Ein erweitertes Item ist ein Paar: $[A \to \alpha \bullet \gamma\,,\ L] \quad (A \to \alpha\,\gamma \in P,\ L \subseteq T^{\leq k})$

Die Menge L benutzen wir, um $\text{First}_k(\beta)$ für den rechten Kontext β von A zu repräsentieren :-)

Konstruktion:

Zustände: erweiterte Items

Anfangszustand: $[S' \to \bullet\ S,\ \{\epsilon\}]$

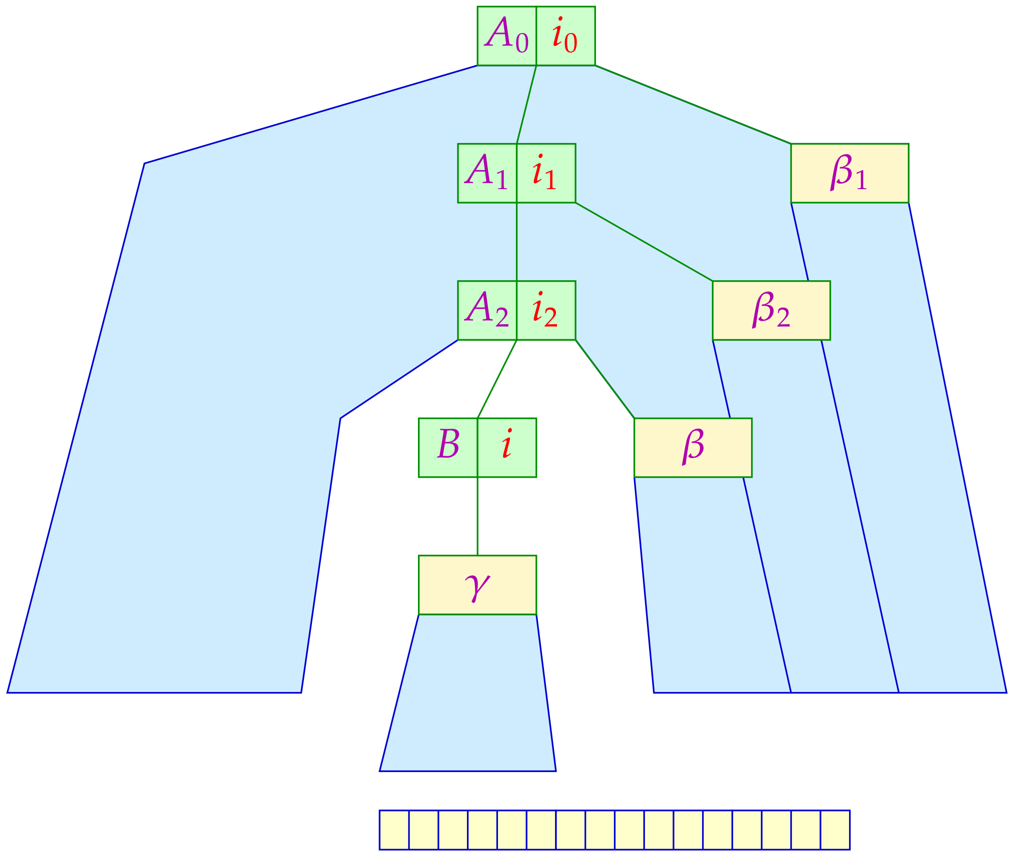
Endzustand: $[S' \to S\,\bullet,\ \{\epsilon\}]$

Übergänge:

Expansionen: $([A \to \alpha \bullet B\,\beta\,,\ L], \epsilon, [A \to \alpha \bullet B\,\beta\,,\ L]\ [B \to \bullet\,\gamma\,,\ \boxed{\text{First}_k(\beta) \odot L}])$ für $A \to \alpha\,B\,\beta,\ B \to \gamma \in P$

Shifts: $([A \to \alpha \bullet a\,\beta\,,\ L], a, [A \to \alpha\,a \bullet \beta\,,\ L])$ für $A \to \alpha\,a\,\beta \in P$

