

Algorithmus:

```
2N result = ∅; // Ergebnis-Menge
int count[P]; // Zähler für jede Regel
2P rhs[N]; // Vorkommen in rechten Seiten

forall (A ∈ N) rhs[A] = ∅; // Initialisierung
forall ((A, i) ∈ P) { //
    count[(A, i)] = 0; //
    init(A, i); // Initialisierung von rhs
} //
... //
```

Die Hilfsfunktion `init` zählt die Nichtterminal-Vorkommen in der rechten Seite und vermerkt sie in der Datenstruktur `rhs` :-)

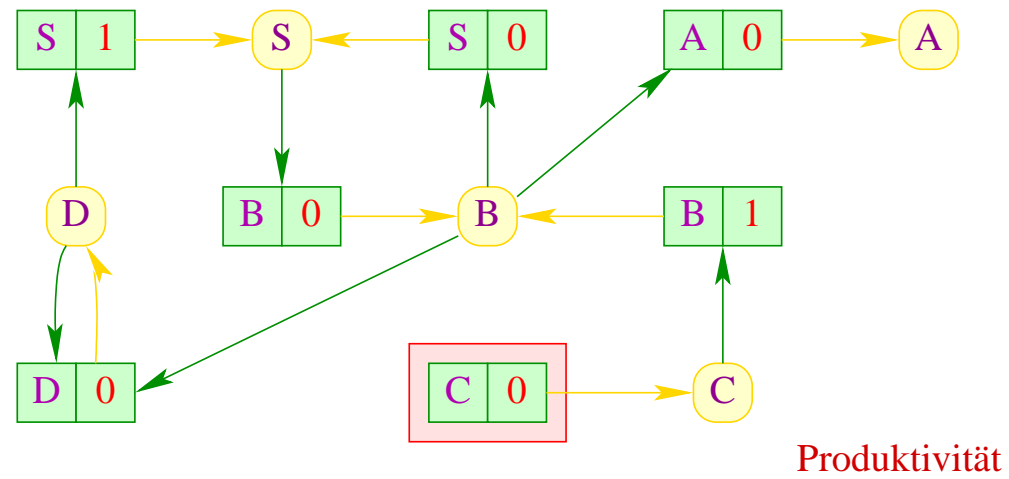
```

... //
2P W = {r | count[r] = 0}; // Workset
while (W ≠ ∅) { //
    (A, i) = extract(W); //
    if (A ∉ result) { //
        result = result ∪ {A}; //
        forall (r ∈ rhs[A]) { //
            count[r]--; //
            if (count[r] == 0) W = W ∪ {r}; //
        } // end of forall
    } // end of if
} // end of while

```

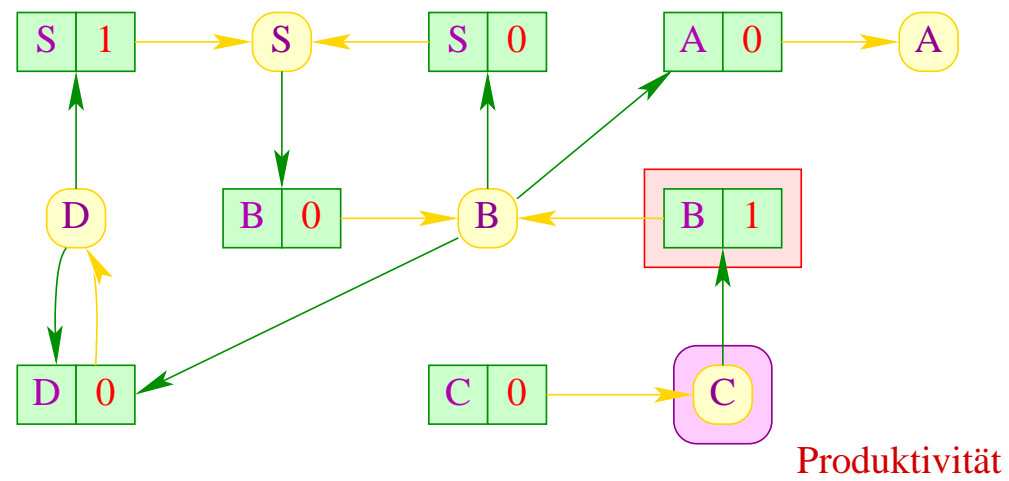
Die Menge W verwaltet die Regeln, deren rechte Seiten nur produktive Nichtterminale enthalten :-))

... im Beispiel:

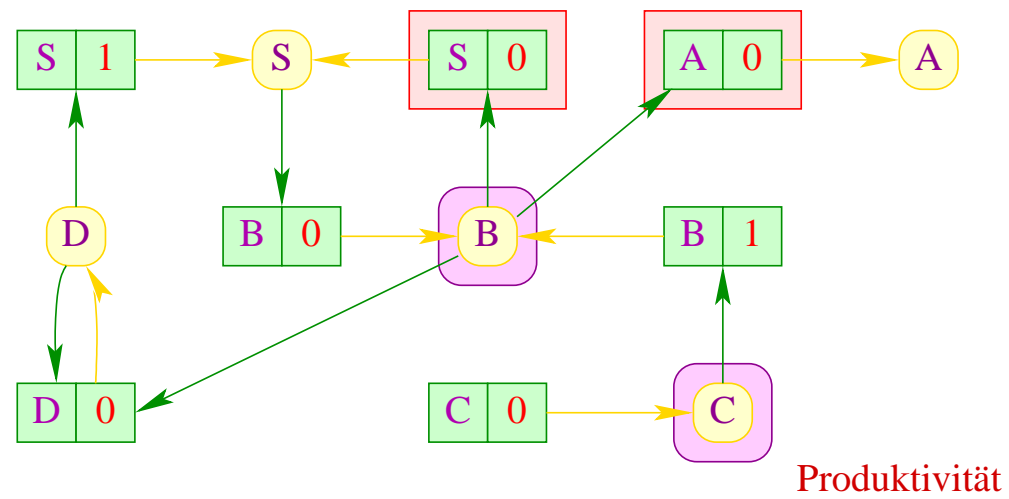


Produktivität

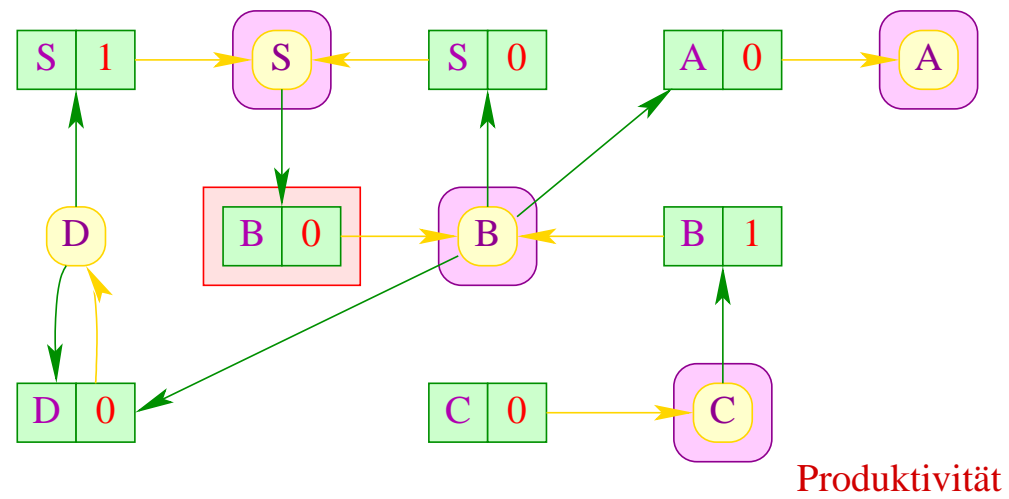
... im Beispiel:



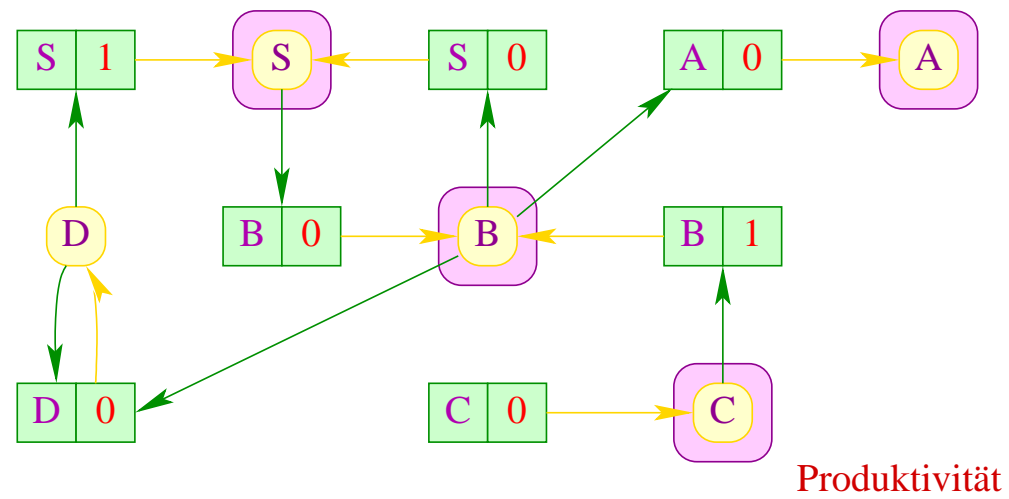
... im Beispiel:



... im Beispiel:



... im Beispiel:



Laufzeit:

- Die Initialisierung der Datenstrukturen erfordert lineare Laufzeit.
 - Jede Regel wird maximal einmal in W eingefügt.
 - Jedes A wird maximal einmal in $result$ eingefügt.
- \implies Der Gesamtaufwand ist **linear** in der Größe der Grammatik :-)

Korrektheit:

- Falls A in der j -ten Iteration der **while**-Schleife in $result$ eingefügt, gibt es einen Ableitungsbaum für A der Höhe maximal $j - 1$:-)
- Für jeden Ableitungsbaum wird die Wurzel einmal in W eingefügt :-)

Diskussion:

- Um den Test $(A \in \text{result})$ einfach zu machen, repräsentiert man die Menge result durch ein **Array**.
- **W** wie auch die Mengen $\text{rhs}[A]$ wird man dagegen als **Listen** repräsentieren :-)

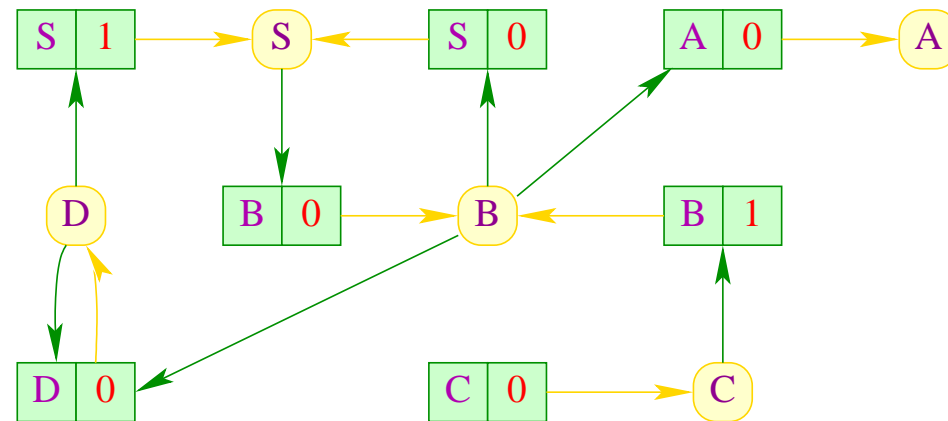
Diskussion:

- Um den Test $(A \in \text{result})$ einfach zu machen, repräsentiert man die Menge result durch ein **Array**.
- **W** wie auch die Mengen $\text{rhs}[A]$ wird man dagegen als **Listen** repräsentieren :-)
- Der Algorithmus funktioniert auch, um **kleinste** Lösungen von **Booleschen** Ungleichungssystemen zu bestimmen :-)
- Die Ermittlung der produktiven Nichtterminale kann benutzt werden, um festzustellen, ob $\mathcal{L}(G) \neq \emptyset$ ist (\rightarrow **Leerheitsproblem**)

Idee für Erreichbarkeit:

Abhängigkeits-Graph

... hier:



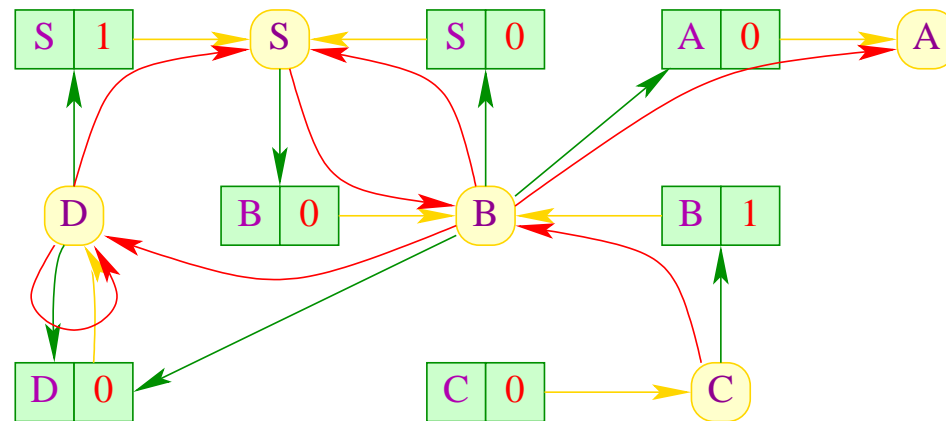
Knoten: Nichtterminale

Kanten: (A, B) falls $B \rightarrow \alpha_1 A \alpha_2 \in P$

Idee für Erreichbarkeit:

Abhängigkeits-Graph

... hier:



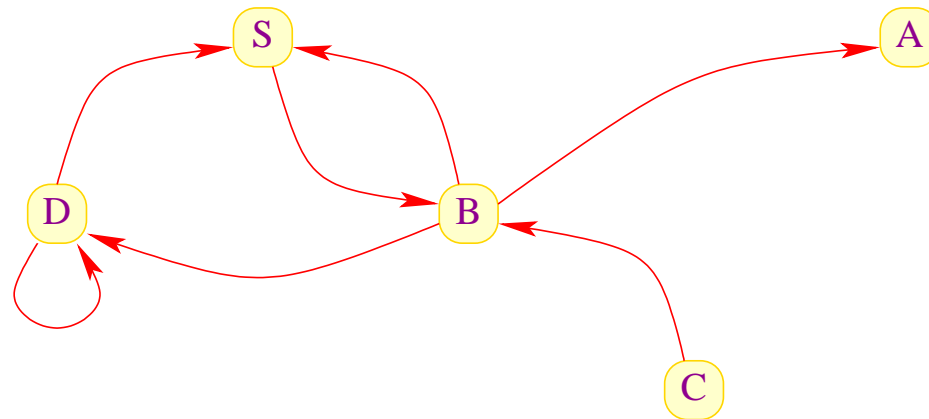
Knoten: Nichtterminale

Kanten: (A, B) falls $B \rightarrow \alpha_1 A \alpha_2 \in P$

Idee für Erreichbarkeit:

Abhängigkeits-Graph

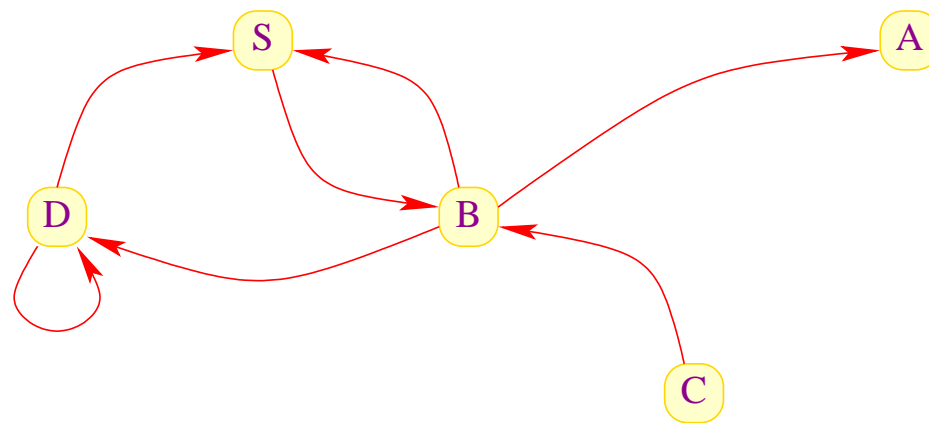
... hier:



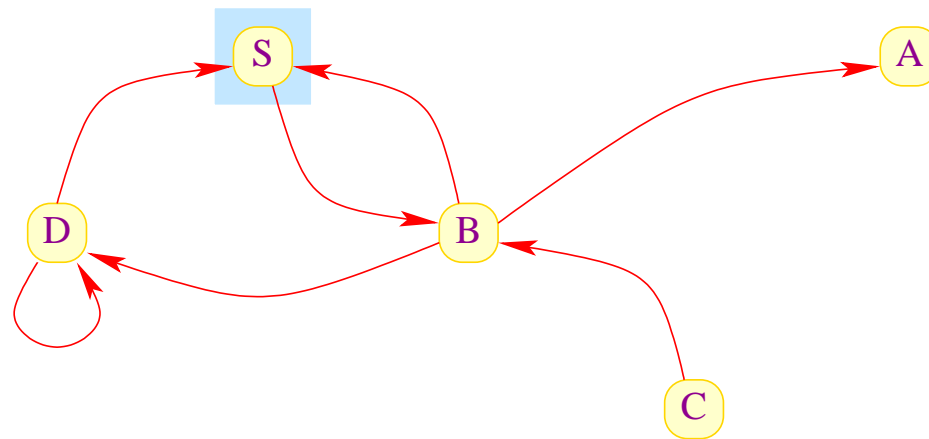
Knoten: Nichtterminale

Kanten: (A, B) falls $B \rightarrow \alpha_1 A \alpha_2 \in P$

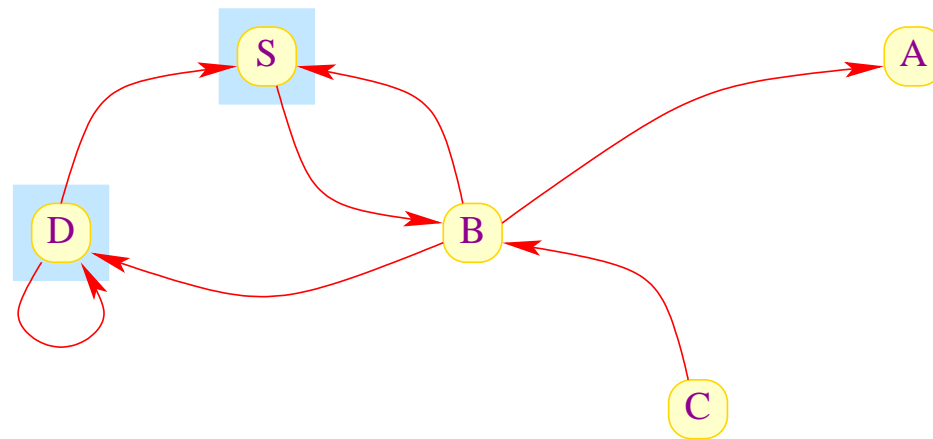
Das Nichtterminal A ist erreichbar, falls es im Abhängigkeitsgraphen einen Pfad von A nach S gibt :-)



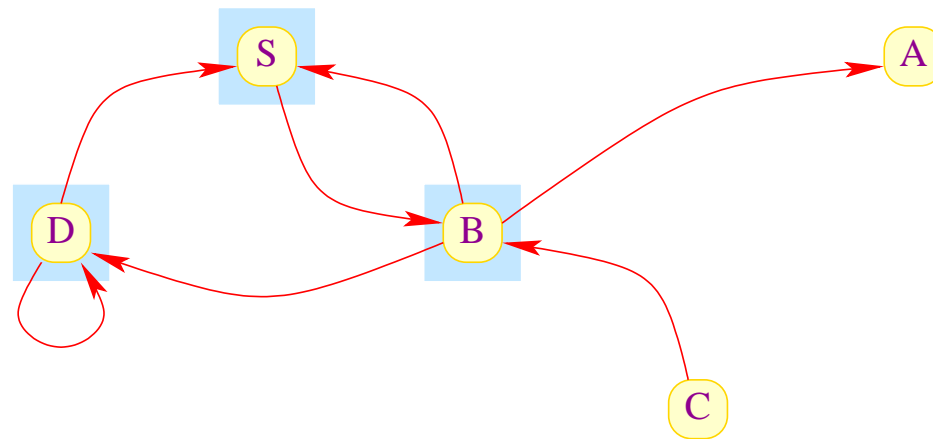
Das Nichtterminal A ist erreichbar, falls es im Abhängigkeitsgraphen einen Pfad von A nach S gibt :-)



