Kostenkalkulation:

$$
\begin{array}{lcll}
c_t[s] & = & c_{t_1}[s_1] + \ldots + c_{t_k}[s_k] & \text{falls} \quad s = a(s_1, \ldots, s_k), t = a(t_1, \ldots, t_k) \\
c_t[R] & = & \bigsqcap\{c[R,s] + c_t[s] \mid s \in Q(t)\} & \text{wobei}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcll}
c[R,s] & \leq & c[r] & \text{falls} \quad r : \; R \rightarrow s \\
c[R,s] & \leq & c[r] + c[R',s] & \text{falls} \quad r : \; R \rightarrow R'
\end{array}
$$

Das Constraint-System für $c[R,s]$ kann in Zeit $\mathcal{O}(n \cdot \log n)$ gelöst werden — falls n die Anzahl der Paare R, s ist :-)

Für jedes R, s liefert die Fixpunkt-Berechnung eine Folge:

$$\pi[R,s] \; : \; R \Rightarrow R_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow R_k \Rightarrow s$$

deren Kosten gerade $c[R,s]$ ist :-)

Mithilfe der $\pi[R, s]$ lässt sich eine billigste Ableitung topdown rekonstruieren :-)

Im Beispiel:

$$\begin{aligned} D_2 &= c; \\ A_2 &= D_2; \\ D_1 &= M[A_1 + A_2]; \end{aligned}$$

mit Kosten 5 . Die Alternative:

$$\begin{aligned} D_2 &= c; \\ D_3 &= A_1; \\ D_4 &= D_3 + D_2; \\ A_2 &= D_4; \\ D_1 &= M[A_2]; \end{aligned}$$

hätte Kosten 7 :-)

Diskussion:

- Die Code-Erzeugung muss schnell gehn :-)
- Anstelle für jeden Knoten neu zu überprüfen, wie die Regeln zusammen passen, kann die Berechnung auch in einen endlichen Automaten kompiliert werden :-))

Ein deterministischer endlicher Baumautomat (DTA) A besteht aus:

$$
\begin{array}{lcl}
Q & = & \text{endliche Menge von Zuständen} \\
\Sigma & = & \text{Operatoren und Konstanten} \\
\delta_a & = & \text{Übergangsfunktion für } a \in \Sigma \\
F \subseteq Q & = & \text{akzeptierende Zustände}
\end{array}
$$

Dabei ist:

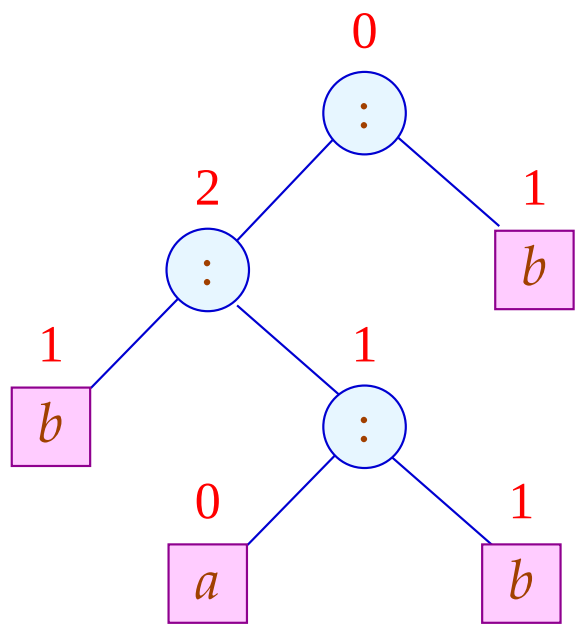
$$\begin{array}{llll} \delta_c : & Q & \text{falls} & c \quad \text{Konstante} \\ \delta_a : & Q^k \to Q & \text{falls} & a \quad k\text{-stellig} \end{array}$$

Beispiel:

$$\begin{array}{lllllll} Q & = & \{0,1,2\} & & F & = & \{0\} \\ \Sigma & = & \{a,b,:\} & & & & \\ \delta_a & = & 0 & & \delta_b & = & 1 \end{array}$$

$$\delta_: (s_1, s_2) = (s_1 + s_2)\%3$$

// akzeptiert alle Bäume mit $3 \cdot k$ b-Blättern



Der Zustand an einem Knoten a ergibt sich aus den Zuständen der Kinder mittels δ_a (-:

$$
\begin{aligned}
Q(c) &= \delta_c \\
Q(a(t_1, \ldots, t_k)) &= \delta_a(Q(t_1), \ldots, Q(t_k))
\end{aligned}
$$

Die von A definierte Sprache (oder: Menge von Bäumen) ist:

$$\mathcal{L}(A) \;=\; \{t \mid Q(t) \in F\}$$

... in unserer Anwendung:

Q $\;=\;$ Teilmengen von $\mathsf{Reg} \cup \mathsf{Term} \cup \{S\}$

// I.a. werden nicht sämtiche Teilmengen benötigt :-)

