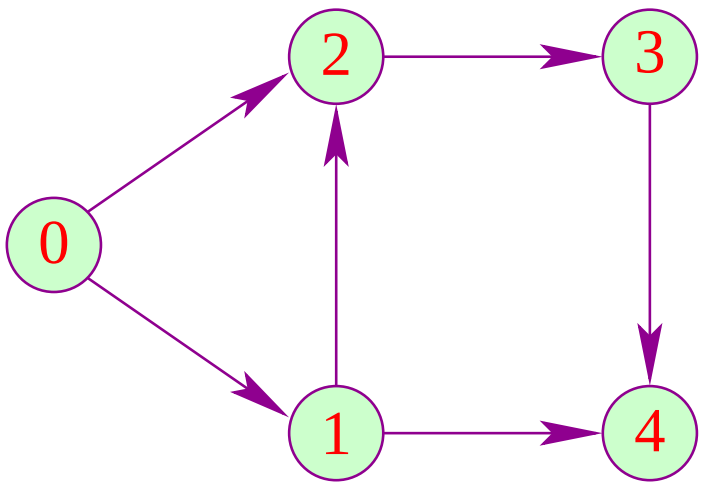
5 Anwendung: Grundlegende Graph-Algorithmen

- Gerichtete Graphen
- Erreichbarkeit und DFS
- Topologische Sortierung

5.1 Gerichtete Graphen

Beobachtung:

- Viele Probleme lassen sich mit Hilfe gerichteter Graphen repräsentieren ...



5.1 Gerichtete Graphen

Beobachtung:

- Viele Probleme lassen sich mit Hilfe gerichteter Graphen repräsentieren ...

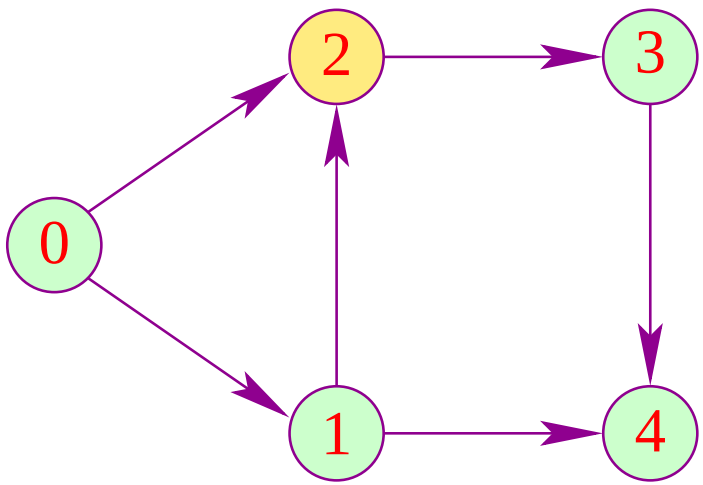
	Knoten	Kanten
Betrieblicher Prozess	Bearbeitungsschritt	Abfolge
Software	Zustand	Änderung
Systemanalyse	Komponente	Einfluss

- Oft sind die Kanten mit Zusatz-Informationen beschriftet :-)

5.2 Erreichbarkeit und DFS

Einfaches Problem:

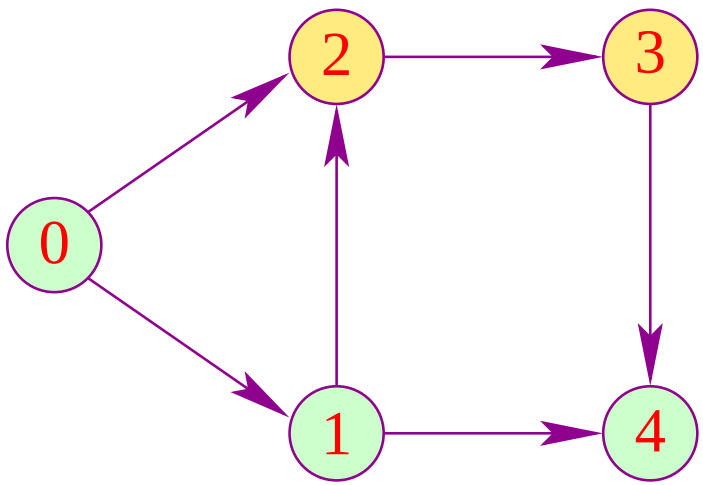
- Gegeben ein Knoten.
- Welche anderen Knoten im Graphen kann man erreichen?