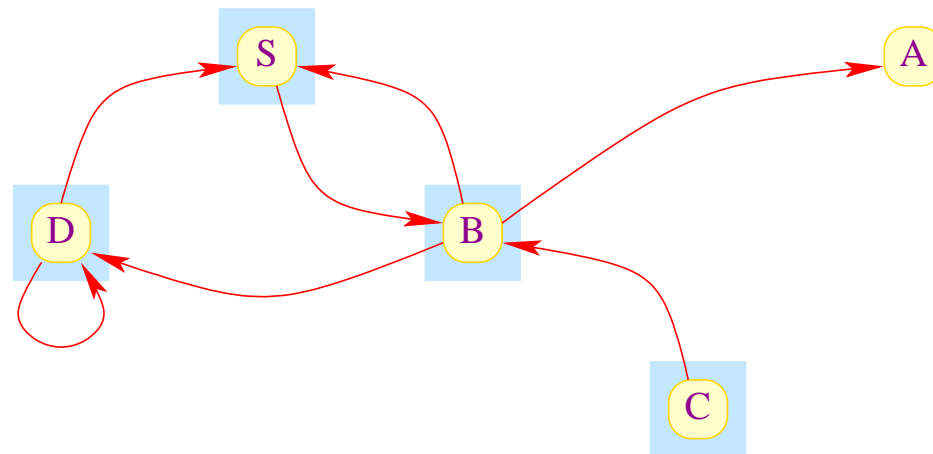
Das Nichtterminal A ist erreichbar, falls es im Abhängigkeitsgraphen einen Pfad von A nach S gibt :-)



Das Nichtterminal A ist erreichbar, falls es im Abhängigkeitsgraphen einen Pfad von A nach S gibt :-)



Das Nichtterminal A ist erreichbar, falls es im Abhängigkeitsgraphen einen Pfad von A nach S gibt :-)



Fazit:

- Erreichbarkeit in gerichteten Graphen kann mithilfe von DFS in linearer Zeit berechnet werden.
- Damit kann die Menge aller erreichbaren und produktiven Nichtterminale in linearer Zeit berechnet werden :-)

Fazit:

- Erreichbarkeit in gerichteten Graphen kann mithilfe von DFS in linearer Zeit berechnet werden.
- Damit kann die Menge aller erreichbaren und produktiven Nichtterminale in linearer Zeit berechnet werden :-)

Eine Grammatik G heißt reduziert, wenn alle Nichtterminale von G sowohl produktiv wie erreichbar sind ...

Fazit:

- Erreichbarkeit in gerichteten Graphen kann mithilfe von DFS in linearer Zeit berechnet werden.
- Damit kann die Menge aller erreichbaren und produktiven Nichtterminale in linearer Zeit berechnet werden :-)

Eine Grammatik G heißt reduziert, wenn alle Nichtterminale von G sowohl produktiv wie erreichbar sind ...

Satz

Zu jeder kontextfreien Grammatik $G = (N, T, P, S)$ mit $\mathcal{L}(G) \neq \emptyset$ kann in linearer Zeit eine reduzierte Grammatik G' konstruiert werden mit

$$\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(G')$$

Konstruktion:

1. Schritt:

Berechne die Teilmenge $N_1 \subseteq N$ aller produktiven Nichtterminale von G .

Da $\mathcal{L}(G) \neq \emptyset$ ist insbesondere $S \in N_1$:-)

2. Schritt:

Konstruiere: $P_1 = \{A \rightarrow \alpha \in P \mid A \in N_1 \wedge \alpha \in (N_1 \cup T)^*\}$

Konstruktion (Forts.):

3. Schritt:

Berechne die Teilmenge $N_2 \subseteq N_1$ aller produktiven **und** erreichbaren Nichtterminale von G .

Da $\mathcal{L}(G) \neq \emptyset$ ist insbesondere $S \in N_2$:-))

4. Schritt:

Konstruiere: $P_2 = \{A \rightarrow \alpha \in P \mid A \in N_2 \wedge \alpha \in (N_2 \cup T)^*\}$

Konstruktion (Forts.):

3. Schritt:

Berechne die Teilmenge $N_2 \subseteq N_1$ aller produktiven und erreichbaren Nichtterminale von G .

Da $\mathcal{L}(G) \neq \emptyset$ ist insbesondere $S \in N_2$:-))

4. Schritt:

Konstruiere: $P_2 = \{A \rightarrow \alpha \in P \mid A \in N_2 \wedge \alpha \in (N_2 \cup T)^*\}$

Ergebnis: $G' = (N_2, T, P_2, S)$:-)

... im Beispiel:

$S \rightarrow aBB \mid bD$

$A \rightarrow Bc$

$B \rightarrow Sd \mid C$

$C \rightarrow a$

$D \rightarrow BD$

... im Beispiel:

$S \rightarrow aBB \mid bD$

$A \rightarrow Bc$

$B \rightarrow Sd \mid C$

$C \rightarrow a$

$D \rightarrow BD$

... im Beispiel:

$S \rightarrow a B B$

$A \rightarrow B c$

$B \rightarrow S d \mid C$

$C \rightarrow a$

... im Beispiel:

$S \rightarrow a B B$

$A \rightarrow B c$

$B \rightarrow S d \mid C$

$C \rightarrow a$

... im Beispiel:

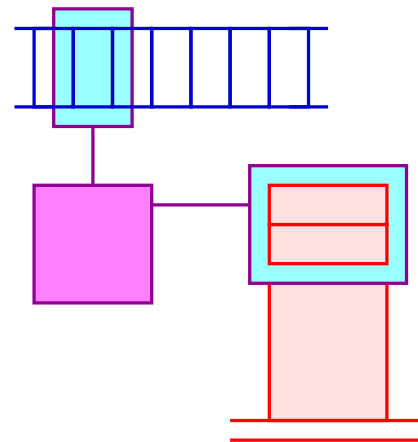
$$S \rightarrow a B B$$

$$B \rightarrow S d \mid C$$

$$C \rightarrow a$$

2.2 Grundlagen: Kellerautomaten

Durch kontextfreie Grammatiken spezifizierte Sprachen können durch **Kellerautomaten (Pushdown Automata)** akzeptiert werden:



Der Keller wird z.B. benötigt, um korrekte Klammerung zu überprüfen :-)