Reduce: $([A \to \alpha \bullet B\,\beta\,,\ L]\ [B \to \gamma\bullet\,,\ L'], \epsilon, [A \to \alpha\,B \bullet \beta\,,\ L])$ für $A \to \alpha\,B\,\beta,\ B \to \gamma \in P$



Die Vorausschau-Tabelle:

Wir setzen $M[\,[A \to \alpha \bullet B\,\beta\,,\,L],\,w] \;=\; i$ genau dann wenn (B, i) die Regel $B \to \gamma$ ist und: $w \in \mathsf{First}_k(\gamma) \odot \mathsf{First}_k(\beta) \odot L$

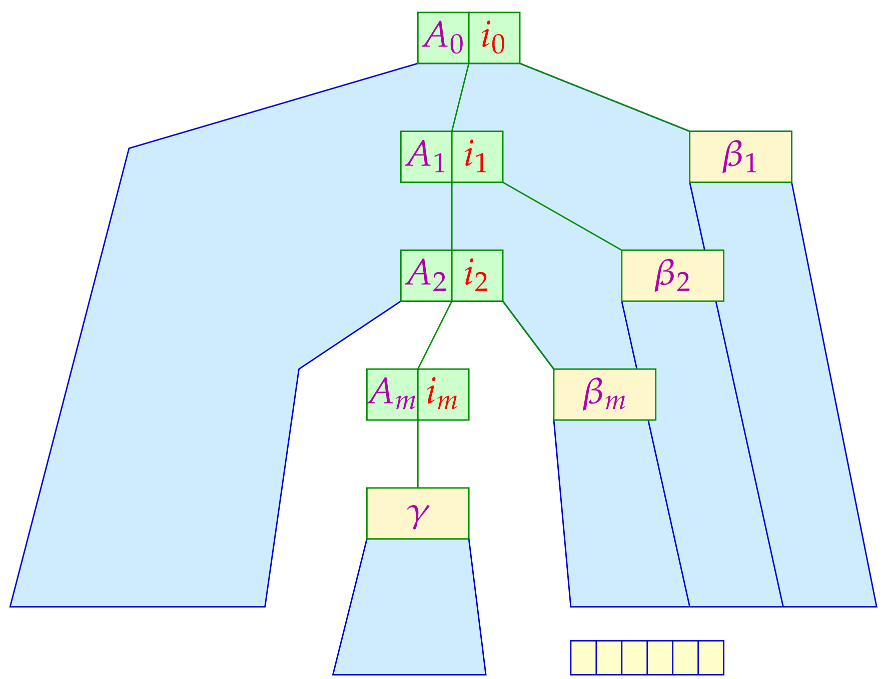
$$\begin{array}{rl} ([A_0 \to \bullet\, \alpha_1\, A_1\, \beta_1,\; L_1],\; uv) & \vdash^* \quad ([A_0 \to \alpha_1 \bullet A_1\, \beta_1,\; L_1] \ldots [A_{m-1} \to \alpha_m \bullet A_m\, \beta_m,\; L_m],\; v) \\ & \vdash^* \quad ([A_0 \to \alpha_1\, A_1\, \beta_1 \bullet,\; L_1],\; \epsilon) \end{array}$$

... gilt genau dann wenn:

(1) $\alpha_1 \ldots \alpha_m \to^* u$

(2) $A_m\, \beta_m \ldots \beta_1 \to^* v$

(3) $L_m = \mathsf{First}_k(\beta_{m-1}) \odot \ldots \odot \mathsf{First}_k(\beta_1) \odot L_1$



Satz

Die reduzierte kontextfreie Grammatik G ist $LL(k)$ genau dann wenn die k-Vorausschau-Tabelle für alle benötigten erweiterten Items wohl-definiert ist.

Diskussion:

- Der erweiterte Item-Kellerautomat zusammen mit einer k-Vorausschau-Tabelle erlaubt die deterministische Rekonstruktion einer Links-Ableitung :-)
- Die Anzahl der Vorausschau-Mengen L kann sehr groß sein :-(
- ...

