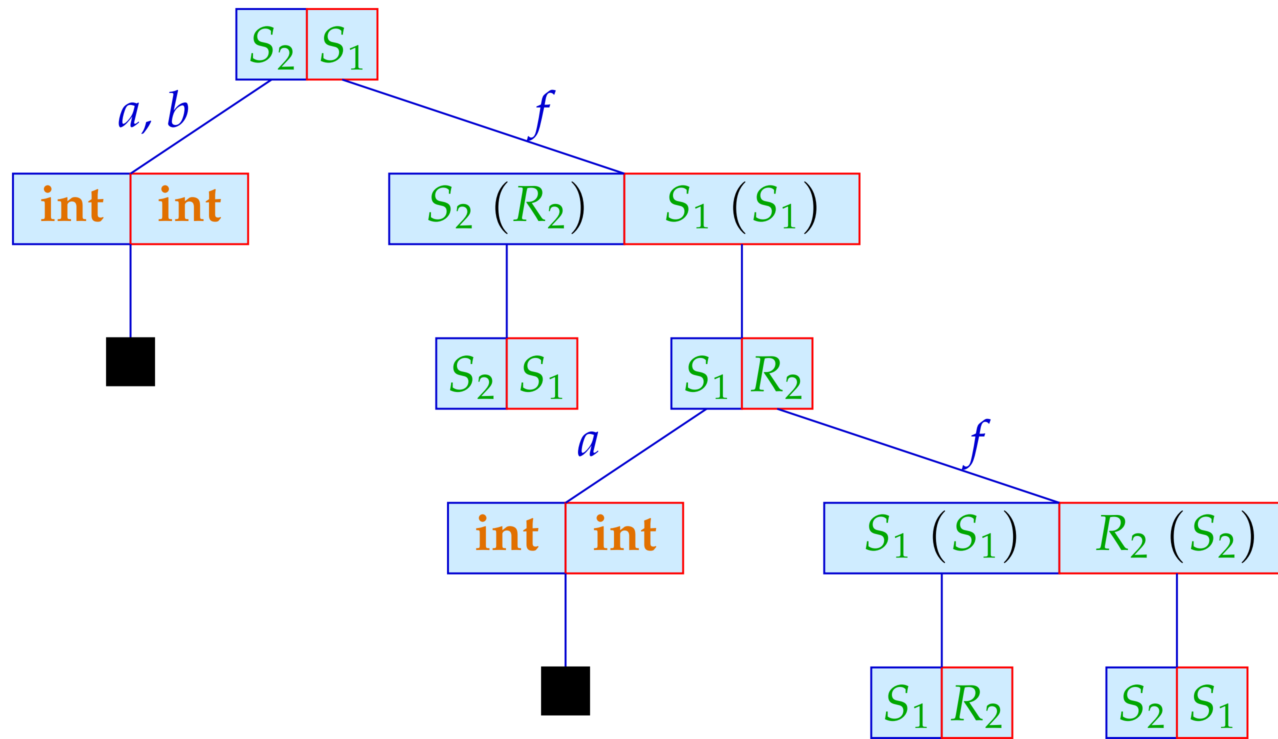
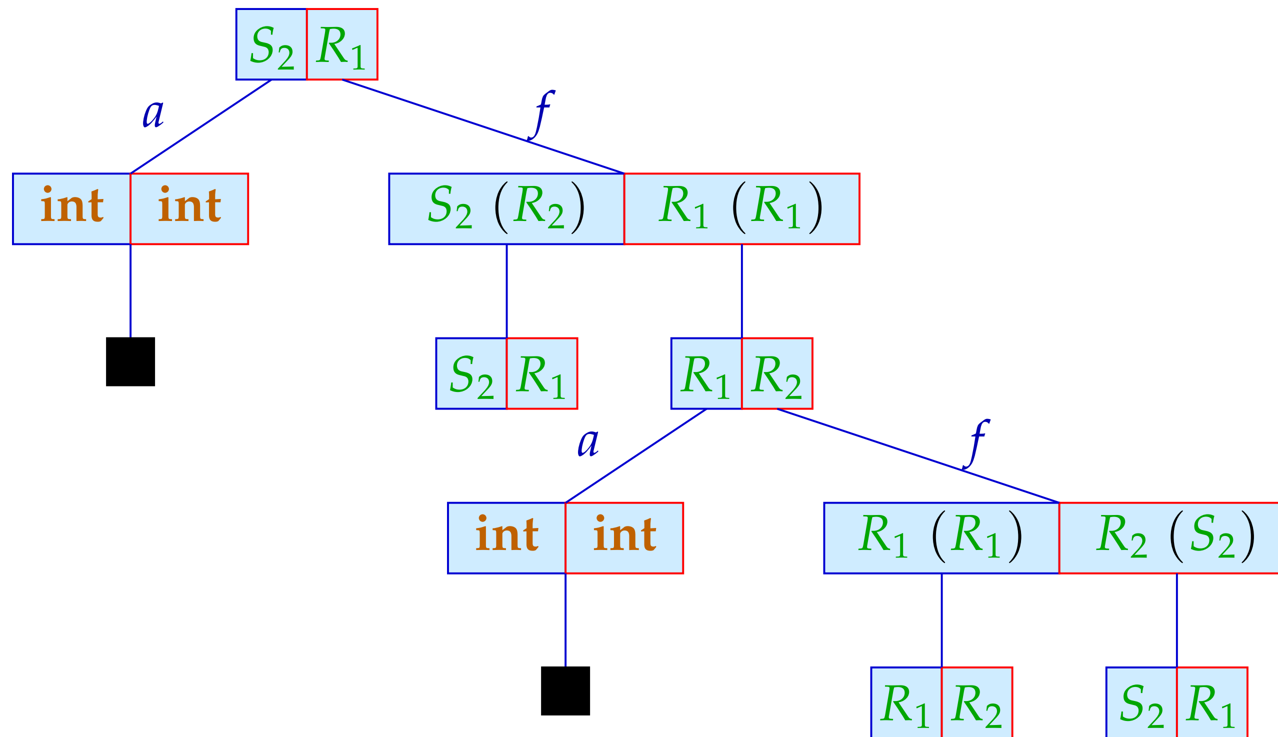


S_2 S_1
a, b
f
int int
$S_2\ (R_2)$ $S_1\ (S_1)$
S_2 S_1
S_1 R_2
a
f
int int
$S_1\ (S_1)$ $R_2\ (S_2)$
S_1 R_2
S_2 S_1



S_2 R_1
a
f
int int
$S_2\ (R_2)$ $R_1\ (R_1)$
S_2 R_1
R_1 R_2
a
f
int int
$R_1\ (R_1)$ $R_2\ (S_2)$
R_1 R_2
S_2 R_1

Diskussion:

- Um die Beweisbäume nicht in den Himmel wachsen zu lassen, wurden einige Zwischenknoten ausgelassen :-)
- Strukturelle Teiltypen sind sehr mächtig und deshalb nicht ganz leicht zu durchschauen.
- Java verallgemeinert Strukturen zu Objekten / Klassen.
- Teiltyp-Beziehungen zwischen Klassen müssen explizit deklariert werden :-)
- Durch Vererbung wird sichergestellt, dass Unterklassen über die (sichtbaren) Komponenten der Oberklasse verfügen :-))
- Überdecken einer Komponente mit einer anderen gleichen Namens ist möglich — aber nur, wenn diese keine Methode ist :-(