F $\;=\;$ gewünschter Effekt

δ_R $\;=\;$ $\mathsf{Move}\,\{R\}$

δ_c $\;=\;$ $\mathsf{Move}\,\{c\}$

$\delta_a(Q_1, \ldots, Q_k)$ $\;=\;$ $\mathsf{Move}\,\{s = a(s_1, \ldots, s_k) \in \mathsf{Term} \mid s_i \in Q_i\}$

... im Beispiel:

$$
\begin{aligned}
\delta_c &= \{A, D\} &= q_0 \\
&= \delta_A \\
&= \delta_D
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta_+(q_0, q_0) &= \{A, D, A + A\} &= q_1 \\
&= \delta_+(q_0, _) \\
&= \delta_+(_, q_0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta_M(q_0) &= \{A, D\} &= q_0 \\
&= \delta_M(q_1)
\end{aligned}
$$

Um die Anzahl der Zustände zu reduzieren, haben wir die vollständigen rechten Seiten, die keine echten Teilmuster sind, in den Zuständen weggelassen :-)

Integration der Kostenberechnung:

Problem:

Kosten können (im Prinzip) beliebig groß werden ;-(

Unser FTA besitzt aber nur endlich viele Zustände :-((

Idee:

Pelegri-Lopart 1988

Betrachte nicht absolute Kosten — sondern relative !!!

Eduardo Pelegri-Llopart,
Sun Microsystems, Inc.

Beobachtung:

- In gängigen Prozessoren kann man Werte von jedem Register in jedes andere schieben $\Longrightarrow$

  Die Kosten zwischen Registern differieren nur um eine Konstante :-)

- Komplexe rechte Seiten lassen sich i.a. mittels elementarerer Instruktionen simulieren $\Longrightarrow$

  Die Kosten zwischen Teilausdrücken und Registern differieren nur um eine Konstante :-))

- Die Kostenberechnung ist additiv $\Longrightarrow$

  Wir können statt mit absoluten Kosten-Angaben auch mit Kosten-Differenzen rechnen !!!

  Von diesen gibt es nur endlich viele :-)

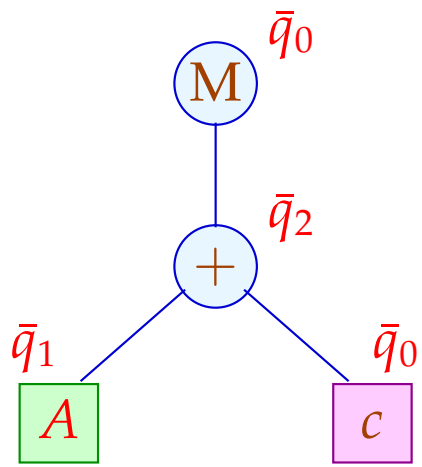
... im Beispiel:

$$
\begin{aligned}
\delta_c &= \{A \mapsto 1, D \mapsto 0\} &&= \bar{q}_0 \\
&= \delta_D \\
\delta_A &= \{A \mapsto 0, D \mapsto 1\} &&= \bar{q}_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta_+(\bar{q}_1, \bar{q}_0) &= \{A \mapsto 2, D \mapsto 1, A + A \mapsto 0\} &&= \bar{q}_2 \\
\delta_+(\bar{q}_0, \bar{q}_0) &= \{A \mapsto 1, D \mapsto 0, A + A \mapsto 1\} &&= \bar{q}_3 \\
\delta_+(\bar{q}_1, \bar{q}_1) &= \{A \mapsto 4, D \mapsto 3, A + A \mapsto 0\} &&= \bar{q}_4 \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta_M(\bar{q}_2) &= \{A \mapsto 1, D \mapsto 0\} &&= \bar{q}_0 \\
&= \delta_M(\bar{q}_i) &&, \quad i = 0, \ldots, 4
\end{aligned}
$$

... das liefert die folgende Berechnung:



Für jede Konstanten-Klasse c und jedes Register R in δ_c tabellieren wir die zu wählende billigste Berechnung:

$$c \ : \quad \{A \mapsto 5, 3, D \mapsto 3\}$$

Analog tabellieren wir für jeden Operator a, jedes $\tau \in \bar{Q}^k$ und jedes R in $\delta_a(\tau)$:

M	select_M
$\bar{q}_0$	$\{A \mapsto 5, 1, D \mapsto 1\}$
$\bar{q}_1$	$\{A \mapsto 5, 1, D \mapsto 1\}$
$\bar{q}_2$	$\{A \mapsto 5, 0, D \mapsto 0\}$
$\bar{q}_3$	$\{A \mapsto 5, 1, D \mapsto 1\}$
$\bar{q}_4$	$\{A \mapsto 5, 0, D \mapsto 0\}$

Für "$+$" ist die Tabelle besonders einfach:

$+$	$\bar{q}_j$
$\bar{q}_i$	$\{A \mapsto 5, 3, D \mapsto 3\}$

Problem:

- Für reale Instruktionssätze benötigt man leicht um die 1000 Zustände.
- Die Tabellen für mehrstellige Operatoren werden riesig :-(

$\Longrightarrow$ Wir benötigen Verfahren der Tabellen-Komprimierung ...