Beispiel: $\quad S \to \epsilon \quad | \quad a\,S\,b$

Die Übergänge des erweiterten Item-Kellerautomat $\quad (k = 1):$

0	$[S' \to \bullet\, S, \{\epsilon\}]$	ϵ	$[S' \to \bullet\, S, \{\epsilon\}]\,[S \to \bullet, \{\epsilon\}]$
1	$[S' \to \bullet\, S, \{\epsilon\}]$	ϵ	$[S' \to \bullet\, S, \{\epsilon\}]\,[S \to \bullet\, a\,S\,b, \{\epsilon\}]$
2	$[S \to \bullet\, a\,S\,b, \{\epsilon\}]$	a	$[S \to a \bullet S\,b, \{\epsilon\}]$
	$[S \to \bullet\, a\,S\,b, \{b\}]$	a	$[S \to a \bullet S\,b, \{b\}]$
3	$[S \to a \bullet S\,b, \{\epsilon\}]$	ϵ	$[S \to a \bullet S\,b, \{\epsilon\}]\,[S \to \bullet, \{b\}]$
	$[S \to a \bullet S\,b, \{b\}]$	ϵ	$[S \to a \bullet S\,b, \{b\}]\,[S \to \bullet, \{b\}]$
4	$[S \to a \bullet S\,b.\{\epsilon\}]$	ϵ	$[S \to a \bullet S\,b.\{\epsilon\}]\,[S \to \bullet\, a\,S\,b, \{b\}]$
	$[S \to a \bullet S\,b.\{b\}]$	ϵ	$[S \to a \bullet S\,b.\{b\}]\,[S \to \bullet\, a\,S\,b, \{b\}]$
5	$[S \to a \bullet S\,b, \{\epsilon\}]\,[S \to \bullet, \{b\}]$	ϵ	$[S \to a\,S \bullet b, \{\epsilon\}]$
	$[S \to a \bullet S\,b, \{b\}]\,[S \to \bullet, \{b\}]$	ϵ	$[S \to a\,S \bullet b, \{b\}]$
	$\dots$		$\dots$

	…		…
6	$[S \to a \bullet S\, b, \{\epsilon\}]$ $[S \to a\, S\, b \bullet, \{b\}]$	ϵ	$[S \to a\, S \bullet b, \{\epsilon\}]$
	$[S \to a \bullet S\, b, \{b\}]$ $[S \to a\, S\, b \bullet, \{b\}]$	ϵ	$[S \to a\, S \bullet b, \{b\}]$
7	$[S \to a\, S \bullet b, \{\epsilon\}]$	b	$[S \to a\, S\, b \bullet, \{\epsilon\}]$
	$[S \to a\, S \bullet b, \{b\}]$	b	$[S \to a\, S\, b \bullet, \{b\}]$
8	$[S' \to \bullet\, S, \{\epsilon\}]$ $[S \to \bullet, \{\epsilon\}]$	ϵ	$[S' \to S \bullet, \{\epsilon\}]$
9	$[S' \to \bullet\, S, \{\epsilon\}]$ $[S \to a\, S\, b \bullet, \{\epsilon\}]$	ϵ	$[S' \to S \bullet, \{\epsilon\}]$

Die Vorausschau-Tabelle:

	ϵ	a	b
$[S' \to \bullet\, S, \{\epsilon\}]$	0	1	−
$[S \to a \bullet S\, b, \{\epsilon\}]$	−	1	0
$[S \to a \bullet S\, b, \{b\}]$	−	1	0

Beobachtung:

- Die auszuwählende Regel hängt hier ja gar nicht von den Erweiterungen der Items ab !!!
- Unter dieser Voraussetzung können wir den Item-Kellerautomaten ohne Erweiterung benutzen :-)
- Hängt die auszuwählende Regel nur von der aktuellen Vorausschau w ab, nennen wir G auch stark $LL(k)$ ...