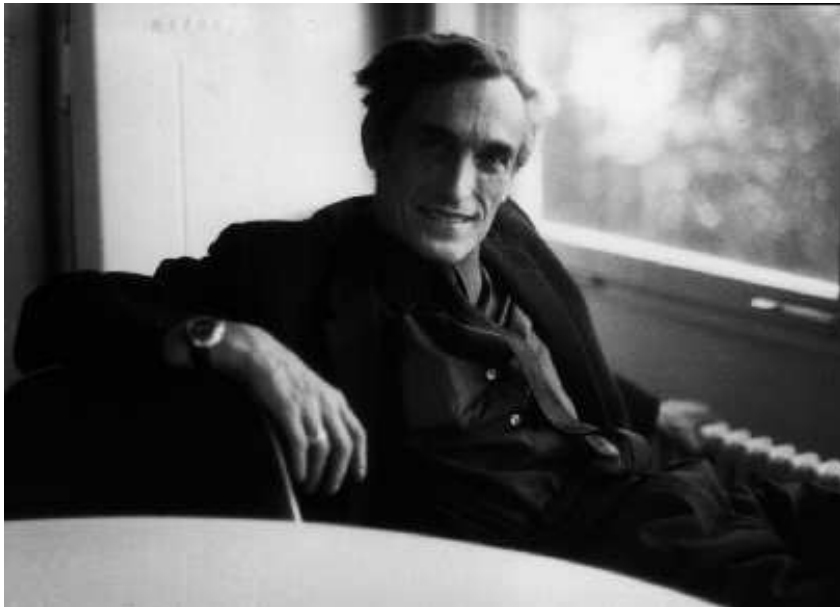


Friedrich L. Bauer, TUM



Klaus Samelson, TUM

Kellerautomaten für kontextfreie Sprachen wurden erstmals vorgeschlagen von Michel Schützenberger und Antony G. Öttinger:



Marcel-Paul Schützenberger
(1920-1996), Paris



Antony G. Öttinger, Präsident der
ACM 1966-68

Beispiel:

Zustände: 0, 1, 2

Anfangszustand: 0

Endzustände: 0, 2

0	<i>a</i>	11
1	<i>a</i>	11
11	<i>b</i>	2
12	<i>b</i>	2

Beispiel:

Zustände: 0, 1, 2

Anfangszustand: 0

Endzustände: 0, 2

0	<i>a</i>	11
1	<i>a</i>	11
11	<i>b</i>	2
12	<i>b</i>	2

Achtung:

- Wir unterscheiden **nicht** zwischen Kellersymbolen und Zuständen :-)
- Das rechteste / oberste Kellersymbol repräsentiert den Zustand :-)
- Jeder Übergang liest / modifiziert einen oberen Abschnitt des Kellers :-)

Formal definieren wir deshalb einen **Kellerautomaten (PDA)** als ein Tupel:

$M = (Q, T, \delta, q_0, F)$ wobei:

- Q eine endliche Menge von Zuständen;
- T das Eingabe-Alphabet;
- $q_0 \in Q$ der Anfangszustand;
- $F \subseteq Q$ die Menge der Endzustände und
- $\delta \subseteq Q^+ \times (T \cup \{\epsilon\}) \times Q^*$ eine endliche Menge von Übergängen ist (das Programm :-)

Formal definieren wir deshalb einen **Kellerautomaten (PDA)** als ein Tupel:

$M = (Q, T, \delta, q_0, F)$ wobei:

- Q eine endliche Menge von Zuständen;
- T das Eingabe-Alphabet;
- $q_0 \in Q$ der Anfangszustand;
- $F \subseteq Q$ die Menge der Endzustände und
- $\delta \subseteq Q^+ \times (T \cup \{\epsilon\}) \times Q^*$ eine endliche Menge von Übergängen ist (das Programm :-)

Mithilfe der Übergänge definieren wir **Berechnungen** von Kellerautomaten :-)

Der jeweilige **Berechnungszustand** (die aktuelle **Konfiguration**) ist ein Paar:

$$(\gamma, w) \in Q^* \times T^*$$

bestehend aus dem **Kellerinhalt** und dem **noch zu lesenden Input**.

... im Beispiel:

Zustände: 0, 1, 2

Anfangszustand: 0

Endzustände: 0, 2

0	<i>a</i>	11
1	<i>a</i>	11
11	<i>b</i>	2
12	<i>b</i>	2

... im Beispiel:

Zustände: 0, 1, 2

Anfangszustand: 0

Endzustände: 0, 2

0	<i>a</i>	11
1	<i>a</i>	11
11	<i>b</i>	2
12	<i>b</i>	2

(0, *aaabbb*)

... im Beispiel:

Zustände: 0, 1, 2

Anfangszustand: 0

Endzustände: 0, 2

0	<i>a</i>	11
1	<i>a</i>	11
11	<i>b</i>	2
12	<i>b</i>	2

$(0, \textit{aaabbb}) \vdash (11, \textit{aabbb})$

... im Beispiel:

Zustände: 0,1,2

Anfangszustand: 0

Endzustände: 0,2

0	<i>a</i>	11
1	<i>a</i>	11
11	<i>b</i>	2
12	<i>b</i>	2

$(0, \textit{aaabbb}) \vdash (11, \textit{aaabbb})$
 $\vdash (111, \textit{abbb})$

... im Beispiel:

Zustände: 0, 1, 2

Anfangszustand: 0

Endzustände: 0, 2

0	<i>a</i>	11
1	<i>a</i>	11
11	<i>b</i>	2
12	<i>b</i>	2

(0, *aaabbb*) ⊢ (11, *aaabbb*)

⊢ (111, *abbb*)

⊢ (1111, *bbb*)

... im Beispiel:

Zustände: 0,1,2

Anfangszustand: 0

Endzustände: 0,2

0	<i>a</i>	11
1	<i>a</i>	11
11	<i>b</i>	2
12	<i>b</i>	2

(0, *aaabbb*) ⊢ (11, *aaabbb*)

⊢ (111, *abbb*)

⊢ (1111, *bbb*)

⊢ (112, *bb*)

... im Beispiel:

Zustände: 0,1,2

Anfangszustand: 0

Endzustände: 0,2

0	<i>a</i>	11
1	<i>a</i>	11
11	<i>b</i>	2
12	<i>b</i>	2

(0, *aaabbb*) ⊢ (11, *aaabbb*)

⊢ (111, *abbb*)

⊢ (1111, *bbb*)

⊢ (112, *bb*)

⊢ (12, *b*)

... im Beispiel:

Zustände: 0, 1, 2

Anfangszustand: 0

Endzustände: 0, 2

0	<i>a</i>	11
1	<i>a</i>	11
11	<i>b</i>	2
12	<i>b</i>	2

$(0, \textit{aaabbb}) \vdash (11, \textit{aaabbb})$
 $\vdash (111, \textit{abbb})$
 $\vdash (1111, \textit{bbb})$
 $\vdash (112, \textit{bb})$
 $\vdash (12, \textit{b})$
 $\vdash (2, \epsilon)$