Tabellen-Kompression:

Die Tabelle für "$+$" sieht im Beispiel so aus:

$+$	$\bar{q}_0$	$\bar{q}_1$	$\bar{q}_2$	$\bar{q}_3$	$\bar{q}_4$
$\bar{q}_0$	$\bar{q}_3$	$\bar{q}_2$	$\bar{q}_3$	$\bar{q}_3$	$\bar{q}_3$
$\bar{q}_1$	$\bar{q}_2$	$\bar{q}_4$	$\bar{q}_2$	$\bar{q}_2$	$\bar{q}_2$
$\bar{q}_2$	$\bar{q}_3$	$\bar{q}_2$	$\bar{q}_3$	$\bar{q}_3$	$\bar{q}_3$
$\bar{q}_3$	$\bar{q}_3$	$\bar{q}_2$	$\bar{q}_3$	$\bar{q}_3$	$\bar{q}_3$
$\bar{q}_4$	$\bar{q}_3$	$\bar{q}_2$	$\bar{q}_3$	$\bar{q}_3$	$\bar{q}_3$

Die meisten Zeilen / Spalten sind offenbar ganz ähnlich ;-)

Idee 1: Äquivalenzklassen

Wir setzen $q \equiv_a q'$, genau dann wenn

$$\forall\, p: \quad \delta_a(q,p) = \delta_a(q',p) \quad \wedge \quad \delta_a(p,q) = \delta_a(p,q')$$
$$\wedge \quad \mathsf{select}_a(q,p) = \mathsf{select}_a(q',p) \quad \wedge \quad \mathsf{select}_a(p,q) = \mathsf{select}_a(p,q')$$

Im Beispiel:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \{\bar{q}_0, \bar{q}_2, \bar{q}_3, \bar{q}_4\} \\ Q_2 &= \{\bar{q}_1\} \end{aligned}$$

mit:

$+$	Q_1	Q_2
Q_1	$\bar{q}_3$	$\bar{q}_2$
Q_2	$\bar{q}_2$	$\bar{q}_4$

Idee 2: Zeilenverschiebung

Sind viele Einträge gleich (im Beispiel etwa default $= \bar{q}_3$), genügt es, die übrigen Einträge zu speichern ;-)

Im Beispiel:

$+$	$\bar{q}_0$	$\bar{q}_1$	$\bar{q}_2$	$\bar{q}_3$	$\bar{q}_4$
$\bar{q}_0$		$\bar{q}_2$			
$\bar{q}_1$	$\bar{q}_2$	$\bar{q}_4$	$\bar{q}_2$	$\bar{q}_2$	$\bar{q}_2$
$\bar{q}_2$		$\bar{q}_2$			
$\bar{q}_3$		$\bar{q}_2$			
$\bar{q}_4$		$\bar{q}_2$			

Dann legen wir:

(1) gleiche Zeilen übereinander;

(2) verschiedene (Klassen von) Zeilen auf Lücke verschoben übereinander:

	$\bar{q}_0$	$\bar{q}_1$	$\bar{q}_2$	$\bar{q}_3$	$\bar{q}_4$
class	0	1	0	0	0

	0	1
disp	0	2

	0	1	2	3	4	5	6
A	$\bar{q}_2$	$\bar{q}_2$	$\bar{q}_4$	$\bar{q}_2$	$\bar{q}_2$	$\bar{q}_2$	$\bar{q}_2$
valid	0	0	1	1	1	1	1

Für jeden Eintrag im ein-dimensionalen Feld A vermerken wir in valid, zu welcher Zeile der Eintrag gehört ...

Ein Feld-Zugriff $\delta_+(\bar{q}_i, \bar{q}_j)$ wird dann so realisiert:

$$
\begin{array}{rcl}
\delta_+(\bar{q}_i, \bar{q}_j) & = & \mathsf{let} \quad c \;=\; \mathsf{class}[\bar{q}_i]; \\
& & \qquad\;\; d \;=\; \mathsf{disp}[c]; \\
& & \mathsf{in} \;\; \mathsf{if} \;\; (\mathsf{valid}[d+j] \equiv c) \\
& & \qquad \mathsf{then} \;\; \mathsf{A}[d+j] \\
& & \qquad \mathsf{else} \;\; \mathsf{default} \\
& & \mathsf{end}
\end{array}
$$

Reinhard Wilhelm, Saarbrücken

Diskussion:

- Die Tabellen werden i.a. erheblich kleiner.
- Dafür werden Tabellenzugriffe etwas teurer.
- Das Verfahren versagt in einigen (theoretischen) Fällen.
- Dann bleibt immer noch das dynamische Verfahren ...

  möglicherweise mit Caching der einmal berechneten Werte,
  um unnötige Mehrfachberechnungen zu vermeiden :-)