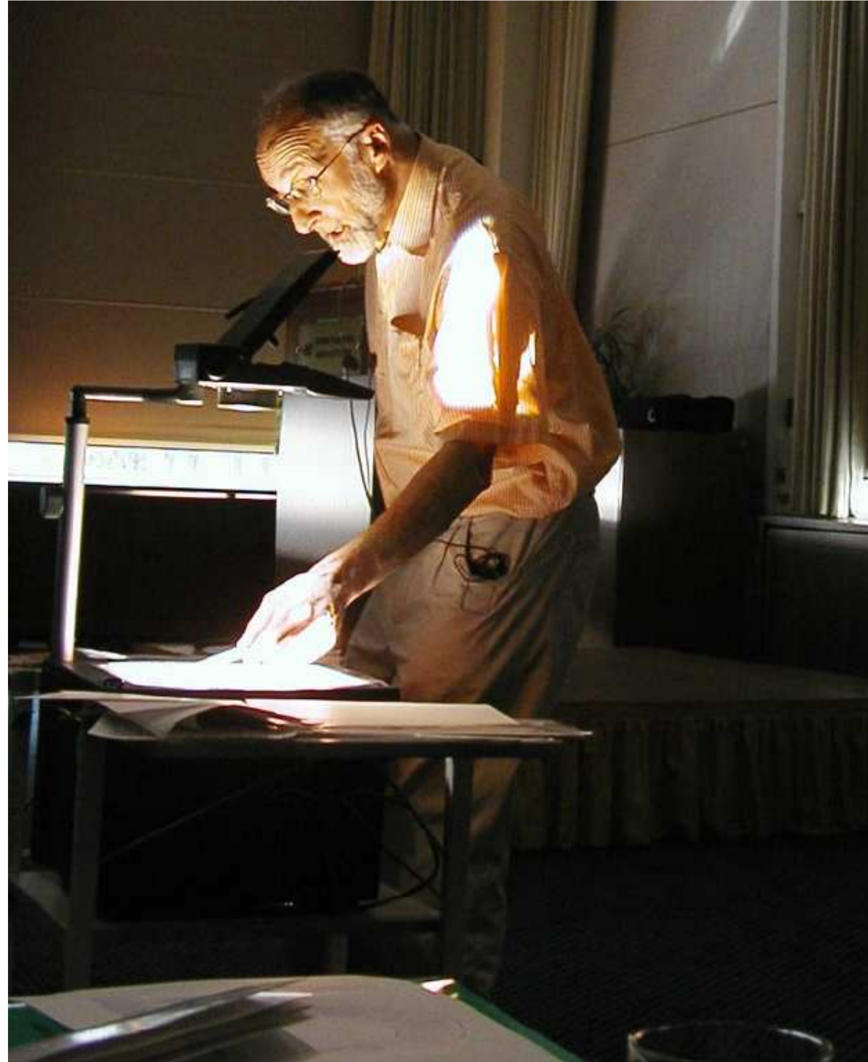
3.3 Inferieren von Typen

- Im Gegensatz zu imperativen Sprachen kann in funktionalen Programmiersprachen der Typ von Bezeichnern (i.a.) weggelassen werden.
- Diese werden dann automatisch hergeleitet :-)

Beispiel:

$$\begin{array}{lll} \textbf{fun}\ \mathsf{fac}\ \mathsf{x} & = & \textbf{if}\ \mathsf{x} \leq 0\ \textbf{then}\ 1 \\ & & \textbf{else}\ \mathsf{x} \cdot \mathsf{fac}\ (\mathsf{x} - 1) \end{array}$$

Dafür findet der SML-Compiler: $\mathsf{fac} : \textbf{int} \to \textbf{int}$



Robin (Dumbledore) Milner, Edinburgh

Idee: J.R. Hindley, R. Milner

Stelle Axiome und Regeln auf, die den Typ eines Ausdrucks in Beziehung setzen zu den Typen seiner Teilausdrücke :-)

Der Einfachheit halber betrachten wir nur eine funktionale Kernsprache ...

$$
\begin{array}{lll}
e & ::= & b \mid x \mid (\Box_1\ e) \mid (e_1\ \Box_2\ e_2) \\
 & \mid & (\textbf{if}\ e_0\ \textbf{then}\ e_1\ \textbf{else}\ e_2) \\
 & \mid & (e_1, \ldots, e_k) \mid [\,] \mid (e_1\ :\ e_2) \\
 & \mid & (\textbf{case}\ e_0\ \textbf{of}\ [\,] \rightarrow e_1;\ h : t \rightarrow e_2) \\
 & \mid & (e_1\ e_2) \mid (\textbf{fn}\ (x_1, \ldots, x_m) \Rightarrow e) \\
 & \mid & (\textbf{letrec}\ x_1 = e_1; \ldots; x_n = e_n\ \textbf{in}\ e_0) \\
 & \mid & (\textbf{let}\ x_1 = e_1; \ldots; x_n = e_n\ \textbf{in}\ e_0)
\end{array}
$$

Beispiel:

$$
\begin{array}{llll}
\textbf{letrec} & \mathsf{rev} & = & \textbf{fn}\ x \Rightarrow \mathsf{r}\ x\ [\,];\\
 & \mathsf{r} & = & \textbf{fn}\ x \Rightarrow \textbf{fn}\ y \Rightarrow\ \textbf{case}\ x\ \textbf{of}\\
 & & & \qquad\qquad [\,] \ \rightarrow\ y;\\
 & & & \qquad\qquad h : t\ \rightarrow\ \mathsf{r}\ t\ (h\ :\ y)\\
\textbf{in} & \mathsf{rev}\ (1\ :\ 2\ :\ 3\ :\ [\,]) & &
\end{array}
$$

Wir benutzen die üblichen Präzedenz-Regeln und Assoziativitäten, um hässliche Klammern zu sparen :-)

Als einzige Datenstrukturen betrachten wir Tupel und List :-))

Wir benutzen eine Syntax von Typen, die an SML angelehnt ist ...

$$t \quad ::= \quad \mathbf{int} \mid \mathbf{bool} \mid (t_1, \ldots, t_m) \mid \mathsf{list}\ t \mid t_1 \rightarrow t_2$$

Wir betrachten wieder Typ-Aussagen der Form:

$$\Gamma \vdash e : t$$

Wir benutzen eine Syntax von Typen, die an SML angelehnt ist ...

$$t \quad ::= \quad \textbf{int} \mid \textbf{bool} \mid (t_1, \ldots, t_m) \mid \mathsf{list}\ t \mid t_1 \rightarrow t_2$$

Wir betrachten wieder Typ-Aussagen der Form:

$$\Gamma \vdash e : t$$

Axiome:

Const:	$\Gamma \vdash c : t_c$	(t_c Typ der Konstante c)
Nil:	$\Gamma \vdash [\,] : \mathsf{list}\ t$	(t beliebig)
Var:	$\Gamma \vdash x : \Gamma(x)$	(x Variable)

Regeln:

Op:
$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : \textbf{int} \qquad \Gamma \vdash e_2 : \textbf{int}}{\Gamma \vdash e_1 + e_2 : \textbf{int}}$$

If:
$$\frac{\Gamma \vdash e_0 : \textbf{bool} \qquad \Gamma \vdash e_1 : t \qquad \Gamma \vdash e_2 : t}{\Gamma \vdash (\textbf{if } e_0 \textbf{ then } e_1 \textbf{ else } e_2) : t}$$

Tupel:
$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : t_1 \quad \ldots \quad \Gamma \vdash e_m : t_m}{\Gamma \vdash (e_1, \ldots, e_m) : (t_1, \ldots, t_m)}$$

App:
$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : t_1 \to t_2 \qquad \Gamma \vdash e_2 : t_1}{\Gamma \vdash (e_1\ e_2) : t_2}$$

Fun:
$$\frac{\Gamma \oplus \{x_1 \mapsto t_1, \ldots, x_m \mapsto t_m\} \vdash e : t}{\Gamma \vdash \textbf{fn } (x_1, \ldots, x_m) \Rightarrow e : (t_1, \ldots, t_m) \to t}$$

...