Ein Berechnungsschritt wird durch die Relation $\vdash \subseteq (Q^* \times T^*)^2$ beschrieben, wobei

$$(\alpha\gamma, xw) \vdash (\alpha\gamma', w) \quad \text{für} \quad (\gamma, x, \gamma') \in \delta$$

Ein Berechnungsschritt wird durch die Relation $\vdash \subseteq (Q^* \times T^*)^2$ beschrieben, wobei

$$(\alpha\gamma, xw) \vdash (\alpha\gamma', w) \quad \text{für} \quad (\gamma, x, \gamma') \in \delta$$

Bemerkungen:

- Die Relation \vdash hängt natürlich vom Kellerautomaten M ab :-)
- Die reflexive und transitive Hülle von \vdash bezeichnen wir mit \vdash^* .
- Dann ist die von M akzeptierte Sprache:

$$\mathcal{L}(M) = \{w \in T^* \mid \exists f \in F : (q_0, w) \vdash^* (f, \epsilon)\}$$

Ein Berechnungsschritt wird durch die Relation $\vdash \subseteq (Q^* \times T^*)^2$ beschrieben, wobei

$$(\alpha\gamma, xw) \vdash (\alpha\gamma', w) \quad \text{für } (\gamma, x, \gamma') \in \delta$$

Bemerkungen:

- Die Relation \vdash hängt natürlich vom Kellerautomaten M ab :-)
- Die reflexive und transitive Hülle von \vdash bezeichnen wir mit \vdash^* .
- Dann ist die von M akzeptierte Sprache:

$$\mathcal{L}(M) = \{w \in T^* \mid \exists f \in F : (q_0, w) \vdash^* (f, \epsilon)\}$$

Wir akzeptieren also mit **Endzustand** und leerem Keller :-)

Der Kellerautomat M heißt **deterministisch**, falls jede Konfiguration maximal eine Nachfolge-Konfiguration hat.

Das ist genau dann der Fall wenn für verschiedene Übergänge $(\gamma_1, x, \gamma_2), (\gamma'_1, x', \gamma'_2) \in \delta$ gilt:

Ist γ_1 ein Suffix von γ'_1 , dann muss $x \neq x' \wedge x \neq \epsilon \neq x'$ sein.

Der Kellerautomat M heißt **deterministisch**, falls jede Konfiguration maximal eine Nachfolge-Konfiguration hat.

Das ist genau dann der Fall wenn für verschiedene Übergänge $(\gamma_1, x, \gamma_2), (\gamma'_1, x', \gamma'_2) \in \delta$ gilt:

Ist γ_1 ein Suffix von γ'_1 , dann muss $x \neq x' \wedge x \neq \epsilon \neq x'$ sein.

... im Beispiel:

0	a	11
1	a	11
11	b	2
12	b	2

ist das natürlich der Fall :-))

Satz

Zu jeder kontextfreien Grammatik $G = (N, T, P, S)$ kann ein PDA M konstruiert werden mit $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(M)$.

Der Satz ist für uns so wichtig, dass wir **zwei** Konstruktionen angeben :-)

Satz

Zu jeder kontextfreien Grammatik $G = (N, T, P, S)$ kann ein PDA M konstruiert werden mit $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}(M)$.

Der Satz ist für uns so wichtig, dass wir **zwei** Konstruktionen angeben :-)

Konstruktion 1: Shift-Reduce-Parser

- Die Eingabe wird sukzessive auf den Keller geschoben.
- Liegt oben auf dem Keller eine **vollständige rechte Seite** (ein **Handle**) vor, wird dieses durch die zugehörige linke Seite ersetzt (**reduziert**) :-)

Beispiel:

$S \rightarrow AB$

$A \rightarrow a$

$B \rightarrow b$

Der Kellerautomat:

Zustände: $q_0, f, a, b, A, B, S;$

Anfangszustand: q_0

Endzustand: f

q_0	a	$q_0 a$
a	ϵ	A
A	b	Ab
b	ϵ	B
AB	ϵ	S
$q_0 S$	ϵ	f

Allgemein konstruieren wir einen Automaten $M_G^{(1)} = (Q, T, \delta, q_0, F)$ mit:

- $Q = T \cup N \cup \{q_0, f\}$ (q_0, f neu);
- $F = \{f\}$;
- Übergänge:

$$\begin{aligned} \delta = & \{(q, x, qx) \mid q \in Q, x \in T\} \cup // \text{ Shift-Übergänge} \\ & \{(q \alpha, \epsilon, q A) \mid q \in Q, A \rightarrow \alpha \in P\} \cup // \text{ Reduce-Übergänge} \\ & \{(q_0 S, \epsilon, f)\} // \text{ Abschluss :-)} \end{aligned}$$

Allgemein konstruieren wir einen Automaten $M_G^{(1)} = (Q, T, \delta, q_0, F)$ mit:

- $Q = T \cup N \cup \{q_0, f\}$ (q_0, f neu);
- $F = \{f\}$;
- Übergänge:

$$\begin{aligned} \delta = & \{(q, x, qx) \mid q \in Q, x \in T\} \cup & // & \text{Shift-Übergänge} \\ & \{(q \alpha, \epsilon, q A) \mid q \in Q, A \rightarrow \alpha \in P\} \cup & // & \text{Reduce-Übergänge} \\ & \{(q_0 S, \epsilon, f)\} & // & \text{Abschluss :-)} \end{aligned}$$

Eine Beispiel-Berechnung:

$$\begin{array}{l} (q_0, ab) \vdash (q_0 a, b) \vdash (q_0 A, b) \\ \vdash (q_0 A b, \epsilon) \vdash (q_0 AB, \epsilon) \\ \vdash (q_0 S, \epsilon) \vdash (f, \epsilon) \end{array}$$

Allgemein konstruieren wir einen Automaten $M_G^{(1)} = (Q, T, \delta, q_0, F)$ mit:

- $Q = T \cup N \cup \{q_0, f\}$ (q_0, f neu);
- $F = \{f\}$;
- Übergänge:

$$\begin{aligned} \delta = & \{(q, x, qx) \mid q \in Q, x \in T\} \cup & // \text{ Shift-Übergänge} \\ & \{(q \alpha, \epsilon, q A) \mid q \in Q, A \rightarrow \alpha \in P\} \cup & // \text{ Reduce-Übergänge} \\ & \{(q_0 S, \epsilon, f)\} & // \text{ Abschluss :-)} \end{aligned}$$

Eine Beispiel-Berechnung:

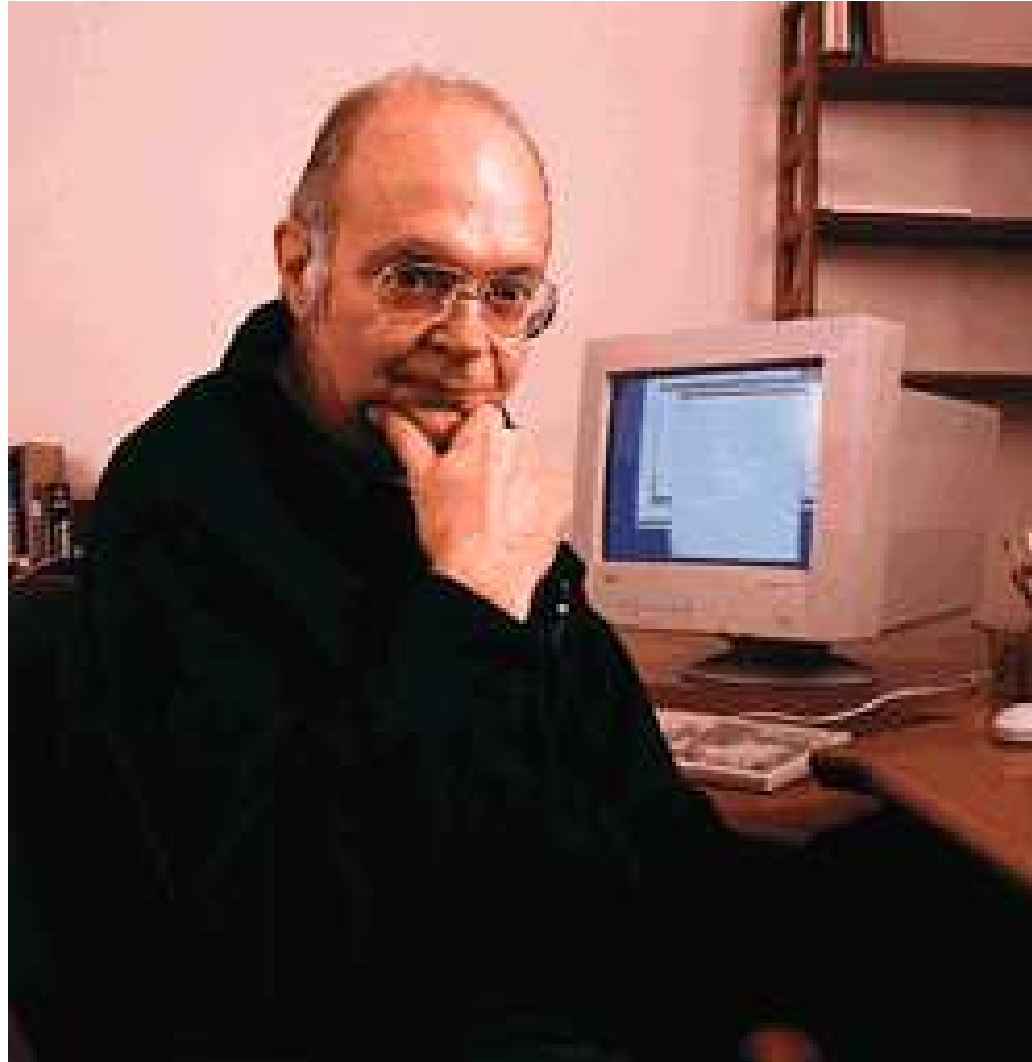
$$\begin{array}{l} (q_0, ab) \vdash (q_0 \boxed{a}, b) \vdash (q_0 A, b) \\ \vdash (q_0 A \boxed{b}, \epsilon) \vdash (q_0 \boxed{AB}, \epsilon) \\ \vdash (q_0 S, \epsilon) \vdash (f, \epsilon) \end{array}$$

Offenbar gilt:

- Die Folge der Reduktionen entspricht einer **reversen Rechtsableitung** für die Eingabe :-)
- Zur Korrektheit zeigt man, dass für jedes q gilt:

$$(q, w) \vdash^* (q A, \epsilon) \quad \text{gdw.} \quad A \rightarrow^* w$$

- Der Shift-Reduce-Kellerautomat $M_G^{(1)}$ ist i.a. nicht-deterministisch :-)
- Um ein deterministisches Parse-Verfahren zu erhalten, muss man die Reduktionsstellen identifizieren \implies LR-Parsing



Donald E. Knuth, Stanford

Konstruktion 2: Item-Kellerautomat

- Rekonstruiere eine **Linksableitung**.
- Expandiere Nichtterminale mithilfe einer Regel.
- Verifiziere sukzessive, dass die gewählte Regel mit der Eingabe übereinstimmt.

\implies Die Zustände sind jetzt **Items**.

- Ein Item ist eine Regel mit **Punkt**:

$$[A \rightarrow \alpha \bullet \beta], \quad A \rightarrow \alpha \beta \in P$$

Der Punkt gibt an, wie weit die Regel bereits abgearbeitet wurde :-)

Unser Beispiel:

$$S \rightarrow AB \quad A \rightarrow a \quad B \rightarrow b$$

Wir fügen eine Regel: $S' \rightarrow S$ hinzu :-)

Dann konstruieren wir:

Anfangszustand: $[S' \rightarrow \bullet S]$

Endzustand: $[S' \rightarrow S \bullet]$

$[S' \rightarrow \bullet S]$	ϵ	$[S' \rightarrow \bullet S] [S \rightarrow \bullet AB]$
$[S \rightarrow \bullet AB]$	ϵ	$[S \rightarrow \bullet AB] [A \rightarrow \bullet a]$
$[A \rightarrow \bullet a]$	a	$[A \rightarrow a \bullet]$
$[S \rightarrow \bullet AB] [A \rightarrow a \bullet]$	ϵ	$[S \rightarrow A \bullet B]$
$[S \rightarrow A \bullet B]$	ϵ	$[S \rightarrow A \bullet B] [B \rightarrow \bullet b]$
$[B \rightarrow \bullet b]$	b	$[B \rightarrow b \bullet]$
$[S \rightarrow A \bullet B] [B \rightarrow b \bullet]$	ϵ	$[S \rightarrow AB \bullet]$
$[S' \rightarrow \bullet S] [S \rightarrow AB \bullet]$	ϵ	$[S' \rightarrow S \bullet]$

Der Item-Kellerautomat $M_G^{(2)}$ hat drei Arten von Übergängen:

Expansionen: $([A \rightarrow \alpha \bullet B \beta], \epsilon, [A \rightarrow \alpha \bullet B \beta] [B \rightarrow \bullet \gamma])$ für
 $A \rightarrow \alpha B \beta, B \rightarrow \gamma \in P$

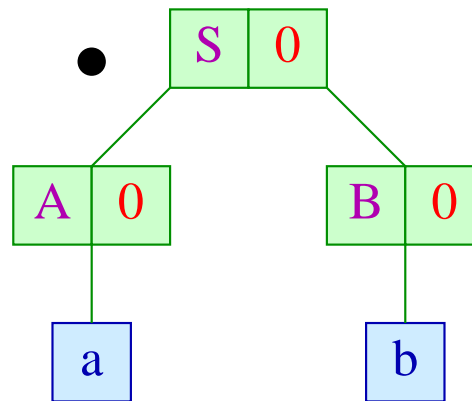
Shifts: $([A \rightarrow \alpha \bullet a \beta], a, [A \rightarrow \alpha a \bullet \beta])$ für $A \rightarrow \alpha a \beta \in P$

