef}\ t\ \ x\ ;$$

- zur Konstruktion rekursiver Typen ...

Beispiel:

```
struct list0 {
        int info;
        struct list1 * next;
    };
```

```
struct list1 {
        int info;
        struct list0 * next;
    };
```

Aufgabe:

Gegeben: eine Menge von Typ-Deklarationen $\Gamma = \{t_1\ x_1; \ldots t_m\ x_m;\}$

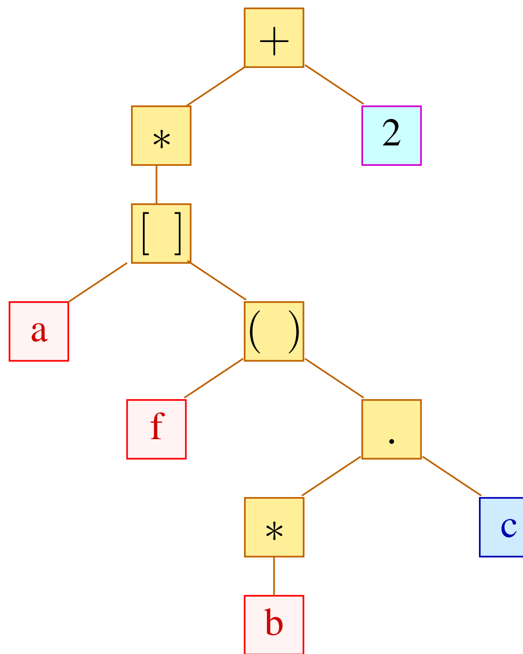
Überprüfe: Kann ein Ausdruck e mit dem Typ t versehen werden?

Beispiel:

```
struct list {int info; struct list *next;};
int f(struct list *l) {return 1;};
struct {struct list *c;} *b;
int *a[11];
```

Betrachte den Ausdruck:

$$*a[f(b \to c)] + 2;$$



Idee:

- Traversiere den Syntaxbaum bottom-up.
- Für Bezeichner sagt uns Γ den richtigen Typ :-)
- Konstanten wie 2 oder 0.5 sehen wir den Typ direkt an ;-)
- Die Typen für die inneren Knoten erschießen wir mithilfe von Typ-Regeln.

Formal betrachten wir Aussagen der Form:

$$\Gamma \vdash e \ : \ t$$

// (In der Typ-Umgebung Γ hat e den Typ t)

Axiome:

Const: $\Gamma \vdash c \ : \ t_c$ (t_c Typ der Konstante c)

Var: $\Gamma \vdash x \ : \ \Gamma(x)$ (x Variable)

Regeln:

Ref: $$\frac{\Gamma \vdash e \ : \ t}{\Gamma \vdash \& e \ : \ t*}$$

Deref: $$\frac{\Gamma \vdash e \ : \ t*}{\Gamma \vdash * e \ : \ t}$$

Array:
$$\frac{\Gamma \vdash e_1 \;:\; t* \qquad \Gamma \vdash e_2 \;:\; \textbf{int}}{\Gamma \vdash e_1[e_2] \;:\; t}$$

Array:
$$\frac{\Gamma \vdash e_1 \;:\; t\,[\,] \qquad \Gamma \vdash e_2 \;:\; \textbf{int}}{\Gamma \vdash e_1[e_2] \;:\; t}$$