$\dots$

Cons:
$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : t \qquad \Gamma \vdash e_2 : \textsf{list}\ t}{\Gamma \vdash (e_1 : e_2) : \textsf{list}\ t}$$

Case:
$$\frac{\Gamma \vdash e_0 : \textsf{list}\ t_1 \qquad \Gamma \vdash e_1 : t \qquad \Gamma \oplus \{x \mapsto t_1, y \mapsto \textsf{list}\ t_1\} \vdash e_2 : t}{\Gamma \vdash (\textbf{case}\ e_0\ \textbf{of}\ [\,] \to e_1;\ x : y \to e_2) : t}$$

Letrec:
$$\frac{\Gamma' \vdash e_1 : t_1 \quad \dots \quad \Gamma' \vdash e_m : t_m \quad \Gamma' \vdash e_0 : t}{\Gamma \vdash (\textbf{letrec}\ x_1 = e_1; \dots; x_m = e_m\ \textbf{in}\ e_0) : t}$$

wobei $\Gamma' = \Gamma \oplus \{x_1 \mapsto t_1, \dots, x_m \mapsto t_m\}$

$\dots$

Cons: $$\frac{\Gamma \vdash e_1 : t \qquad \Gamma \vdash e_2 : \textsf{list}\ t}{\Gamma \vdash (e_1 : e_2) : \textsf{list}\ t}$$

Case: $$\frac{\Gamma \vdash e_0 : \textsf{list}\ t_1 \qquad \Gamma \vdash e_1 : t \qquad \Gamma \oplus \{x \mapsto t_1, y \mapsto \textsf{list}\ t_1\} \vdash e_2 : t}{\Gamma \vdash (\textbf{case}\ e_0\ \textbf{of}\ [\,] \to e_1;\ x : y \to e_2) : t}$$

Letrec: $$\frac{\Gamma' \vdash e_1 : t_1 \quad \dots \quad \Gamma' \vdash e_m : t_m \quad \Gamma' \vdash e_0 : t}{\Gamma \vdash (\textbf{letrec}\ x_1 = e_1; \dots; x_m = e_m\ \textbf{in}\ e_0) : t}$$

wobei $\Gamma' = \Gamma \oplus \{x_1 \mapsto t_1, \dots, x_m \mapsto t_m\}$

Könnten wir die Typen für alle Variablen-Vorkommen raten, ließe sich mithilfe der Regeln überprüfen, dass unsere Wahl korrekt war :-)

$\dots$

Cons:
$$\frac{\Gamma \vdash e_1 : t \qquad \Gamma \vdash e_2 : \text{list } t}{\Gamma \vdash (e_1 : e_2) : \text{list } t}$$

Case:
$$\frac{\Gamma \vdash e_0 : \text{list } t_1 \qquad \Gamma \vdash e_1 : t \qquad \Gamma \oplus \{x \mapsto t_1, y \mapsto \text{list } t_1\} \vdash e_2 : t}{\Gamma \vdash (\textbf{case } e_0 \textbf{ of } [\,] \to e_1;\ x : y \to e_2) : t}$$

Letrec:
$$\frac{\Gamma' \vdash e_1 : t_1 \quad \dots \quad \Gamma' \vdash e_m : t_m \quad \Gamma' \vdash e_0 : t}{\Gamma \vdash (\textbf{letrec } x_1 = e_1; \dots; x_m = e_m \textbf{ in } e_0) : t}$$

wobei $\Gamma' = \Gamma \oplus \{x_1 \mapsto t_1, \dots, x_m \mapsto t_m\}$

Könnten wir die Typen für alle Variablen-Vorkommen raten, ließe sich mithilfe der Regeln überprüfen, dass unsere Wahl korrekt war :-)

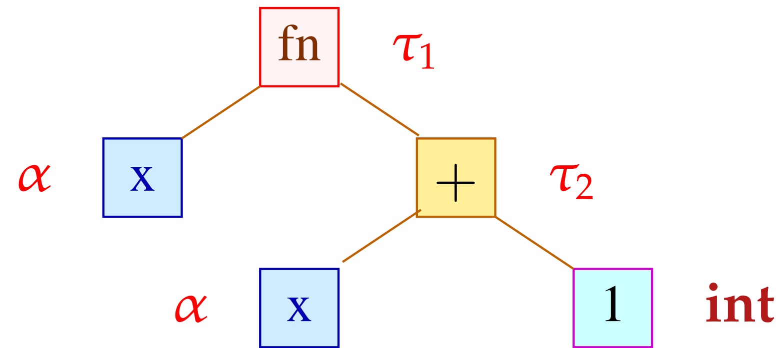
Wie raten wir die Typen der Variablen ???

Idee:

- Mache die Namen der verschiedenen Variablen eindeutig.
- Führe Typ-Variablen für die unbekannten Typen der Variablen und Teilausdrücke ein.
- Sammle die Gleichungen, die notwendigerweise zwischen den Typ-Variablen gelten müssen.
- Finde für diese Gleichungen Lösungen :-)

Beispiel:

$$\textbf{fn } x \Rightarrow x + 1$$



Gleichungen:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \alpha \to \tau_2 \\ \tau_2 &= \mathbf{int} \\ \alpha &= \mathbf{int} \end{aligned}$$

Wir schließen: $\tau_1 = \mathbf{int} \to \mathbf{int}$

Für jede Programm-Variable x und für jedes Vorkommen eines Teilausdrucks e führen wir die Typ-Variable $\alpha[x]$ bzw. $\tau[e]$ ein.

Jede Regel-Anwendung gibt dann Anlass zu einigen Gleichungen ...

Const:	$e \equiv c$	$\Longrightarrow$	$\tau[e] = \tau_c$
Nil:	$e \equiv [\,]$	$\Longrightarrow$	$\tau[e] = \text{list}\ \alpha \qquad (\alpha$ neu$)$
Var:	$e \equiv x$	$\Longrightarrow$	$\tau[e] = \alpha[x]$
Op:	$e \equiv e_1 + e_2$	$\Longrightarrow$	$\tau[e] = \tau[e_1] = \tau[e_2] = \textbf{int}$
Tupel:	$e \equiv (e_1, \ldots, e_m)$	$\Longrightarrow$	$\tau[e] = (\tau[e_1], \ldots, \tau[e_m])$
Cons:	$e \equiv e_1 : e_2$	$\Longrightarrow$	$\tau[e] = \tau[e_2] = \text{list}\ \tau[e_1]$

$\ldots$

$\dots$

If: $e \equiv \textbf{if } e_0 \textbf{ then } e_1 \textbf{ else } e_2 \quad \Longrightarrow \quad \tau[e_0] = \textbf{bool}$

$\tau[e] = \tau[e_1] = \tau[e_2]$

Case: $e \equiv \textbf{case } e_0 \textbf{ of } [\,] \to e_1;\ x : y \to e_2 \quad \Longrightarrow \quad \tau[e_0] = \alpha[y] = \mathsf{list}\ \alpha[x]$

$\tau[e] = \tau[e_1] = \tau[e_2]$

Fun: $e \equiv \textbf{fn } (x_1, \dots, x_m) \Rightarrow e_1 \quad \Longrightarrow \quad \tau[e] = (\alpha[x_1], \dots, \alpha[x_m]) \to \tau[e_1]$

App: $e \equiv e_1\ e_2 \quad \Longrightarrow \quad \tau[e_1] = \tau[e_2] \to \tau[e]$

Letrec: $e \equiv \textbf{letrec } x_1 = e_1; \dots; x_m = e_m \textbf{ in } e_0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha[x_1] = \tau[e_1] \dots$

$\alpha[x_m] = \tau[e_m]$

$\tau[e] = \tau[e_0]$

Bemerkung:

- Die möglichen Typ-Zuordnungen an Variablen und Programm-Ausdrücke erhalten wir als Lösung eines Gleichungssystems über Typ-Termen :-)
- Das Lösen von Systemen von Term-Gleichungen nennt man auch Unifikation :-)

Bemerkung:

- Die möglichen Typ-Zuordnungen an Variablen und Programm-Ausdrücke erhalten wir als Lösung eines Gleichungssystems über Typ-Termen :-)
- Das Lösen von Systemen von Term-Gleichungen nennt man auch Unifikation :-)

Beispiel:

$$g(z, f(x)) \;=\; g(f(x), f(a))$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist die Substitution $\{x \mapsto a, z \mapsto f(a)\}$

In dem Fall ist das offenbar die einzige :-)

Satz:

Jedes System von Term-Gleichungen:

$$s_i = t_i \qquad i = 1, \ldots, m$$

hat entweder keine Lösung oder eine allgemeinste Lösung.