Reduce: $([A \rightarrow \alpha \bullet B \beta] [B \rightarrow \gamma \bullet], \epsilon, [A \rightarrow \alpha B \bullet \beta])$ für
 $A \rightarrow \alpha B \beta, B \rightarrow \gamma \in P$

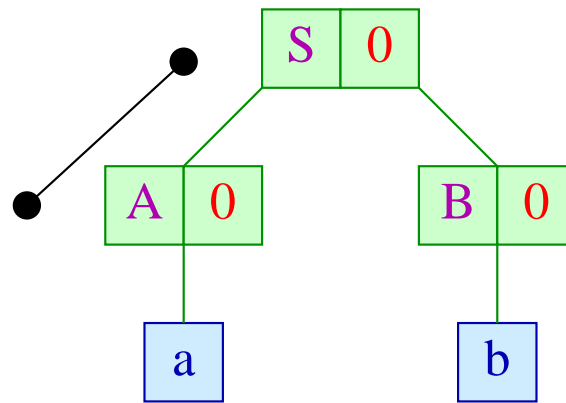
Items der Form: $[A \rightarrow \alpha \bullet]$ heißen auch **vollständig :-)**

Der Item-Kellerautomat schiebt den Punkt einmal um den Ableitungsbaum herum ...

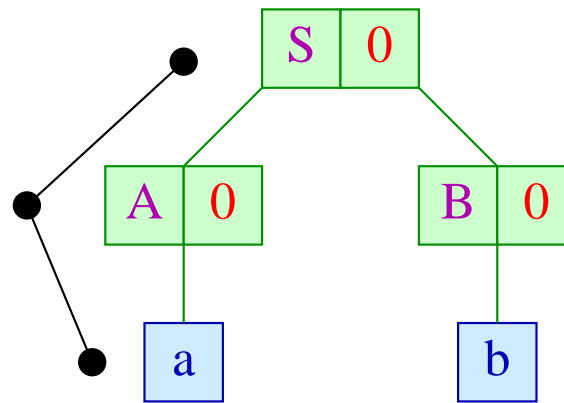
... im Beispiel:



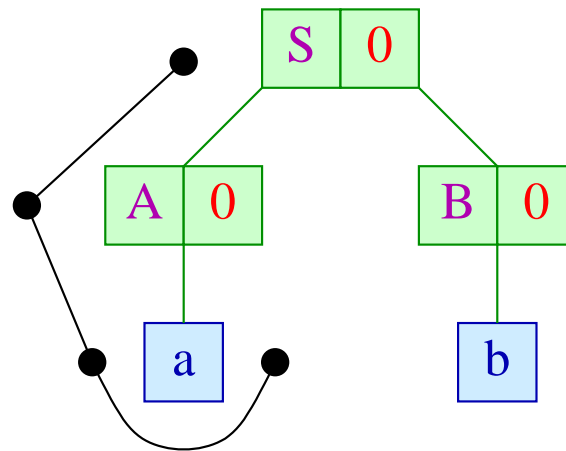
... im Beispiel:



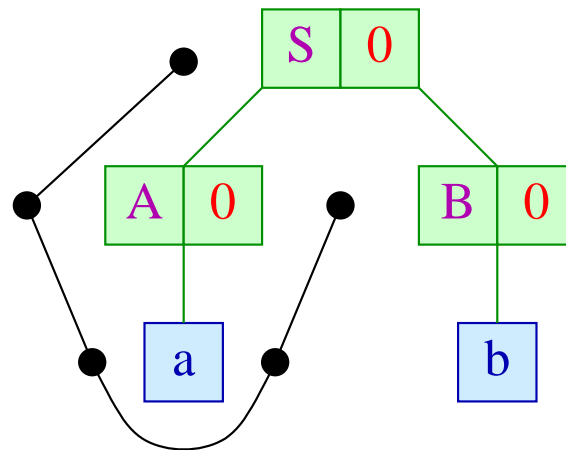
... im Beispiel:



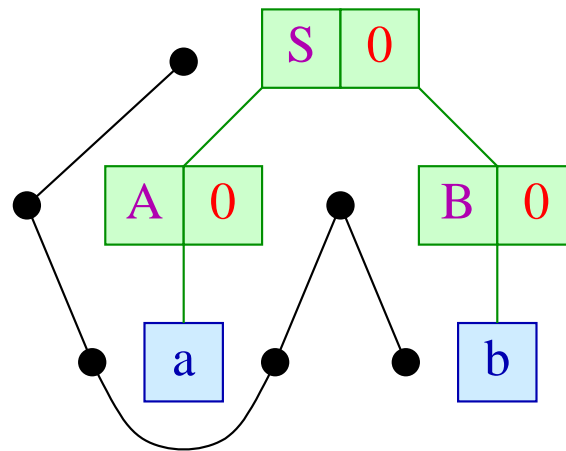
... im Beispiel:



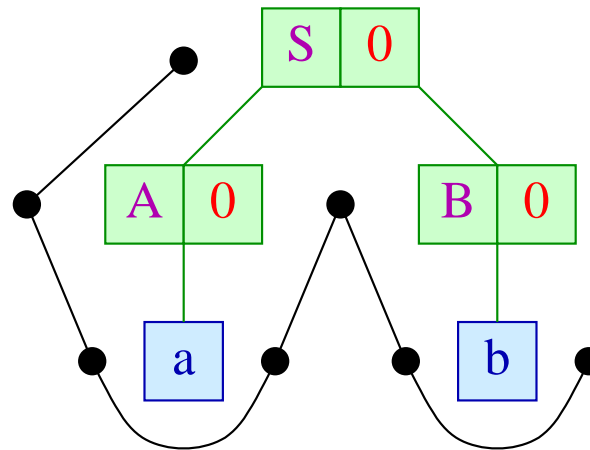
... im Beispiel:



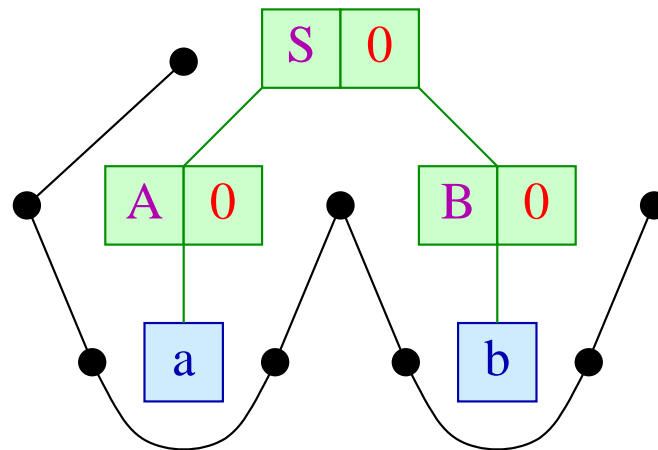
... im Beispiel:



... im Beispiel:



... im Beispiel:



... im Beispiel:

