Idee:

(1) Wende T1 an, d.h. ersetze jede interessierende Zuweisung x=e; durch: $T_e = e; x = T_e;$

(2) Finde alle Stellen, an denen e sicher berechnet werden kann, ohne die Semantik zu zerstören.

(3) Platziere (konzeptuell) $T_e = e;$ an allen diesen Plätzen.

Beseitige die redundanten Zuweisungen mittels T2.

$\Longrightarrow$ wir benötigen eine neue Analyse :-))

Ein Ausdruck e heißt aktiv (busy) entlang eines Pfads π, falls der Wert von e berechnet wird, bevor eine der Variablen $x \in Vars(e)$ überschrieben wird.

// Rückwärtsanalyse!

e heißt sehr aktiv (very busy) an u, falls e aktiv ist entlang jedes Pfads $\pi : u \rightarrow^* stop$.

Ein Ausdruck e heißt aktiv (busy) entlang eines Pfads π, falls der Wert von e berechnet wird, bevor eine der Variablen $x \in Vars(e)$ überschrieben wird.

// Rückwärtsanalyse!

e heißt sehr aktiv (very busy) an u, falls e aktiv ist entlang jedes Pfads $\pi : u \to^* stop$.

Entsprechend benötigen wir:

$$\mathcal{B}[u] \;=\; \bigcap \{ [\![\pi]\!]^\sharp \, \emptyset \mid \pi : u \to^* stop \}$$

wobei für $\pi = k_1 \ldots k_m$:

$$[\![\pi]\!]^\sharp \;=\; [\![k_1]\!]^\sharp \circ \ldots \circ [\![k_m]\!]^\sharp$$

Unser vollständiger Verband ist:

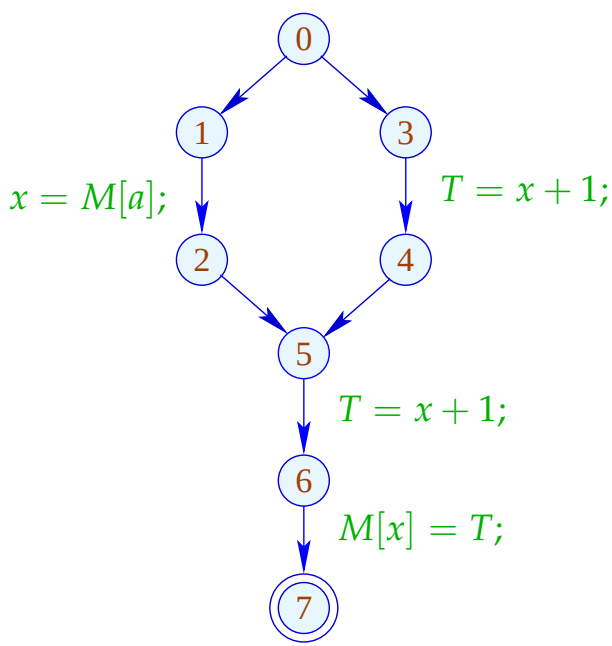
$$\mathbb{B} = 2^{Expr \setminus Vars} \qquad \text{mit} \quad \sqsubseteq \; = \; \supseteq$$

Der Effekt $[\![k]\!]^\sharp$ einer Kante $k = (u, lab, v)$ hängt nur von lab ab, d.h. $[\![k]\!]^\sharp = [\![lab]\!]^\sharp$ wobei:

$$\begin{array}{lll}
[\![;]\!]^\sharp\, B & = & B \\
[\![Pos(e)]\!]^\sharp\, B & = & [\![Neg(e)]\!]^\sharp\, B \quad = \quad B \cup \{e\} \\
[\![T_e = e;]\!]^\sharp\, B & = & (B \setminus Expr_{T_e}) \cup \{e\} \\
[\![x = T;]\!]^\sharp\, B & = & B \setminus Expr_x \\
[\![x = M[R];]\!]^\sharp\, B & = & B \setminus Expr_x \\
[\![M[R] = x;]\!]^\sharp\, B & = & B
\end{array}$$