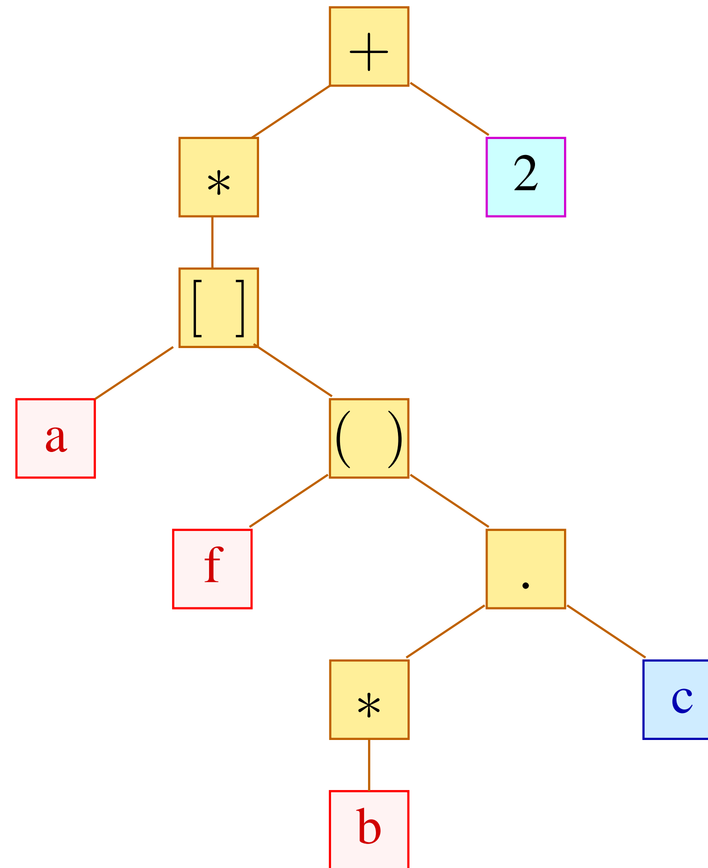
Struct:
$$\frac{\Gamma \vdash e \;:\; \textbf{struct}\ \{t_1\ a_1; \ldots t_m\ a_m;\}}{\Gamma \vdash e.a_i \;:\; t_i}$$

App:
$$\frac{\Gamma \vdash e \;:\; t\,(t_1, \ldots, t_m) \qquad \Gamma \vdash e_1 \;:\; t_1 \quad \ldots \quad \Gamma \vdash e_m \;:\; t_m}{\Gamma \vdash e(e_1, \ldots, e_m) \;:\; t}$$

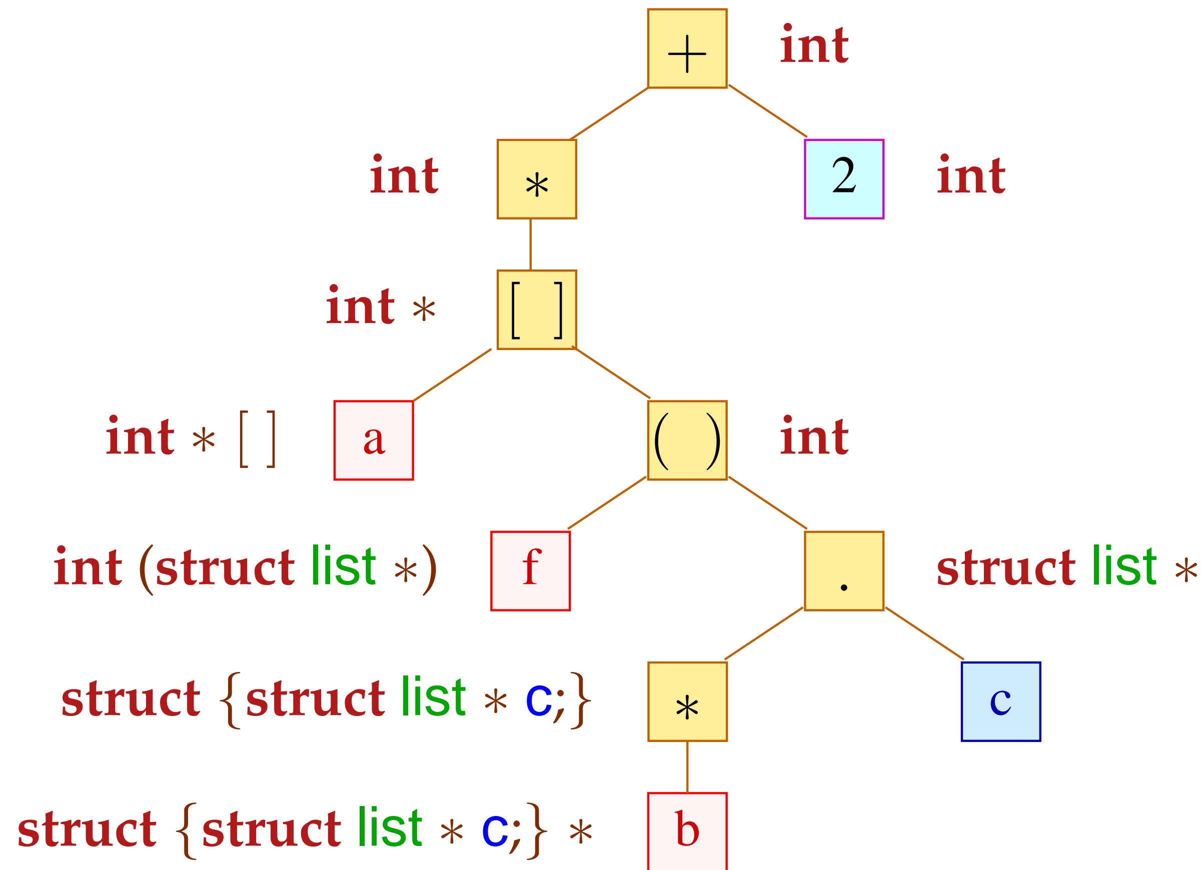
Op:
$$\frac{\Gamma \vdash e_1 \;:\; \textbf{int} \qquad \Gamma \vdash e_2 \;:\; \textbf{int}}{\Gamma \vdash e_1 + e_2 \;:\; \textbf{int}}$$

Cast:
$$\frac{\Gamma \vdash e \;:\; t_1 \qquad t_1 \text{ in } t_2 \text{ konvertierbar}}{\Gamma \vdash (t_2)\ e \;:\; t_2}$$

... im Beispiel:



... im Beispiel:



Diskussion:

- Welche Regel an einem Knoten angewendet werden muss, ergibt sich aus den Typen für die bereits bearbeiteten Kinderknoten :-)
- Dazu muss die Gleichheit von Typen festgestellt werden.

  Achtung:

  struct A {} und **struct** B {} werden als verschieden betrachtet !!

  Nach:

  typedef int C;

  bezeichnen C und **int** immer noch den gleichen Typ :-)
- ...

Diskussion (Forts.):

- ...
- Manche Operatoren wie z.B. $+$ sind überladen: sie besitzen mehrere verschiedene Bedeutungen.
- Welche Bedeutung ausgewählt werden soll, entscheidet sich aufgrund der Argument-Typen. Der Operator $+$ kann zum Beispiel bedeuten:

  $\longrightarrow$ Addition auf **short**, **int**, **long**, **float** oder **double** :-)

  $\longrightarrow$ Pointer-Arithmetik :-))

- Ist die Bedeutung ermittelt, wird (in bestimmten Fällen) für das Argument, das noch nicht den richtigen Typ hat, eine Typ-Konvertierung eingefügt.

Strukturelle Typ-Gleichheit:

Semantisch können wir zwei rekursive Typen t_1, t_2 als gleich betrachten, falls sie die gleiche Menge von Pfaden zulassen.

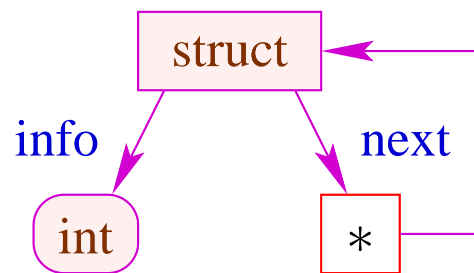
Beispiel:

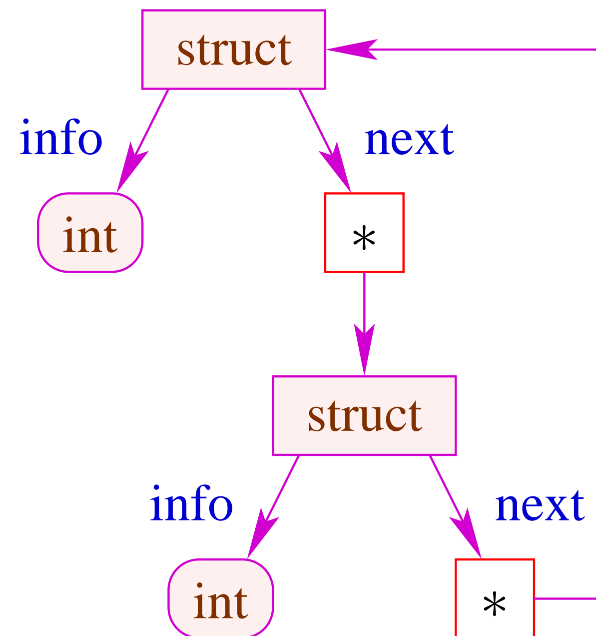
```
struct list {
    int info;
    struct list * next;
}
```

```
struct list1 {
    int info;
    struct {
        int info;
        struct list1 * next;
    } * next;
}
```

Rekursive Typen können wir als gerichtete Graphen darstellen.

... im Beispiel:





Beobachtung:

- Hat ein Knoten mehr als einen Nachfolger, tragen die ausgehenden Kanten unterschiedliche Beschriftungen :-)
- Das kann man auch für Funktions-Knoten erreichen :-)
- Der Typgraph kann damit als deterministischer endlicher Automat aufgefasst werden, der alle Pfade durch den Typ akzeptiert :-))
- Zwei Typen können wir dann als äquivalent auffassen, wenn ihre Typgraphen, aufgefasst als DFAs äquivalent sind.
- Insbesondere gibt es stets einen eindeutig bestimmten minimalen Typgraphen für jeden Typ :-)
- Strukturelle Äquivalenz rekursiver Typen ist deshalb schnell entscheidbar !!!

Alternativer Algorithmus:

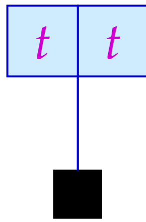
Idee:

- Verwalte Äquivalenz-Anfragen für je zwei Typausdrücke ...
- Sind die beiden Ausdrücke syntaktisch gleich, ist alles gut :-)
- Andernfalls reduziere die Äquivalenz-Anfrage zwischen Äquivalenz-Anfragen zwischen (hoffentlich einfacheren anderen Typausdrücken :-)

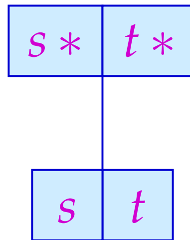
Nehmen wir an, rekursive Typen würden mithilfe von Typ-Gleichungen der Form:

$$A = t$$

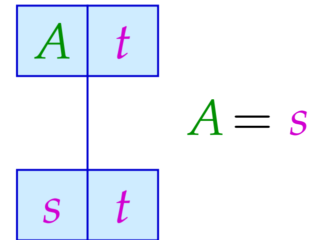
eingeführt ...