Satz:

Jedes System von Term-Gleichungen:

$$s_i = t_i \qquad i = 1, \ldots, m$$

hat entweder keine Lösung oder eine allgemeinste Lösung.

Eine allgemeinste Lösung ist eine Substitution σ mit den Eigenschaften:

- σ ist eine Lösung, d.h. $\sigma(s_i) = \sigma(t_i)$ für alle i.
- σ ist allgemeinst, d.h. für jede andere Lösung τ gilt: $\tau = \tau' \circ \sigma$ für eine Substitution τ' :-)

Beispiele:

(1) $f(a) = g(x)$ — hat keine Lösung :-)

(2) $x = f(x)$ — hat ebenfalls keine Lösung ;-)

(3) $f(x) = f(a)$ — hat genau eine Lösung:-)

(4) $f(x) = f(g(y))$ — hat unendlich viele Lösungen :-)

(5) $x_0 = f(x_1, x_1), \ldots, x_{n-1} = f(x_n, x_n)$ —

hat mindestens exponentiell große Lösungen !!!

Bemerkungen:

- Es gibt genau eine Lösung, falls die allgemeinste Lösung keine Variablen enthält, d.h. ground ist :-)
- Gibt es zwei verschiedene Lösungen, dann bereits unendlich viele ;-)
- Achtung: Es kann mehrere allgemeinste Lösungen geben !!!

  Beispiel: $x = y$

  Allgemeinste Lösungen sind : $\{x \mapsto y\}$ oder $\{y \mapsto x\}$

  Diese sind allerdings nicht sehr verschieden :-)
- Eine allgemeinste Lösung kann immer idempotent gewählt werden, d.h. $\sigma = \sigma \circ \sigma$.

  Beispiel: $x = x \qquad y = y$

  Nicht idempotente Lösung: $\{x \mapsto y, y \mapsto x\}$

  Idempotente Lösung: $\{x \mapsto x, y \mapsto y\}$

Berechnung einer allgemeinsten Lösung:

$$
\begin{array}{l}
\textbf{fun}\ \ \mathsf{occurs}\ (x, t) \ = \ \textbf{case}\ t \\
\qquad\qquad \textbf{of}\ \ x \qquad\qquad\quad \rightarrow \ \mathsf{true} \\
\qquad\qquad \mid \ \ f(t_1, \ldots, t_k) \ \rightarrow \ \mathsf{occurs}\ (x, t_1) \vee \ldots \vee \mathsf{occurs}\ (x, t_k) \\
\qquad\qquad \mid \ \ _ \qquad\qquad\quad \rightarrow \ \mathsf{false} \\
\textbf{fun}\ \ \mathsf{unify}\ (s, t)\ \theta \ = \ \textbf{if}\ \ \theta\, s \equiv \theta\, t\ \ \textbf{then}\ \ \theta \\
\qquad\qquad \textbf{else}\ \ \textbf{case}\ \ (\theta\, s, \theta\, t) \\
\qquad\qquad\quad \textbf{of}\ \ (x, x) \ \rightarrow \ \theta \\
\qquad\qquad\qquad\ \ (x, t) \ \rightarrow \ \textbf{if}\ \ \mathsf{occurs}\ (x, t)\ \ \textbf{then}\ \ \mathsf{Fail} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \textbf{else}\ \ \{x \mapsto t\} \circ \theta \\
\qquad\qquad\quad \mid \ \ (t, x) \ \rightarrow \ \textbf{if}\ \ \mathsf{occurs}\ (x, t)\ \ \textbf{then}\ \ \mathsf{Fail} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \textbf{else}\ \ \{x \mapsto t\} \circ \theta \\
\qquad\qquad\quad \mid \ \ (f(s_1, \ldots, s_k), f(t_1, \ldots, t_k)) \ \rightarrow \ \mathsf{unifyList}\ [(s_1, t_1), \ldots, (s_k, t_k)]\ \theta \\
\qquad\qquad\quad \mid \ \ _ \ \rightarrow \ \mathsf{Fail}
\end{array}
$$

...

```
and unifyList list θ  =  case list
          of  [ ]  →  θ
           |  ((s, t) :: rest)  →  let val θ = unify (s, t) θ
                                   in if θ = Fail then Fail
                                      else unifyList rest θ
                                   end
```

```
...
and unifyList list θ  =  case list
          of  [ ]  →  θ
           |  ((s,t) :: rest)  →  let val θ = unify (s,t) θ
                                  in if θ = Fail then Fail
                                        else unifyList rest θ
                                  end
```

Diskussion:

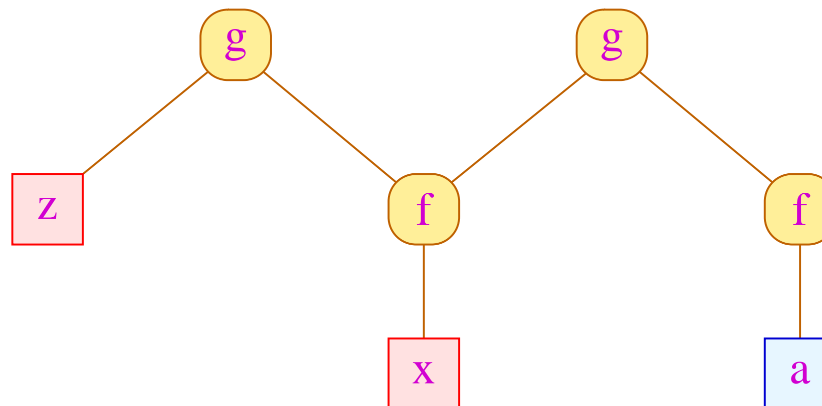
- Der Algorithmus startet mit unifyList $[(s_1, t_1), \ldots, (s_m, t_m)]$ $\{ \}$ ...
- Der Algorithmus liefert sogar eine idempotente allgemeinste Lösung :-)
- Leider hat er möglicherweise exponentielle Laufzeit :-(
- Lässt sich das verbessern ???

Idee:

- Wir repräsentieren die Terme der Gleichungen als Graphen.
- Dabei identifizieren wir bereits isomorphe Teilterme ;-)
- ...