Beobachtung:

- Die auszuwählende Regel hängt hier ja gar nicht von den Erweiterungen der Items ab !!!
- Unter dieser Voraussetzung können wir den Item-Kellerautomaten ohne Erweiterung benutzen :-)
- Hängt die auszuwählende Regel nur von der aktuellen Vorausschau w ab, nennen wir G auch stark $LL(k)$ ...

Wir definieren:

$$\mathsf{Follow}_k(A) = \bigcup\{\mathsf{First}_k(\beta) \mid S \rightarrow_L^* u\, A\, \beta\} .$$

Beobachtung:

- Die auszuwählende Regel hängt hier ja gar nicht von den Erweiterungen der Items ab !!!
- Unter dieser Voraussetzung können wir den Item-Kellerautomaten ohne Erweiterung benutzen :-)
- Hängt die auszuwählende Regel nur von der aktuellen Vorausschau w ab, nennen wir G auch stark $LL(k)$ ...

Wir definieren:

$$\mathsf{Follow}_k(A) = \bigcup\{\mathsf{First}_k(\beta) \mid S \rightarrow^*_L u\, A\, \beta\} \,.$$

Die reduzierte kontextfreie Grammatik G heißt stark $LL(k)$, falls für je zwei verschiedene $A \rightarrow \alpha\,,\; A \rightarrow \alpha' \;\in\; P$:

$$\mathsf{First}_k(\alpha) \odot \mathsf{Follow}_k(A) \;\cap\; \mathsf{First}_k(\alpha') \odot \mathsf{Follow}_k(A) \;=\; \emptyset$$

... im Beispiel:

$$S \to \epsilon \quad | \quad a\,S\,b$$

$$\begin{array}{lcl}
\text{Follow}_1(S) & = & \{\epsilon, b\} \\[1em]
\text{First}_1(\epsilon) \odot \text{Follow}_1(S) & = & \{\epsilon\} \odot \{\epsilon, b\} \quad = \quad \{\epsilon, b\} \\
\text{First}_1(a\,S\,b) \odot \text{Follow}_1(S) & = & \{a\} \odot \{\epsilon, b\} \quad = \quad \{a\}
\end{array}$$

Wir schließen: Die Grammatik ist in der Tat stark $LL(1)$:-)

Ist G eine starke $LL(k)$-Grammatik, können wir die Vorausschau-Tabelle statt mit (erweiterten) Items mit Nichtterminalen indizieren :-)

Wir setzen $M[B,\ w] = i$ genau dann wenn (B, i) die Regel $B \to \gamma$ ist und: $w \in \text{First}_k(\gamma) \odot \text{Follow}_k(B)$.

... im Beispiel:

$S \to \epsilon \quad | \quad a\,S\,b$

	ϵ	a	b
S	0	1	0

Ist G eine starke $LL(k)$-Grammatik, können wir die Vorausschau-Tabelle statt mit (erweiterten) Items mit Nichtterminalen indizieren :-)

Wir setzen $M[B,\ w] = i$ genau dann wenn (B, i) die Regel $B \to \gamma$ ist und: $w \in \mathsf{First}_k(\gamma) \odot \mathsf{Follow}_k(B)$.

... im Beispiel:

$$S \to \epsilon \quad | \quad a\,S\,b$$

	ϵ	a	b
S	0	1	0

Satz

- Jede starke $LL(k)$-Grammatik ist auch $LL(k)$:-)
- Jede $LL(1)$-Grammatik ist bereits stark $LL(1)$:-))

Beweis:

Sei G stark $LL(k)$.

Betrachte eine Ableitung $S \rightarrow_L^* u\, A\, \beta$ und Regeln $A \rightarrow \alpha\,,\; A \rightarrow \alpha' \;\in\; P$.

Dann haben wir:

$$\begin{array}{lll} \mathsf{First}_k(\alpha\,\beta) \;\cap\; \mathsf{First}_k(\alpha'\,\beta) & = & \mathsf{First}_k(\alpha) \odot \mathsf{First}_k(\beta) \;\cap\; \mathsf{First}_k(\alpha') \odot \mathsf{First}_k(\beta) \\ & \subseteq & \mathsf{First}_k(\alpha) \odot \mathsf{Follow}_k(A) \;\cap\; \mathsf{First}_k(\alpha') \odot \mathsf{Follow}_k(A) \\ & = & \emptyset \end{array}$$

Folglich ist G auch $LL(k)$:-)

Sei G $LL(1)$.

Betrachte zwei verschiedene Regeln $A \to \alpha\,,\; A \to \alpha' \;\in\; P$.

Fall 1: $\epsilon \in \mathsf{First}_1(\alpha) \cap \mathsf{First}_1(\alpha')$.

Dann kann G nicht $LL(1)$ sein :-)

Sei G $LL(1)$.

Betrachte zwei verschiedene Regeln $A \to \alpha\,,\ A \to \alpha' \ \in\ P$.

Fall 1: $\epsilon \in \mathsf{First}_1(\alpha) \cap \mathsf{First}_1(\alpha')$.

Dann kann G nicht $LL(1)$ sein :-)

Fall 2: $\epsilon \notin \mathsf{First}_1(\alpha) \cup \mathsf{First}_1(\alpha')$.

Sei $S \to_L^* u\, A\, \beta$. Da G $LL(1)$ ist, gilt:

$$
\begin{aligned}
\mathsf{First}_1(\alpha) \odot \mathsf{Follow}_1(A) \cap \mathsf{First}_1(\alpha') \odot \mathsf{Follow}_1(A) \\
&= \mathsf{First}_1(\alpha) \cap \mathsf{First}_1(\alpha') \\
&= \mathsf{First}_1(\alpha) \odot \mathsf{First}_1(\beta) \cap \mathsf{First}_1(\alpha') \odot \mathsf{First}_1(\beta) \\
&= \emptyset
\end{aligned}
$$

Fall 3: $\epsilon \in \mathsf{First}_1(\alpha)$ und $\epsilon \notin \mathsf{First}_1(\alpha')$.

Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{First}_1(\alpha) \odot \mathsf{Follow}_1(A) \cap \mathsf{First}_1(\alpha') \odot \mathsf{Follow}_1(A) \\
&\qquad = \mathsf{First}_1(\alpha) \odot \mathsf{Follow}_1(A) \cap \mathsf{First}_1(\alpha') \\
&\qquad = \mathsf{First}_1(\alpha) \odot (\bigcup\{\mathsf{First}_1(\beta) \mid S \rightarrow_L^* u\, A\, \beta\}) \cap \mathsf{First}_1(\alpha') \\
&\qquad = (\bigcup\{\mathsf{First}_1(\alpha) \odot \mathsf{First}_1(\beta) \mid S \rightarrow_L^* u\, A\, \beta\}) \cap \mathsf{First}_1(\alpha') \\
&\qquad = \bigcup\{\mathsf{First}_1(\alpha) \odot \mathsf{First}_1(\beta) \cap \mathsf{First}_1(\alpha') \mid S \rightarrow_L^* u\, A\, \beta\} \\
&\qquad = \bigcup\{\emptyset \mid S \rightarrow_L^* u\, A\, \beta\} \\
&\qquad = \emptyset
\end{aligned}
$$

Fall 3: $\epsilon \in \text{First}_1(\alpha)$ und $\epsilon \notin \text{First}_1(\alpha')$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&\text{First}_1(\alpha) \odot \text{Follow}_1(A) \cap \text{First}_1(\alpha') \odot \text{Follow}_1(A) \\
&\quad = \text{First}_1(\alpha) \odot \text{Follow}_1(A) \cap \text{First}_1(\alpha') \\
&\quad = \text{First}_1(\alpha) \odot (\bigcup\{\text{First}_1(\beta) \mid S \rightarrow_L^* u\, A\, \beta\}) \cap \text{First}_1(\alpha') \\
&\quad = (\bigcup\{\text{First}_1(\alpha) \odot \text{First}_1(\beta) \mid S \rightarrow_L^* u\, A\, \beta\}) \cap \text{First}_1(\alpha') \\
&\quad = \bigcup\{\text{First}_1(\alpha) \odot \text{First}_1(\beta) \cap \text{First}_1(\alpha') \mid S \rightarrow_L^* u\, A\, \beta\} \\
&\quad = \bigcup\{\emptyset \mid S \rightarrow_L^* u\, A\, \beta\} \\
&\quad = \emptyset
\end{aligned}$$