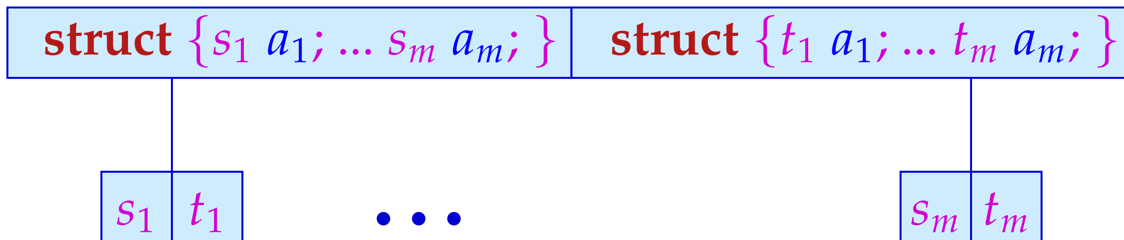
t
t



s ∗
t ∗
s
t



A
t
A = s
s
t



struct {s1 a1; ... sm am; }
struct {t1 a1; ... tm am; }
s1
t1
sm
tm

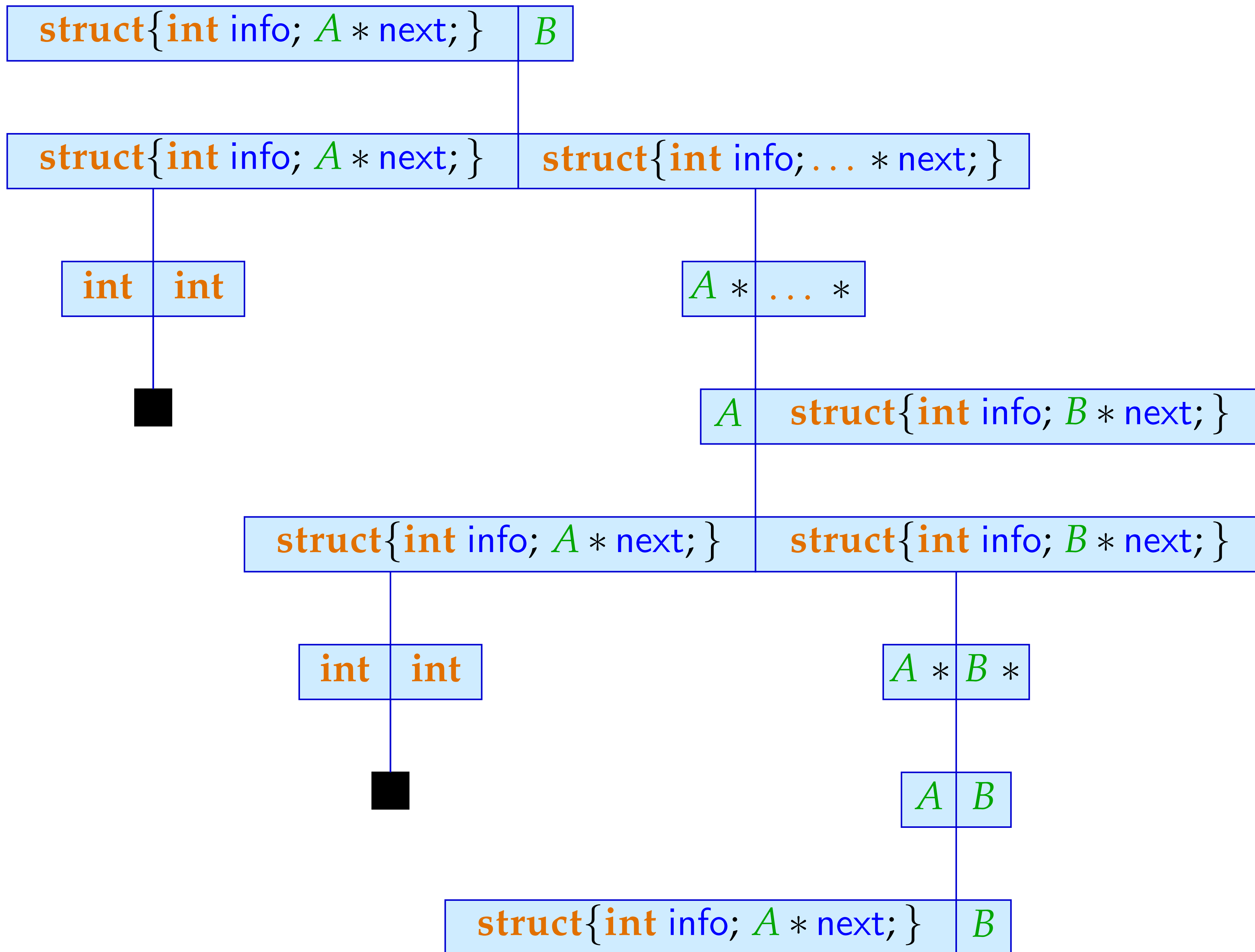
... im Beispiel:

$$\begin{array}{lll} A & = & \textbf{struct}\ \{\textbf{int}\ \mathsf{info};\ A * \mathsf{next};\} \\ B & = & \textbf{struct}\ \{\textbf{int}\ \mathsf{info}; \\ & & \textbf{struct}\ \{\textbf{int}\ \mathsf{info};\ B * \mathsf{next};\} * \mathsf{next};\} \end{array}$$

Wir fragen uns etwa, ob gilt:

$$\textbf{struct}\ \{\textbf{int}\ \mathsf{info};\ A * \mathsf{next};\} = B$$

Dazu konstruieren wir:


struct{int info; A * next; }
B
struct{int info; A * next; }
struct{int info; . . . * next; }
int
int
A *
. . . *
A
struct{int info; B * next; }
struct{int info; A * next; }
struct{int info; B * next; }
int
int
A *
B *
A
B
struct{int info; A * next; }
B

Diskussion:

- Stoßen wir bei der Konstruktion des Beweisbaums auf eine Äquivalenz-Anfrage, auf die keine Regel anwendbar ist, gibt es einen Widerspruch !!!
- Die Konstruktion des Beweisbaums kann dazu führen, dass die gleiche Äquivalenz-Anfrage ein weiteres Mal auftritt ...
- Taucht eine Äquivalenz-Anfrage ein weiteres Mal auf, können wir hier abbrechen ;-)

$\Longrightarrow$ die Anzahl zu betrachtender Anfragen ist endlich :-)

$\Longrightarrow$ das Verfahren terminiert :-))

Teiltypen

- Auf den arithmetischen Basistypen **char**, **int**,**long**, ... gibt es i.a. eine reichhaltige Teiltypen-Beziehungen.
- Dabei bedeutet $t_1 \leq t_2$, dass die Menge der Werte vom Typ t_1

  (1) eine Teilmenge der Werte vom Typ t_2 sind :-)

  (2) in einen Wert vom Typ t_2 konvertiert werden können :-)

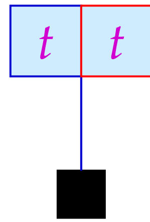
  (3) die Anforderungen an Werte vom Typ t_2 erfüllen ...

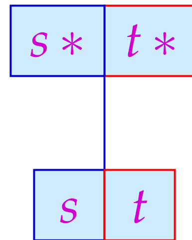
Erweitere Teiltypen-Beziehungen der Basistypen auf komplexe Typen :-)

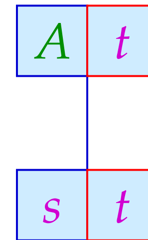
Beispiel:

```
string extractInfo (struct { string info; }  x) {
        return x.info;
    }
```

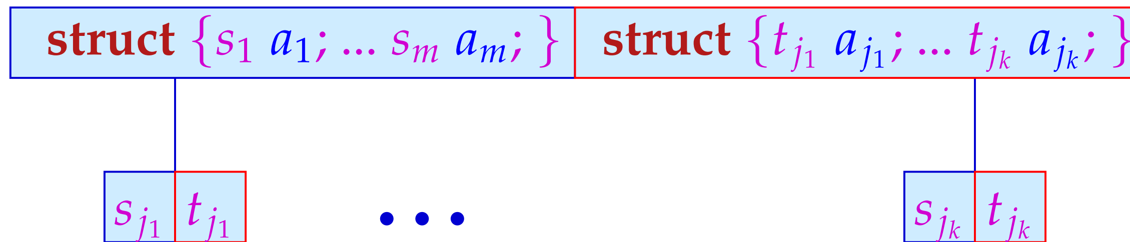
- Offenkundig funktioniert extractInfo für alle Argument-Strukturen, die eine Komponente **string** info besitzen :-)
- Die Idee ist vergleichbar zur Anwendbarkeit auf Unterklassen (aber allgemeiner :-)
- Wann $t_1 \leq t_2$ gelten soll, beschreiben wir durch Regeln ...

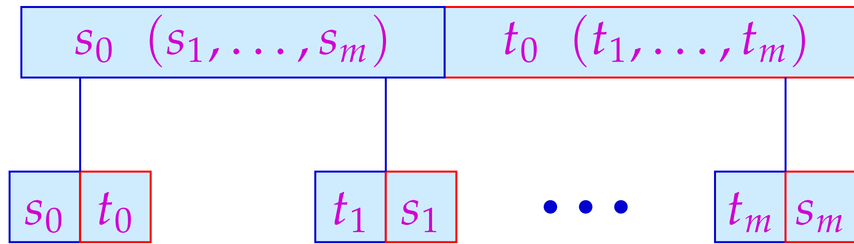


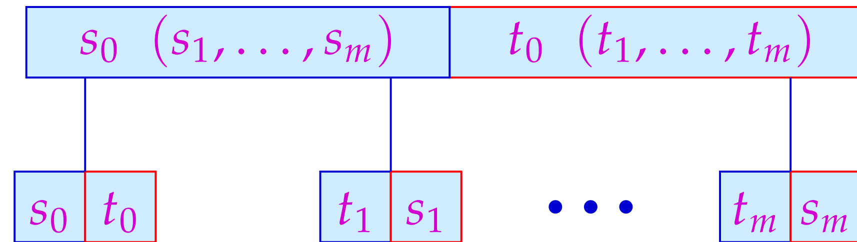




$A = s$

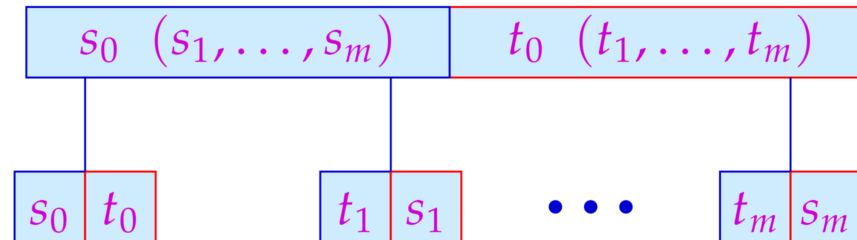



$s_0 \;\; (s_1, \ldots, s_m)$
$t_0 \;\; (t_1, \ldots, t_m)$
s_0
t_0
t_1
s_1
t_m
s_m



Beispiele:

struct {**int** a; **int** b; }	$\leq$	**struct** {**float** a; }
int (**int**)	$\not\leq$	**float** (**float**)



Beispiele:

$$\mathbf{struct}\ \{\mathbf{int}\ a;\ \mathbf{int}\ b;\} \quad \leq \quad \mathbf{struct}\ \{\mathbf{float}\ a;\}$$
$$\mathbf{int}\ (\mathbf{int}) \quad \not\leq \quad \mathbf{float}\ (\mathbf{float})$$

Achtung:

- Bei den Argumenten dreht sich die Anordnung der Typen gerade um !!!
- Diese Regeln können wir direkt benutzen, um auch für rekursive Typen die Teiltyp-Relation zu entscheiden :-)

Beispiel:

$$R_1 = \textbf{struct } \{\textbf{int } a;\ R_1\,(R_1)\ f;\}$$
$$S_1 = \textbf{struct } \{\textbf{int } a;\ \textbf{int } b;\ S_1\,(S_1)\ f;\}$$
$$R_2 = \textbf{struct } \{\textbf{int } a;\ R_2\,(S_2)\ f;\}$$
$$S_2 = \textbf{struct } \{\textbf{int } a;\ \textbf{int } b;\ S_2\,(R_2)\ f;\}$$