... im Beispiel:

$$g(z, f(x)) \;=\; g(f(x), f(a))$$

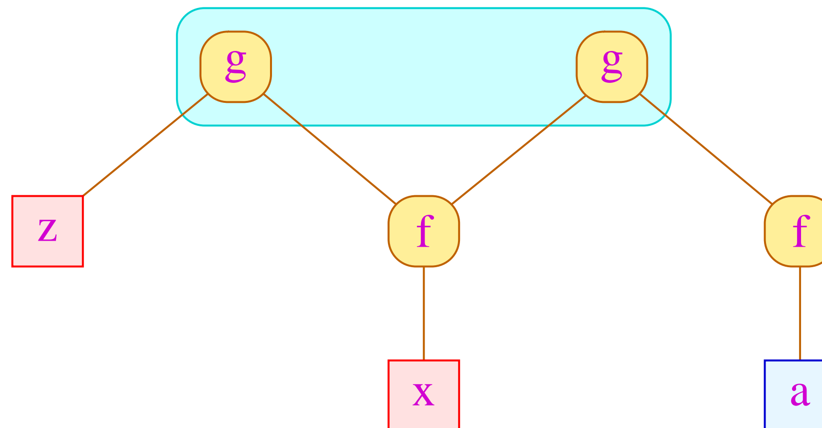


Idee:

- Wir repräsentieren die Terme der Gleichungen als Graphen.
- Dabei identifizieren wir bereits isomorphe Teilterme ;-)
- ...

... im Beispiel:

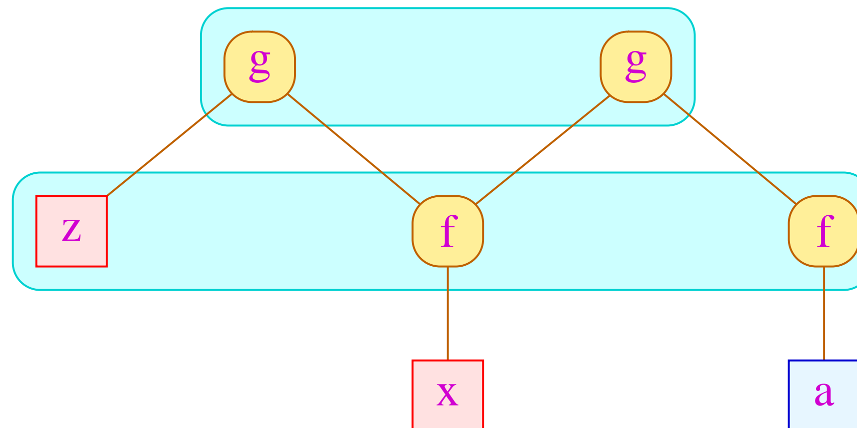
$$g(z, f(x)) = g(f(x), f(a))$$



Idee:

- Wir repräsentieren die Terme der Gleichungen als Graphen.
- Dabei identifizieren wir bereits isomorphe Teilterme ;-)
- ...

... im Beispiel: $g(z, f(x)) = g(f(x), f(a))$

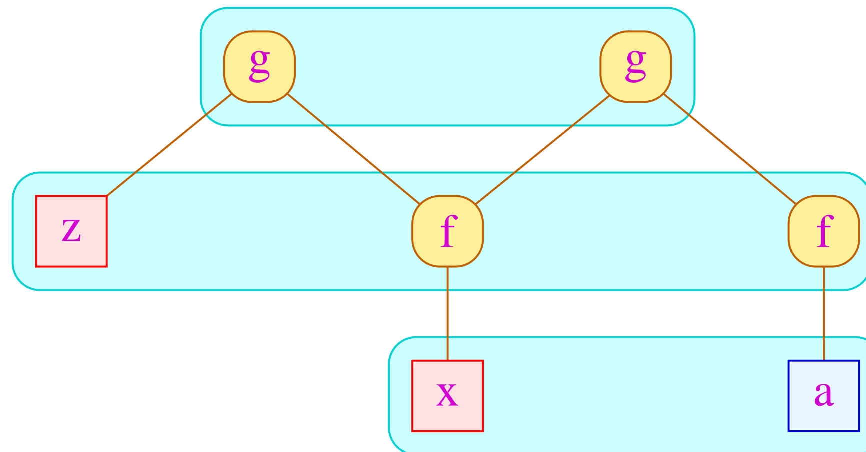


Idee:

- Wir repräsentieren die Terme der Gleichungen als Graphen.
- Dabei identifizieren wir bereits isomorphe Teilterme ;-)
- ...

... im Beispiel:

$$g(z, f(x)) = g(f(x), f(a))$$



Idee (Forts.):

- ...
- Wir berechnen eine Äquivalenz-Relation $\equiv$ auf den Knoten mit den folgenden Eigenschaften:

  $\longrightarrow$ $s \equiv t$ für jede Gleichung unseres Gleichungssystems;

  $\longrightarrow$ $s \equiv t$ nur, falls entweder s oder t eine Variable ist oder beide den gleichen Top-Konstruktor haben.

  $\longrightarrow$ Falls $s \equiv t$ und $s = f(s_1, \ldots, s_k), t = f(t_1, \ldots, t_k)$ dann auch $s_1 \equiv t_1, \ldots, s_k \equiv t_k$.

Idee (Forts.):

- ...
- Wir berechnen eine Äquivalenz-Relation $\equiv$ auf den Knoten mit den folgenden Eigenschaften:

  $\rightarrow$ $s \equiv t$ für jede Gleichung unseres Gleichungssystems;

  $\rightarrow$ $s \equiv t$ nur, falls entweder s oder t eine Variable ist oder beide den gleichen Top-Konstruktor haben.

  $\rightarrow$ Falls $s \equiv t$ und $s = f(s_1, \ldots, s_k), t = f(t_1, \ldots, t_k)$ dann auch $s_1 \equiv t_1, \ldots, s_k \equiv t_k$.

- Falls keine solche Äquivalenz-Relation existiert, ist das System unlösbar.
- Falls eine solche Äquivalenz-Relation gilt, müssen wir überprüfen, dass der Graph modulo der Äquivalenz-Relation azyklisch ist.
- Ist er azyklisch, können wir aus der Äquivalenzklasse jeder Variable eine allgemeinste Lösung ablesen ...

Implementierung:

- Wir verwalten eine Partition der Knoten;
- Wann immer zwei Knoten äquivalent sein sollen, vereinigen wir ihre Äquivalenzklassen und fahren mit den Söhnen entsprechend fort.
- Notwendige Operationen auf der Datenstruktur π für eine Partition:

  → init (Nodes) liefert eine Repräsentation für die Partition $\pi_0 = \{\{v\} \mid v \in \text{Nodes}\}$

  → find (π, u) liefert einen Repräsentanten der Äquivalenzklasse — der wann immer möglich keine Variable sein soll :-)

  → union (π, u_1, u_2) vereinigt die Äquivalenzklassen von u_1, u_2 :-)

- Der Algorithmus startet mit einer Liste

$$W = [(u_1, v_1), \ldots, (u_m, v_m)]$$

der Paare von Wurzelknoten der zu unifizierenden Terme ...

```
π = init(Nodes);
while (W ≠ ∅) {
        (u, v) = Extract (W);
        u = find (π, u);  v = find (π, v);
        if (u ≢ v) {
                π = union (π, u, v);
                if (u ∉ Vars ∧ v ∉ Vars)
                        if (label(u) ≠ label(v)) return Fail
                        else {
                                (u_1, ..., u_k) = Successors(u);
                                (v_1, ..., v_k) = Successors(v);
                                W = (u_1, v_1) :: ... :: (u_k, v_k) :: W;
                        }
        }
}
```

Komplexität:

$\mathcal{O}(\#\,Knoten)$	Aufrufe von	union
$\mathcal{O}(\#\,Kanten + \#\,Gleichungen)$	Aufrufe von	find

$\Longrightarrow$ Wir benötigen effiziente Union-Find-Datenstruktur :-)

Komplexität:

$\mathcal{O}(\#\,Knoten)$	Aufrufe von `union`
$\mathcal{O}(\#\,Kanten + \#\,Gleichungen)$	Aufrufe von `find`

$\Longrightarrow$ Wir benötigen effiziente Union-Find-Datenstruktur :-)

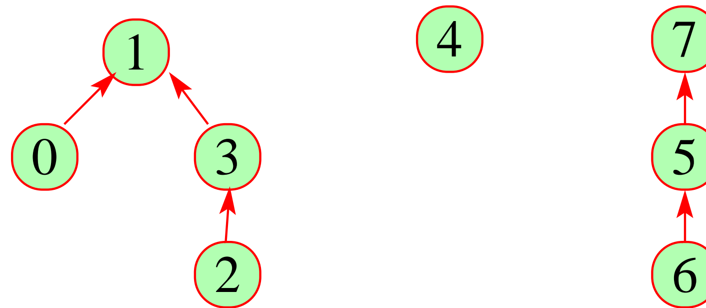
Idee:

Repräsentiere Partition von U als gerichteten Wald:

- Zu $u \in U$ verwalten wir einen Vater-Verweis $F[u]$.
- Elemente u mit $F[u] = u$ sind Wurzeln.