Fall 4: $\epsilon \notin \text{First}_1(\alpha)$ und $\epsilon \in \text{First}_1(\alpha')$: analog :-)

Beispiel:

$$\begin{array}{lll} S & \to & a\,A\,a\,a^{\,0} \mid b\,A\,b\,a^{\,1} \\ A & \to & b^{\,0} \mid \epsilon^{\,1} \end{array}$$

Offenbar ist die Grammatik $LL(2)$:-) Andererseits gilt:

$$\begin{array}{rl} \multicolumn{2}{l}{\mathsf{First}_2(b) \odot \mathsf{Follow}_2(A) \;\cap\; \mathsf{First}_2(\epsilon) \odot \mathsf{Follow}_2(A)} \\ = & \{b\} \odot \{a\,a\,,\;b\,a\} \;\cap\; \{\epsilon\} \odot \{a\,a\,,\;b\,a\} \\ = & \{b\,a\,,\;b\,b\} \;\cap\; \{a\,a\,,\;b\,a\} \\ \neq & \emptyset \end{array}$$

Folglich ist die Grammatik nicht stark $LL(2)$:-(

Beispiel:

$$\begin{array}{lll} S & \to & a\,A\,a\,a^{\,0} \mid b\,A\,b\,a^{\,1} \\ A & \to & b^{\,0} \mid \epsilon^{\,1} \end{array}$$

Offenbar ist die Grammatik $LL(2)$:-) Andererseits gilt:

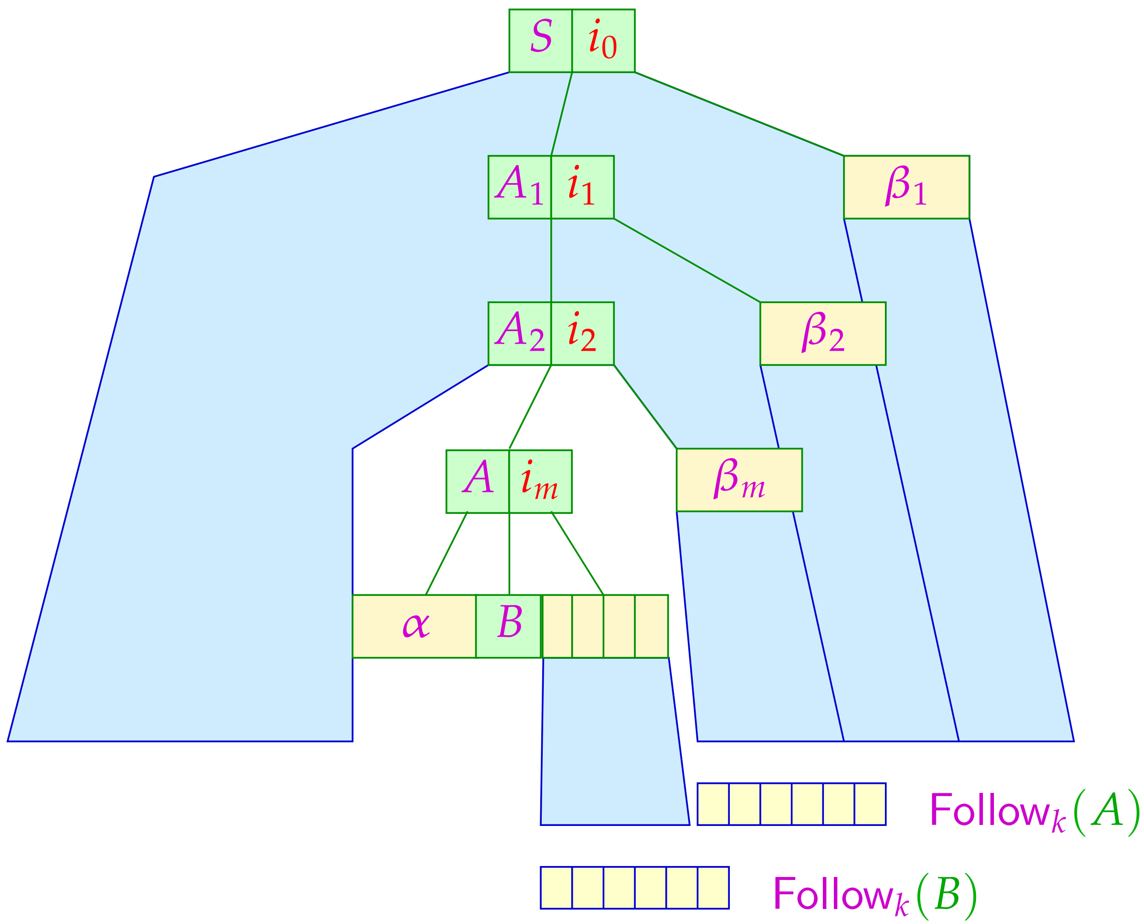
$$\begin{array}{ll} \multicolumn{2}{l}{\mathsf{First}_2(b) \odot \mathsf{Follow}_2(A) \ \cap\ \mathsf{First}_2(\epsilon) \odot \mathsf{Follow}_2(A)} \\ = & \{b\} \odot \{a\,a\,,\ b\,a\} \ \cap\ \{\epsilon\} \odot \{a\,a\,,\ b\,a\} \\ = & \{b\,a\,,\ b\,b\} \ \cap\ \{a\,a\,,\ b\,a\} \\ \neq & \emptyset \end{array}$$

Folglich ist die Grammatik nicht stark $LL(2)$:-(

Wir schließen:

- Für $k > 1$ ist nicht jede $LL(k)$-Grammatik automatisch stark $LL(k)$.
- Zu jeder $LL(k)$-Grammatik kann jedoch eine äquivalente starke $LL(k)$-Grammatik konstruiert werden $\Longrightarrow$ Übung!

Berechnung von $\mathsf{Follow}_k(B)$:



Berechnung von $\mathsf{Follow}_k(B)$:

Idee:

- Wir stellen ein Ungleichungssystem auf :-)
- ϵ ist ein möglicher rechter Kontext von S :-)
- Mögliche rechte Kontexte der linken Seite einer Regel propagieren wir ans Ende jeder rechten Seite ...

... im Beispiel:

$$S \rightarrow \epsilon \quad | \quad a\,S\,b$$

$$\begin{array}{lll} \mathsf{Follow}_k(S) & \supseteq & \{\epsilon\} \\ \mathsf{Follow}_k(S) & \supseteq & \{b\} \odot \mathsf{Follow}_k(S) \end{array}$$

Allgemein:

$$
\begin{array}{lll}
\mathsf{Follow}_k(S) & \supseteq & \{\epsilon\} \\
\mathsf{Follow}_k(B) & \supseteq & \mathsf{First}_k(X_1) \odot \ldots \odot \mathsf{First}_k(X_m) \odot \mathsf{Follow}_k(A) \\
 & & \text{für} \quad A \to \alpha\, B\, X_1 \ldots X_m \ \in \ P
\end{array}
$$

Diskussion:

- Man überzeugt sich, dass die kleinste Lösung dieses Ungleichungssystems tatsächlich die Mengen $\mathsf{Follow}_k(B)$ liefert :-)
- Die Größe der auftretenden Mengen steigt mit k rapide :-(
- In praktischen Systemen wird darum meist nur der Fall $k = 1$ implementiert ...