5.2 Erreichbarkeit und DFS

Einfaches Problem:

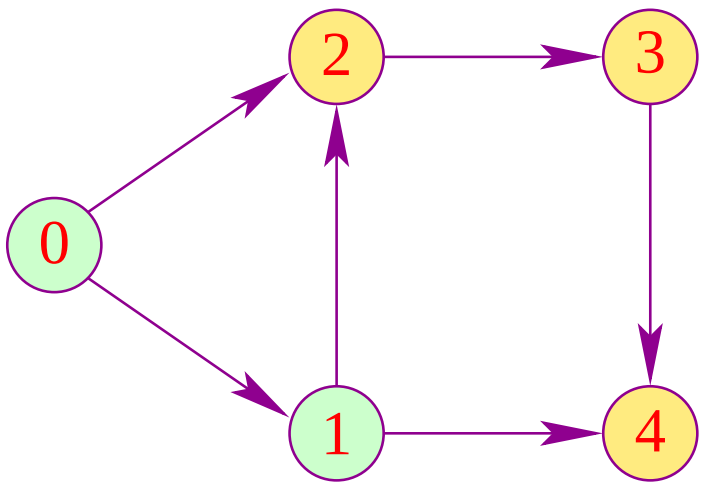
- Gegeben ein Knoten.
- Welche anderen Knoten im Graphen kann man erreichen?



5.2 Erreichbarkeit und DFS

Einfaches Problem:

- Gegeben ein Knoten.
- Welche anderen Knoten im Graphen kann man erreichen?



Eine Datenstruktur für Graphen:

- Wir nehmen an, die Knoten sind fortlaufend mit 0, 1, ... durch-nummeriert.
- Für jeden Knoten gibt es eine Liste ausgehender Kanten.
- Damit wir schnellen Zugriff haben, speichern wir die Listen in einem Array ab ...

```
# type node     = int
# type 'a graph = ('a * node) list array
```

Eine Datenstruktur für Graphen:

- Wir nehmen an, die Knoten sind fortlaufend mit 0, 1, ... durch-nummeriert.
- Für jeden Knoten gibt es eine Liste ausgehender Kanten.
- Damit wir schnellen Zugriff haben, speichern wir die Listen in einem Array ab ...

```
# type node      = int
# type 'a graph = ('a * node) list array

# let example = [| [((),1); ((),2)]; [((),2); ((),4)];
                   [((),3)]; [((),4)]; [] |] ;;
```

Idee:

- Wir verwalten eine Datenstruktur `reachable : bool array`.
- Am Anfang haben alle Einträge `reachable.(x)` den Wert `false`.
- Besuchen wir einen Knoten `x`, der noch nicht erreicht wurde, setzen wir `reachable.(x) <- true` und besuchen alle Nachbarn von `x` :-)
- Kommen wir zu einem Knoten, der bereits besucht wurde, tun wir nix :-))

```
# let fold_li f a arr = let n = Array.length arr
                        in let rec doit i a = if i = -1 then a
                           else doit (i-1) (f i a arr.(i))
                        in doit (n-1) a;;

# let reach edges x =
      let    n = Array.length edges
      in let reachable = Array.make n false
      in let extract_result ()  = fold_li
                    (fun i acc b -> if b then i::acc
                                        else acc) [] reachable
      ...
```

Kommentar:

- `fold_li : (int -> 'a -> 'b -> 'a) -> 'a -> 'b array -> 'a` erlaubt, über ein Array zu iterieren unter Berücksichtigung des Index wie der Werte für den Index :-)
- `Array.make : int -> 'a -> 'a array` legt ein neues initialisiertes Array an.
- Die entscheidende Berechnung erfolgt in der rekursiven Funktion `dfs` ...

```
...
in let rec dfs x = if not reachable.(x) then (
                      reachable.(x) <- true;
                      List.iter (fun (_,y) -> dfs y)
                                edges.(x)
                   )
in dfs x;
   extract_result ();;
```

- Die Technik heißt Depth First Search oder Tiefensuche, weil die Nachfolger eines Knotens vor den Nachbarn besucht werden :-)

Kommentar (Forts.):

Der Test am Anfang von `dfs` liefert für jeden Knoten nur einmal `true`.

$\Longrightarrow$ Jede Kante wird maximal einmal behandelt.

$\Longrightarrow$ Der Gesamtaufwand ist proportional zu $n + m$

// n == Anzahl der Knoten

// m == Anzahl der Kanten

5.3 Topologisches Sortieren

Ein Pfad oder Weg der Länge n in einem gerichteten Graphen ist eine Folge von Kanten:

$$(v_0, \_, v_1)(v_1, \_, v_2) \ldots, (v_{n-1}, \_, v_n)$$

Ein Pfad der Länge $n > 0$ von v nach v heißt Kreis.

Ein gerichteter Graph ohne Kreise heißt azyklisch ...

5.3 Topologisches Sortieren

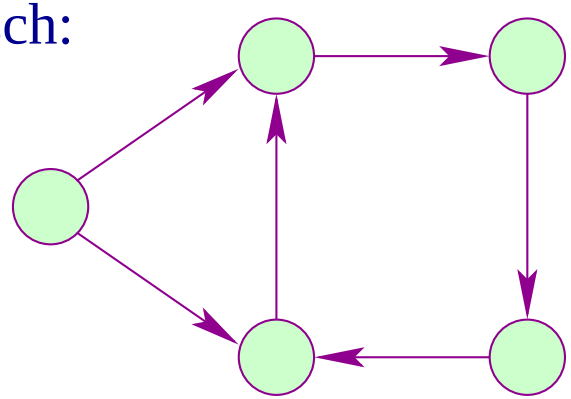
Ein Pfad oder Weg der Länge n in einem gerichteten Graphen ist eine Folge von Kanten:

$$(v_0, \_, v_1)(v_1, \_, v_2) \ldots, (v_{n-1}, \_, v_n)$$

Ein Pfad der Länge $n > 0$ von v nach v heißt Kreis.

Ein gerichteter Graph ohne Kreise heißt azyklisch ...

zyklisch:



5.3 Topologisches Sortieren

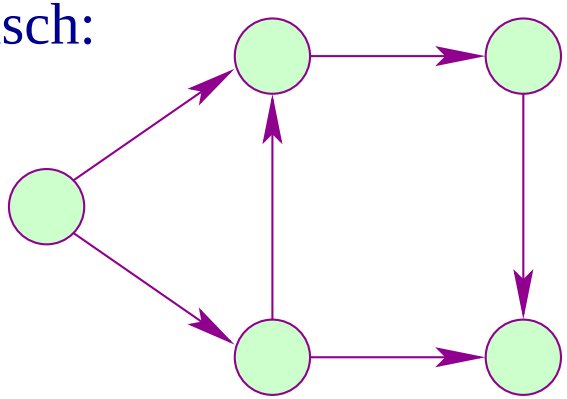
Ein Pfad oder Weg der Länge n in einem gerichteten Graphen ist eine Folge von Kanten:

$$(v_0, \_, v_1)(v_1, \_, v_2) \ldots, (v_{n-1}, \_, v_n)$$

Ein Pfad der Länge $n > 0$ von v nach v heißt Kreis.

Ein gerichteter Graph ohne Kreise heißt azyklisch ...

azyklisch:

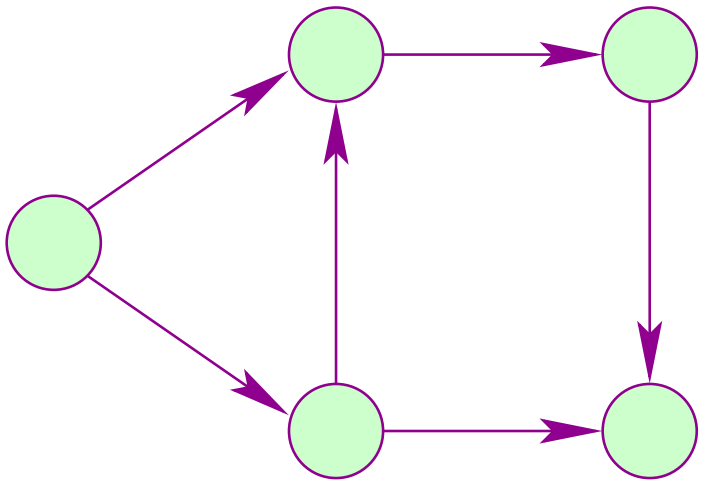


Aufgabe:

Gegeben: ein gerichteter Graph.

Frage: Ist der Graph azyklisch?

Wenn ja: Finde eine lineare Anordnung der Knoten!

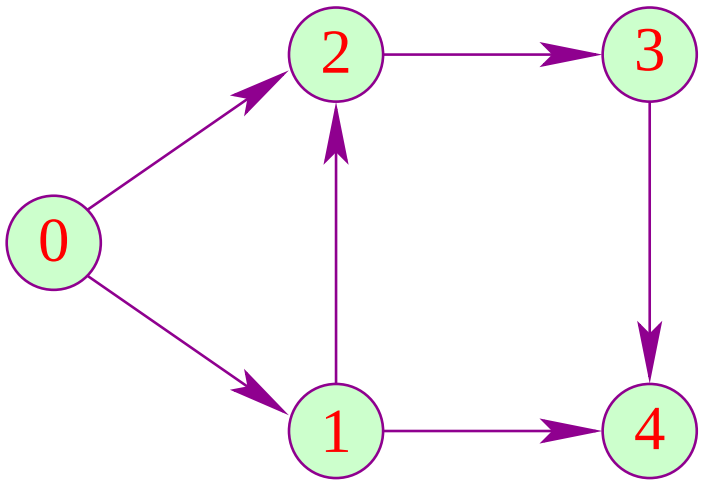


Aufgabe:

Gegeben: ein gerichteter Graph.

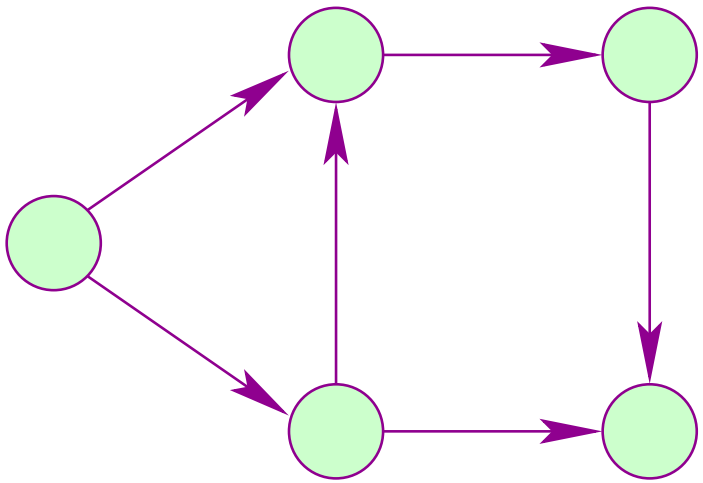
Frage: Ist der Graph azyklisch?

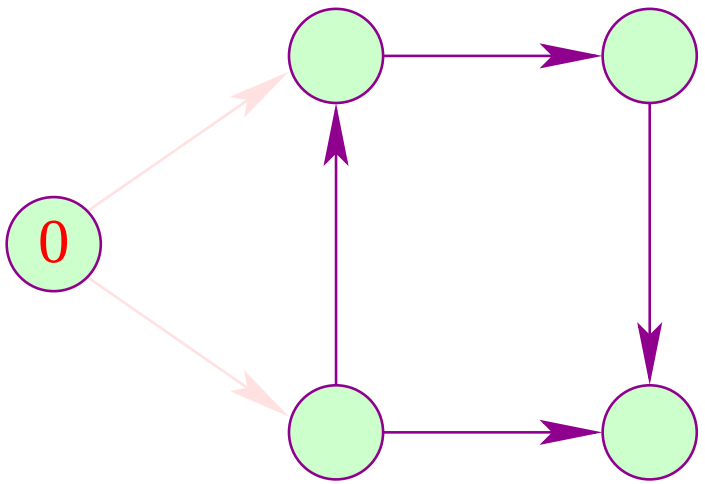
Wenn ja: Finde eine lineare Anordnung der Knoten!

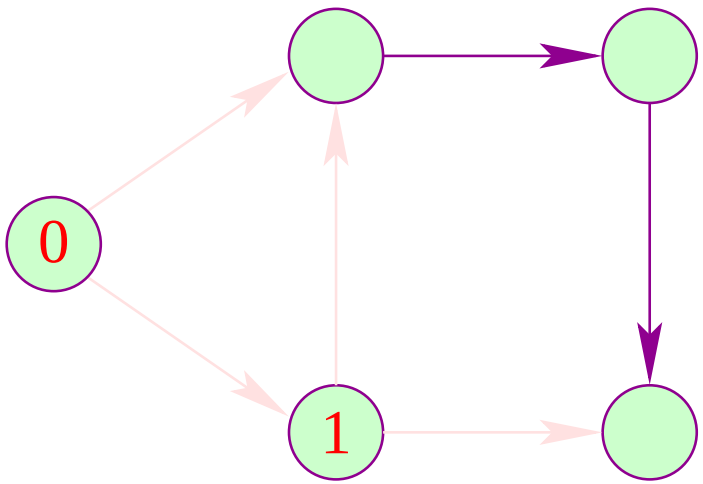


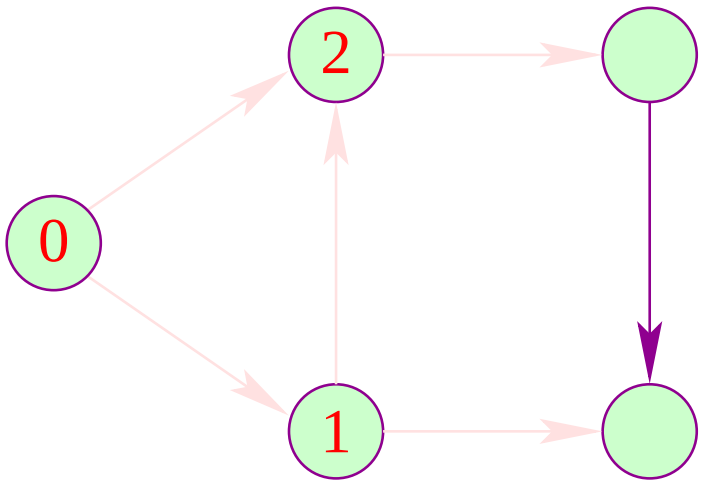
Idee:

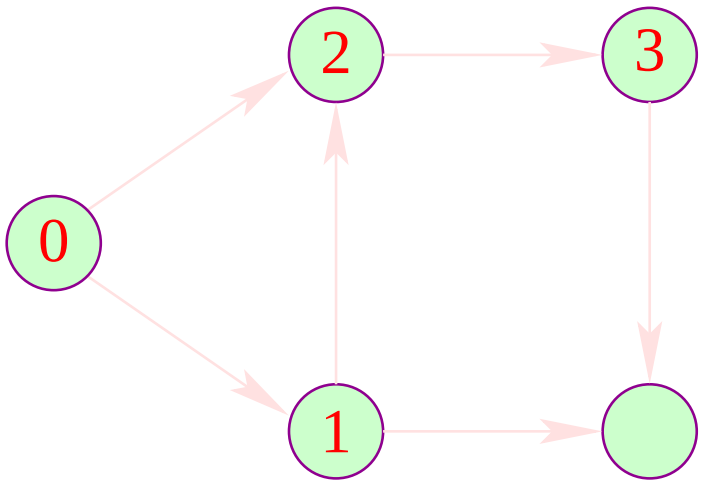
- Suche einen Knoten ohne eingehende Kanten.
- Besitzt jeder Knoten eingehende Kanten, muss der Graph einen Kreis enthalten ;-)
- Gibt es einen Knoten ohne eingehende Kanten, können wir diesen als kleinstes Element auswählen :-)
- Entferne den Knoten mit allen seinen ausgehenden Kanten !
- Löse das verbleibende Problem ...

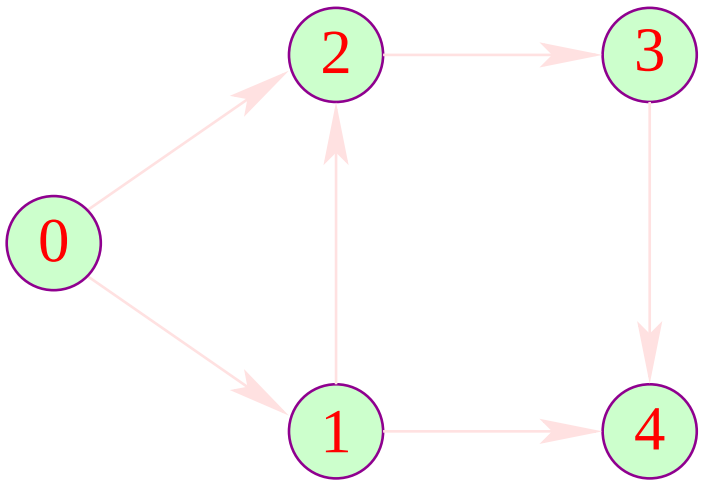



0


0
1


2
0
1


2
3
0
1


2
3
0
1
4

Implementierung:

- Für jeden Knoten `x` benutzen wir einen Zähler `count.(x)`, der die Anzahl der eingehenden Kanten zählt.
- Haben wir einen Knoten, dessen Zähler 0 ist, nummerieren wir ihn :-)
- Dann durchlaufen wir seine ausgehenden Kanten.
- Für jeden Nachbarn dekrementieren wir den Zähler und fahren rekursiv fort.

$\Longrightarrow$ wieder Depth-First-Search

```
# let top_sort edges =
              let n = Array.length edges
            in let count = Array.make n 0
            in let inc y = count.(y) <- count.(y) +1
            in let dec y = count.(y) <- count.(y) -1
            in for x=0 to n-1 do
               List.iter (fun (_,y) -> inc y) edges.(x)
               done ;
               let value = Array.make n (-1)
            ...
```

```
in let next = ref 0
in let number y = value.(y) <- !next;
                  next := !next + 1
in let rec dfs x = if count.(x) = 0 then (
                       number x;
                       List.iter (fun (_,y) ->
                                      dec y;
                                      dfs y)
                                 edges.(x))
in for x=0 to n-1 do
       if value.(x) = -1 then dfs x
   done; value;;
```