Einzelne Bäume sind Äquivalenzklassen.

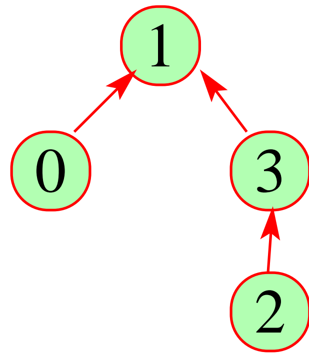
Ihre Wurzeln sind die Repräsentanten ...

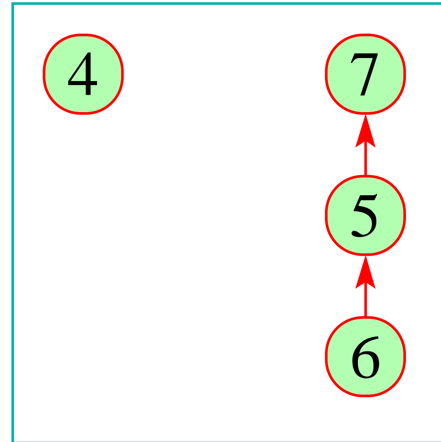


0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	3	1	4	7	5	7

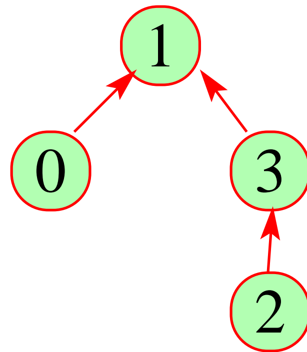
→ find (π, u) folgt den Vater-Verweisen :-)

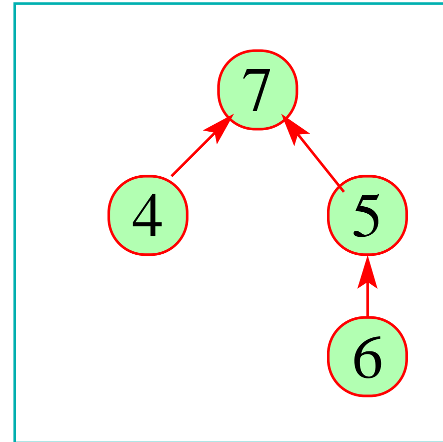
→ union (π, u_1, u_2) hängt den Vater-Verweis eines u_i um ...





0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	3	1	4	7	5	7





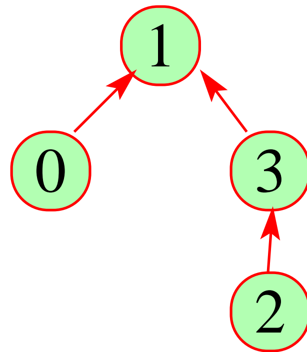
0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	3	1	7	7	5	7

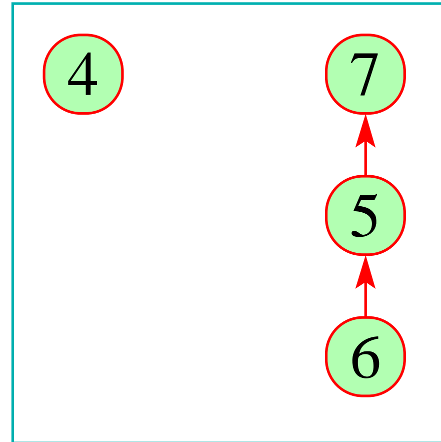
Die Kosten:

union	:	$\mathcal{O}(1)$	:-)
find	:	$\mathcal{O}(depth(\pi))$	:-(

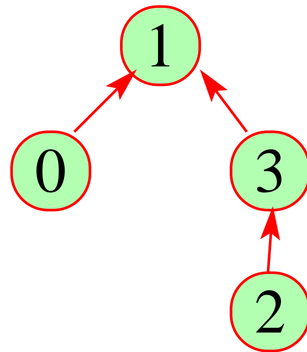
Strategie zur Vermeidung tiefer Bäume:

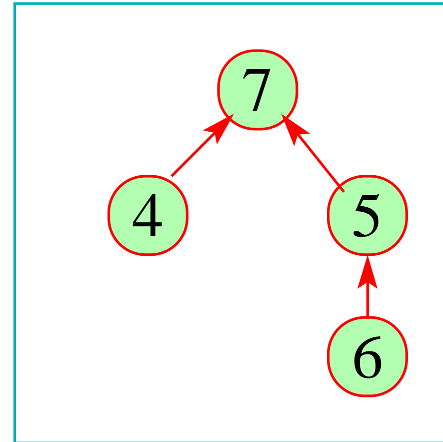
- Hänge den kleineren Baum unter den größeren !
- Benutze find , um Pfade zu komprimieren ...



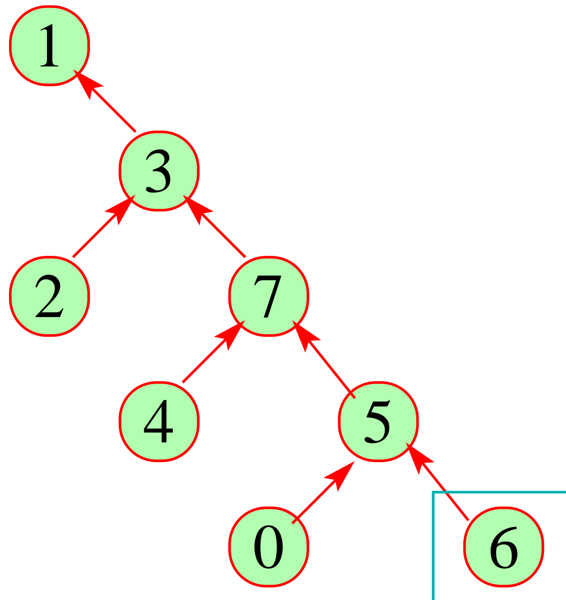


0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	3	1	4	7	5	7

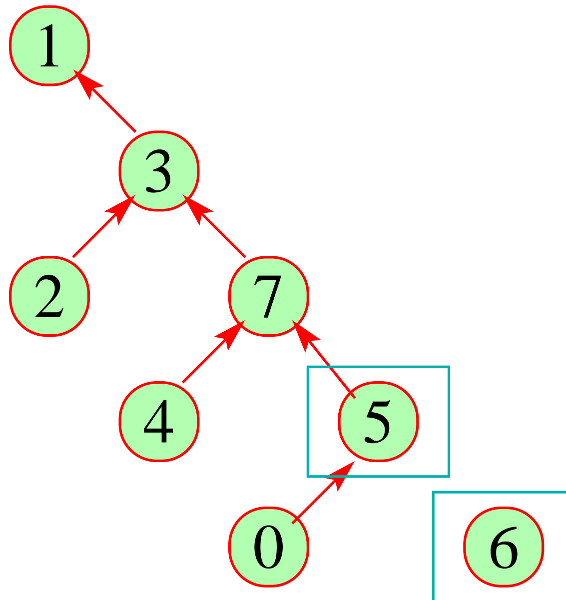




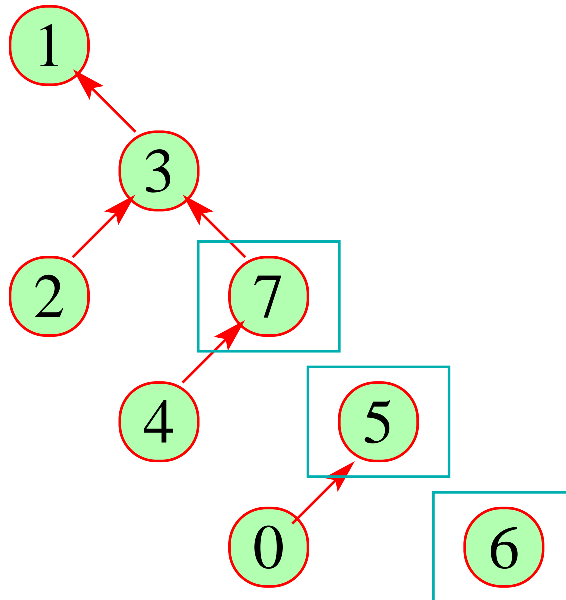
0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	3	1	7	7	5	7



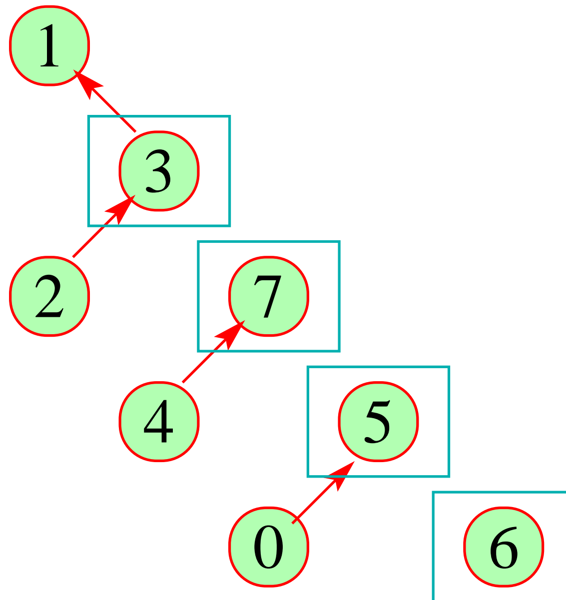
0	1	2	3	4	5	6	7
5	1	3	1	7	7	5	3



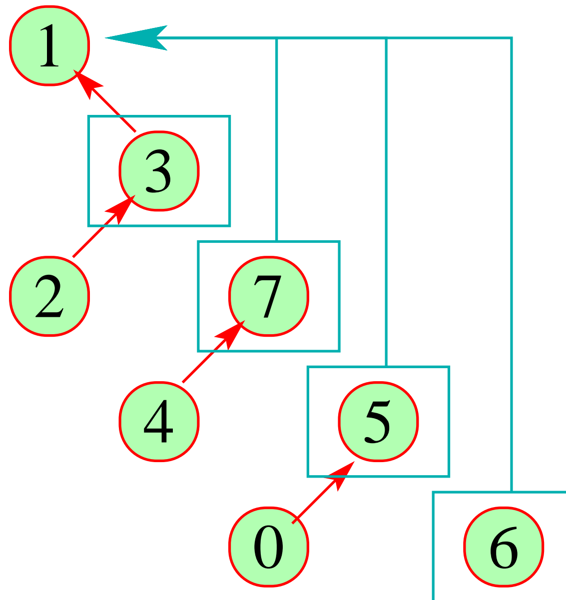
0	1	2	3	4	5	6	7
5	1	3	1	7	7	5	3



0	1	2	3	4	5	6	7
5	1	3	1	7	7	5	3



0	1	2	3	4	5	6	7
5	1	3	1	7	7	5	3



0	1	2	3	4	5	6	7
5	1	3	1	1	7	1	1

Robert Endre Tarjan, Princeton

Beachte:

- Mit dieser Datenstruktur dauern n union- und m find-Operationen $\mathcal{O}(n + m \cdot \alpha(n, n))$

  // α die inverse Ackermann-Funktion :-)

- Für unsere Anwendung müssen wir union nur so modifizieren, dass an den Wurzeln nach Möglichkeit keine Variablen stehen.
- Diese Modifikation vergrößert die asymptotische Laufzeit nicht :-)

Fazit:

- Wenn Typ-Gleichungen für ein Programm lösbar sind, dann gibt es eine allgemeinste Zuordnung von Programm-Variablen und Teil-Ausdrücken zu Typen, die alle Regeln erfüllen :-)
- Eine solche allgemeinste Typisierung können wir in (fast) linearer Zeit berechnen :-)

Fazit:

- Wenn Typ-Gleichungen für ein Programm lösbar sind, dann gibt es eine allgemeinste Zuordnung von Programm-Variablen und Teil-Ausdrücken zu Typen, die alle Regeln erfüllen :-)
- Eine solche allgemeinste Typisierung können wir in (fast) linearer Zeit berechnen :-)

Achtung:

In der berechneten Typisierung können Typ-Variablen vorkommen !!!

Beispiel:

$$e \equiv \textbf{fn}\ (f, x) \Rightarrow f\ x$$

Mit $\alpha \equiv \alpha[x]$ und $\beta \equiv \tau[f\ x]$ finden wir:

$$\begin{aligned} \alpha[f] &= \alpha \to \beta \\ \tau[e] &= (\alpha \to \beta, \alpha) \to \beta \end{aligned}$$

Diskussion:

- Die Typ-Variablen bedeuten offenbar, dass die Funktionsdefinition für jede mögliche Instantiierung funktioniert $\Longrightarrow$ Polymorphie

  Wir kommen darauf zurück :-)
- Das bisherige Verfahren, um Typisierungen zu berechnen, hat den Nachteil, dass es nicht syntax-gerichtet ist ...
- Wenn das Gleichungssystem zu einem Programm keine Lösung besitzt, erhalten wir keine Information, wo der Fehler stecken könnte :-(

$\Longrightarrow$ Wir benötigen ein syntax-gerichtetes Verfahren !!!

... auch wenn es möglicherweise ineffizienter ist :-)

Der Algorithmus $\mathcal{W}$:

$$
\begin{array}{lll}
\textbf{fun } \mathcal{W}\ e\ (\Gamma,\theta) & = & \textbf{case } e \\
\quad \textbf{of } c & \to & (t_c,\theta) \\
\quad \mid\ [\,] & \to & \textbf{let val } \alpha = \mathsf{new}() \\
 & & \textbf{in } (\mathsf{list}\ \alpha,\theta) \\
 & & \mathsf{end} \\
\quad \mid\ x & \to & (\Gamma(x),\theta) \\
\quad \mid\ (e_1,\ldots,e_m) & \to & \textbf{let val } (t_1,\theta) = \mathcal{W}\ e_1\ (\Gamma,\theta) \\
 & & \qquad\qquad \ldots \\
 & & \quad \textbf{val } (t_m,\theta) = \mathcal{W}\ e_m\ (\Gamma,\theta) \\
 & & \textbf{in } ((t_1,\ldots,t_m),\theta) \\
 & & \textbf{end} \\
 & \ldots &
\end{array}
$$

Der Algorithmus $\mathcal{W}$ (Forts.):

$$
\begin{array}{llll}
\mid & (e_1 : e_2) & \rightarrow & \textbf{let val } (t_1, \theta) = \mathcal{W}\ e_1\ (\Gamma, \theta) \\
 & & & \quad \textbf{val } (t_2, \theta) = \mathcal{W}\ e_2\ (\Gamma, \theta) \\
 & & & \quad \textbf{val } \theta = \boxed{\text{unify}\ (\text{list}\ t_1, t_2)\ \theta} \\
 & & & \textbf{in } (t_2, \theta) \\
 & & & \textbf{end} \\
\mid & (e_1\ e_2) & \rightarrow & \textbf{let val } (t_1, \theta) = \mathcal{W}\ e_1\ (\Gamma, \theta) \\
 & & & \quad \textbf{val } (t_2, \theta) = \mathcal{W}\ e_2\ (\Gamma, \theta) \\
 & & & \quad \textbf{val } \alpha = \text{new}\,() \\
 & & & \quad \textbf{val } \theta = \boxed{\text{unify}\ (t_1, t_2 \rightarrow \alpha)\ \theta} \\
 & & & \textbf{in } (\alpha, \theta) \\
 & & & \textbf{end} \\
 & & \ldots &
\end{array}
$$

Der Algorithmus $\mathcal{W}$ (Forts.):

$$
\begin{array}{lll}
| \quad (\textbf{if } e_0 \textbf{ then } e_1 \textbf{ else } e_2) & \rightarrow & \textbf{let val } (t_0, \theta) = \mathcal{W}\ e_0\ (\Gamma, \theta) \\
 & & \quad \textbf{val } \theta = \boxed{\text{unify } (\textbf{bool}, t_0)\ \theta} \\
 & & \quad \textbf{val } (t_1, \theta) = \mathcal{W}\ e_1\ (\Gamma, \theta) \\
 & & \quad \textbf{val } (t_2, \theta) = \mathcal{W}\ e_2\ (\Gamma, \theta) \\
 & & \quad \textbf{val } \theta = \boxed{\text{unify } (t_1, t_2)\ \theta} \\
 & & \textbf{in } (t_1, \theta) \\
 & & \textbf{end}
\end{array}
$$

...

Der Algorithmus $\mathcal{W}$ (Forts.):

$$
\begin{array}{lll}
| & (\textbf{case}\ e_0\ \textbf{of}\ [\,] \to e_1\ ;\ (x:y) \to e_2) & \\
 & \quad \to \quad \textbf{let}\ \ \textbf{val}\ \ (t_0,\theta) = \mathcal{W}\ e_0\ (\Gamma,\theta) & \\
 & \qquad\qquad \textbf{val}\ \ \alpha = \mathsf{new}() & \\
 & \qquad\qquad \textbf{val}\ \ \theta = \boxed{\mathsf{unify}\ (\mathsf{list}\ \alpha, t_0)\ \theta} & \\
 & \qquad\qquad \textbf{val}\ \ (t_1,\theta) = \mathcal{W}\ e_1\ (\Gamma,\theta) & \\
 & \qquad\qquad \textbf{val}\ \ (t_2,\theta) = \mathcal{W}\ e_2\ (\Gamma \oplus \{x \mapsto \alpha, y \mapsto \mathsf{list}\ \alpha\},\theta) & \\
 & \qquad\qquad \textbf{val}\ \ \theta = \boxed{\mathsf{unify}\ (t_1,t_2)\ \theta} & \\
 & \qquad\ \textbf{in}\ \ (t_1,\theta) & \\
 & \qquad\ \textbf{end} & \\
 & \ldots &
\end{array}
$$

Der Algorithmus $\mathcal{W}$ (Forts.):

$$
\begin{array}{lll}
| & \textbf{fn}\ (x_1, \ldots, x_m) \Rightarrow e & \\
 & \quad \to & \textbf{let}\ \textbf{val}\ \alpha_1 = \mathsf{new}() \\
 & & \qquad\qquad \ldots \\
 & & \quad\ \ \textbf{val}\ \alpha_m = \mathsf{new}() \\
 & & \quad\ \ \textbf{val}\ (t, \theta) = \mathcal{W}\ e\ (\Gamma \oplus \{x_1 \mapsto \alpha_1, \ldots, x_m \mapsto \alpha_m\}, \theta) \\
 & & \textbf{in}\ \ ((\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \to t, \theta) \\
 & & \textbf{end} \\
 & \ldots &
\end{array}
$$

Der Algorithmus $\mathcal{W}$ (Forts.):

$$
\begin{array}{lll}
| & (\textbf{letrec } x_1 = e_1; \ldots; x_m = e_m \textbf{ in } e_0) & \\
 & \quad \to \quad \textbf{let val } \alpha_1 = \mathsf{new}() & \\
 & \qquad\qquad \ldots & \\
 & \qquad\quad \textbf{val } \alpha_m = \mathsf{new}() & \\
 & \qquad\quad \textbf{val } \Gamma = \Gamma \oplus \{x_1 \mapsto \alpha_1, \ldots, x_m \mapsto \alpha_m\} & \\
 & \qquad\quad \textbf{val } (t_1, \theta) = \mathcal{W}\; e_1\; (\Gamma, \theta) & \\
 & \qquad\quad \textbf{val } \theta = \boxed{\mathsf{unify}\; (\alpha_1, t_1)\; \theta} & \\
 & \qquad\qquad \ldots & \\
 & \qquad\quad \textbf{val } (t_m, \theta) = \mathcal{W}\; e_m\; (\Gamma, \theta) & \\
 & \qquad\quad \textbf{val } \theta = \boxed{\mathsf{unify}\; (\alpha_m, t_m)\; \theta} & \\
 & \qquad\quad \textbf{val } (t_0, \theta) = \mathcal{W}\; e_0\; (\Gamma, \theta) & \\
 & \qquad \textbf{in } (t_0, \theta) & \\
 & \qquad \textbf{end} &
\end{array}
$$

...

Der Algorithmus $\mathcal{W}$ (Forts.):

$$
\begin{array}{lll}
| & (\textbf{let } x_1 = e_1; \ldots; x_m = e_m \textbf{ in } e_0) & \\
 & \quad \to \quad \textbf{let} \ \ \textbf{val} \ \ (t_1, \theta) = \mathcal{W}\ e_1\ (\Gamma, \theta) & \\
 & \qquad\qquad\quad \textbf{val} \ \ \Gamma = \Gamma \oplus \{x_1 \mapsto t_1\} & \\
 & \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots & \\
 & \qquad\qquad\quad \textbf{val} \ \ (t_m, \theta) = \mathcal{W}\ e_m\ (\Gamma, \theta) & \\
 & \qquad\qquad\quad \textbf{val} \ \ \Gamma = \Gamma \oplus \{x_m \mapsto t_m\} & \\
 & \qquad\qquad\quad \textbf{val} \ \ (t_0, \theta) = \mathcal{W}\ e_0\ (\Gamma, \theta) & \\
 & \qquad\quad\ \ \textbf{in} \ \ (t_0, \theta) & \\
 & \qquad\quad\ \ \textbf{end} & \\
 & \ldots &
\end{array}
$$

Bemerkungen:

- Am Anfang ist $\Gamma = \emptyset$ und $\theta = \emptyset$:-)
- Der Algorithmus unifiziert nach und nach die Typ-Gleichungen :-)
- Der Algorithmus liefert bei jedem Aufruf einen Typ t zusammen mit einer Substitution θ zurück.
- Der inferierte allgemeinste Typ ergibt sich als $\theta(t)$.
- Die Hilfsfunktion new() liefert jeweils eine neue Typvariable :-)
- Bei jedem Aufruf von unify() kann die Typinferenz fehlschlagen ...
- Bei Fehlschlag sollte die Stelle, wo der Fehler auftrat gemeldet werden, die Typ-Inferenz aber mit plausiblen Werten fortgesetzt werden :-}