Die Kanten-Effekte sind sämtlich distributiv. Deshalb liefert die kleinste Lösung des Constraint-Systems exakt den MOP :-)

Beispiel:



7	$\emptyset$
6	$\emptyset$
5	$\{x+1\}$
4	$\{x+1\}$
3	$\{x+1\}$
2	$\{x+1\}$
1	$\emptyset$
0	$\emptyset$

Beachte:

- Im Beispiel enthalten die $\mathcal{B}[u]$ maximal ein Element.
- Enthält $\mathcal{B}[u]$ mehrere Ausdrücke $e_1 \neq e_2$, sind diese unahängig, d.h. $T_{e_1} \notin Vars(e_2)$:-)
- Unabhängige Ausdrücke können in beliebiger Reihenfolge berechnet werden :-))

Beachte:

- Im Beispiel enthalten die $\mathcal{B}[u]$ maximal ein Element.
- Enthält $\mathcal{B}[u]$ mehrere Ausdrücke $e_1 \neq e_2$, können diese stets in einer Reihenfolge $e_1 \rightarrow e_2$ ausgewertet werden, so dass $T_{e_2} \notin \mathit{Vars}\,(e_1)$:-)

Beweis der Anordbarkeit:

→ Wir zeigen Beh. für $[\![\pi]\!]^\sharp\,\emptyset$. Die Beh. für u folgt, da die Eigenschaft unter $\cap$ abgeschlossen ist.

→ Induktion über die Länge von π.

$\boxed{\pi = \epsilon}$ $\quad [\![\pi]\!]^\sharp\,\emptyset = [\![\epsilon]\!]^\sharp\,\emptyset = \emptyset$:-)

$\boxed{\pi = k\ \pi'}$ Kanten-Effekte erhalten die Anordbarkeit :-))

Ein u heißt sicher für e, sofern $e \in \mathcal{A}[u] \cup \mathcal{B}[u]$; d.h. e ist entweder verfügbar oder sehr aktiv.

Ist u sicher, können wir dort e gefahrlos berechnen :-)

Idee:

- Wir berechnen e zum frühest möglichen Zeitpunkt :-)
- Wir platzieren die Berechnung von e am Ende von $k = (u, lab, v)$ falls:

  $\rightarrow$ $e \in \mathcal{B}[v]$ sowie

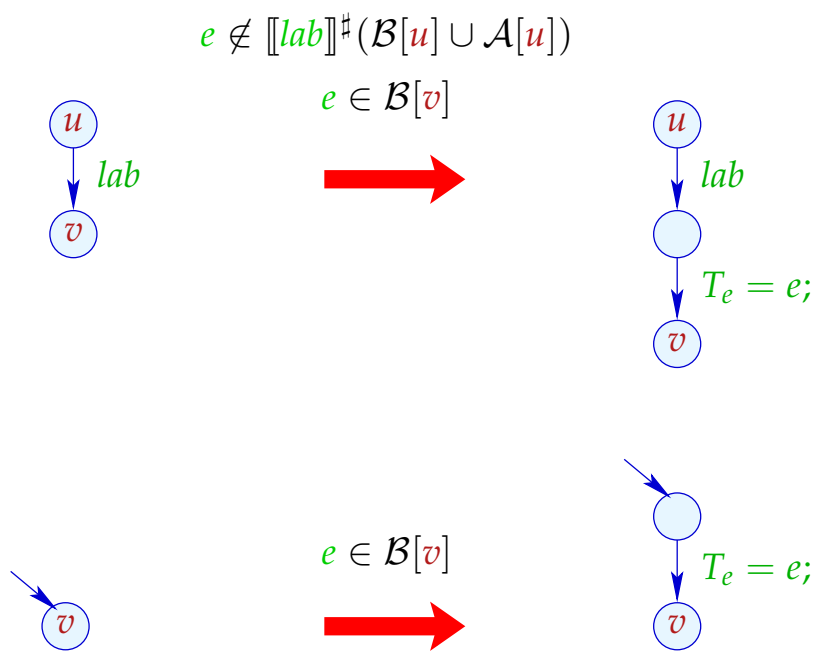
  $\rightarrow$ $e \notin [\![lab]\!]^\sharp(\mathcal{A}[u])$ (nicht verfügbar entlang k) und

  $\rightarrow$ $e \notin [\![lab]\!]^\sharp(\mathcal{B}[u])$ (auch nicht nach Transformation)

- Weil alle $e \in \mathcal{B}[v]$ anordbar sind, betrachten wir die Transformation für jedes e gesondert:

Transformation 6.1:

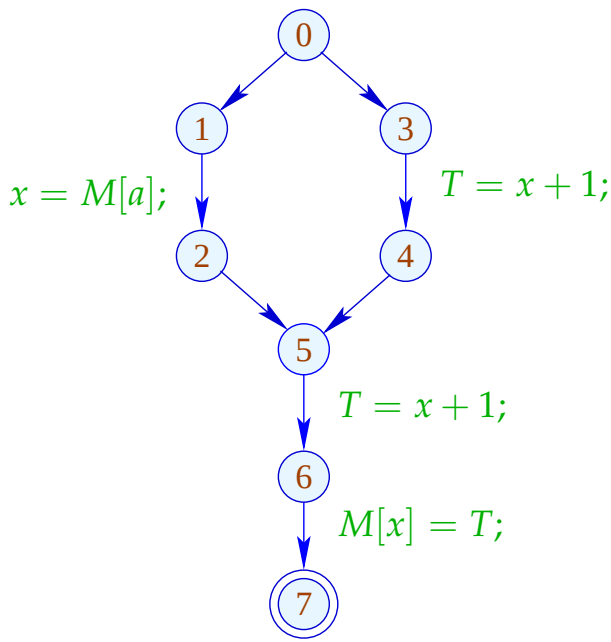
Transformation 6.2:



Bernhard Steffen, Dortmund

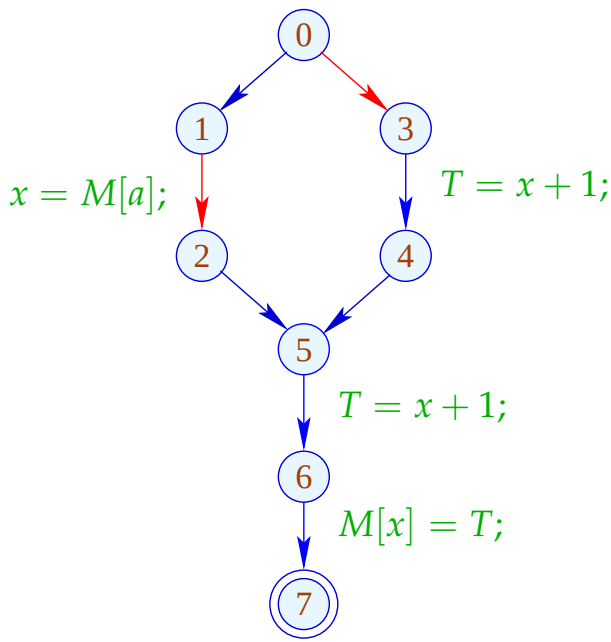
Jens Knoop, Wien

Im Beispiel:



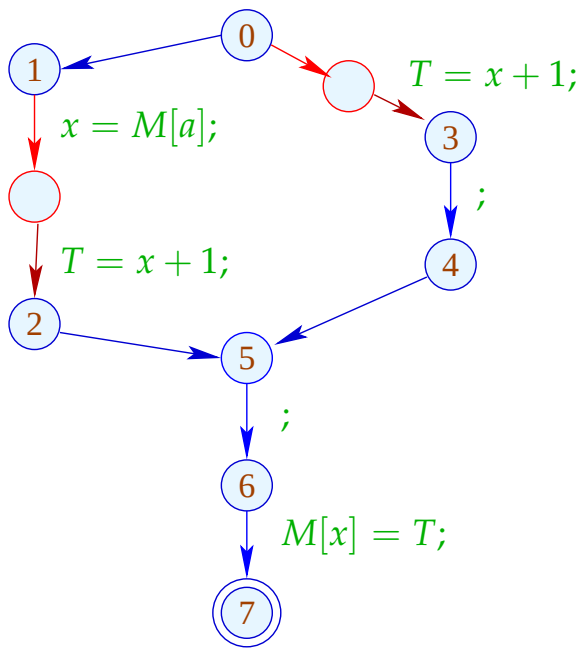
	$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$
0	$\emptyset$	$\emptyset$
1	$\emptyset$	$\emptyset$
2	$\emptyset$	$\{x+1\}$
3	$\emptyset$	$\{x+1\}$
4	$\{x+1\}$	$\{x+1\}$
5	$\emptyset$	$\{x+1\}$
6	$\{x+1\}$	$\emptyset$
7	$\{x+1\}$	$\emptyset$

Im Beispiel:



	$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$
0	$\emptyset$	$\emptyset$
1	$\emptyset$	$\emptyset$
2	$\emptyset$	$\{x+1\}$
3	$\emptyset$	$\{x+1\}$
4	$\{x+1\}$	$\{x+1\}$
5	$\emptyset$	$\{x+1\}$
6	$\{x+1\}$	$\emptyset$
7	$\{x+1\}$	$\emptyset$

Im Beispiel:



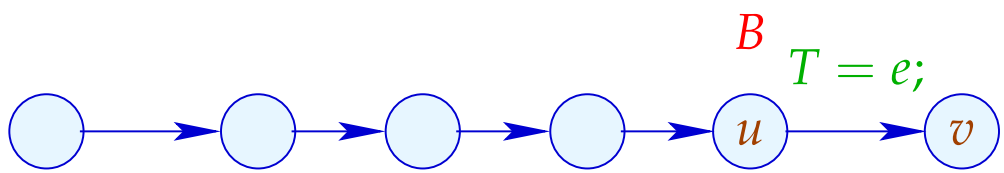
	$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$
0	$\emptyset$	$\emptyset$
1	$\emptyset$	$\emptyset$
2	$\emptyset$	$\{x+1\}$
3	$\emptyset$	$\{x+1\}$
4	$\{x+1\}$	$\{x+1\}$
5	$\emptyset$	$\{x+1\}$
6	$\{x+1\}$	$\emptyset$
7	$\{x+1\}$	$\emptyset$

Zur Korrektheit:

Sei $\pi = \pi' \, k$ ein Pfad mit $k = (u, T = e;, v)$.

Dann gilt: $e \in \mathcal{B}[u]$ da u nur eine ausgehende Kante hat :-)

Wir haben:

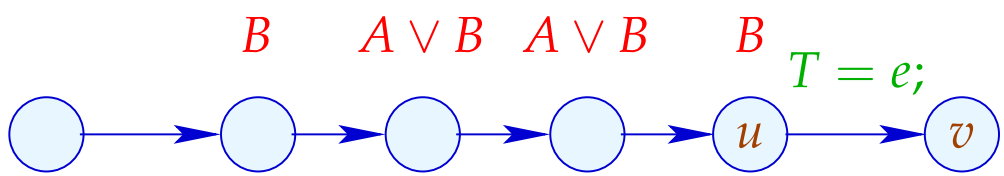


Zur Korrektheit:

Sei $\pi = \pi' \, k$ ein Pfad mit $k = (u, T = e;, v)$.

Dann gilt: $e \in \mathcal{B}[u]$ da u nur eine ausgehende Kante hat :-)

Wir haben:

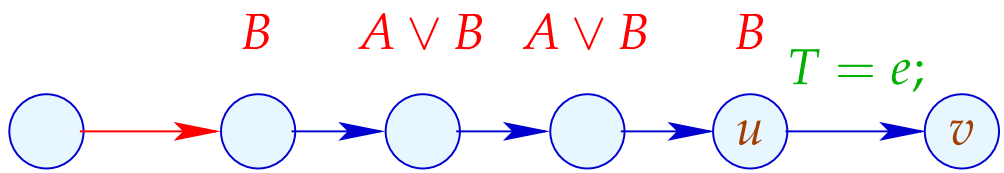


Zur Korrektheit:

Sei $\pi = \pi' \, k$ ein Pfad mit $k = (u, T = e;, v)$.

Dann gilt: $e \in \mathcal{B}[u]$ da u nur eine ausgehende Kante hat :-)

Wir haben:

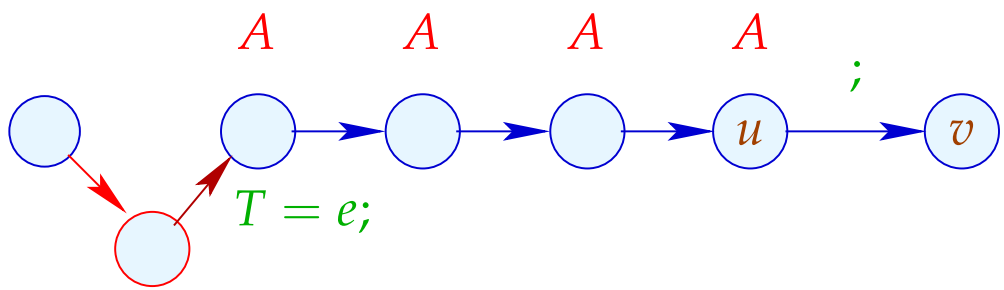


Zur Korrektheit:

Sei $\pi = \pi' \, k$ ein Pfad mit $k = (u, T = e;, v)$.

Dann gilt: $e \in \mathcal{B}[u]$ da u nur eine ausgehende Kante hat :-)

Wir haben:



Wir schließen:

- Überall, wo wir $T = e;$ gestrichen haben, ist e verfügbar :-)

  $\Longrightarrow$ Korrektheit der Transformation

- Jedem $T = e;$, das wir in einen Pfad einfügen, entspricht ein $T = e;$, das wir gestrichen haben :-))

  $\Longrightarrow$ Nicht-Verschlechterung der Transformation

1.8 Anwendung: Schleifen-invarianter Code

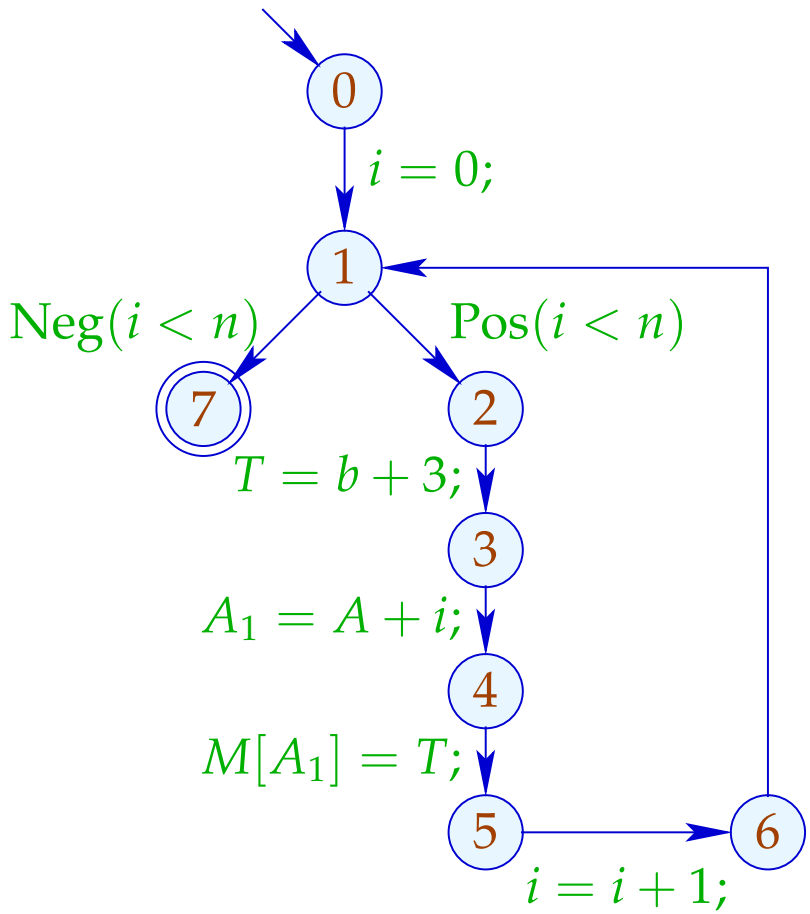
Beispiel:

$$\begin{aligned} &\text{for } (i = 0; i < n; i{+}{+}) \\ &\qquad a[i] = b + 3; \end{aligned}$$

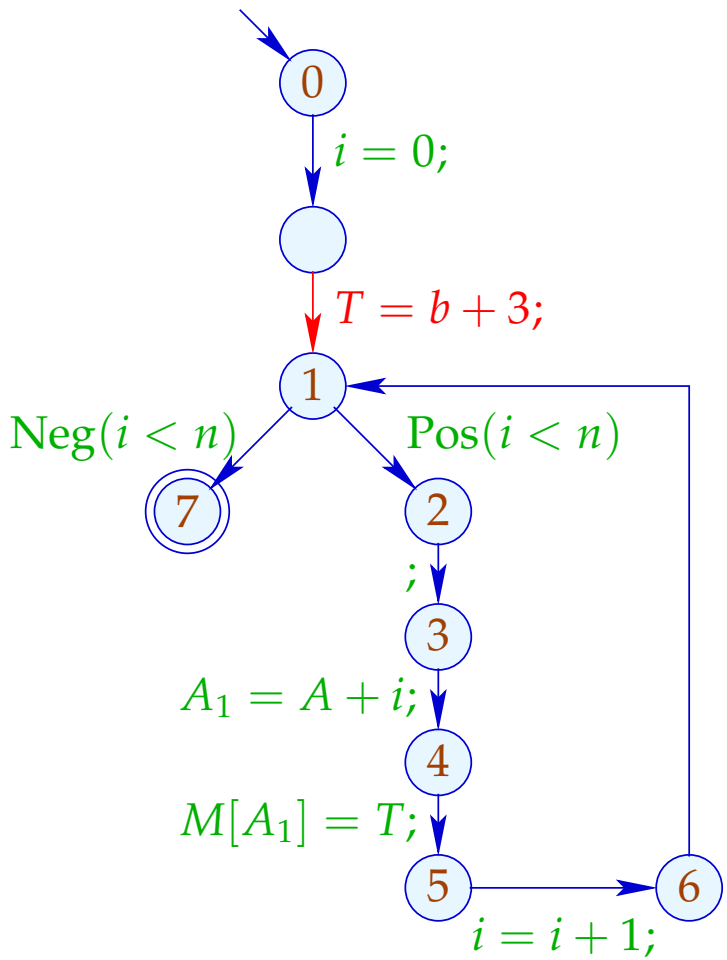
// Der Ausdruck $b + 3$ wird in jeder Iteration berechnet :-(

// Das wollen wir vermeiden :-)

Der Kontrollfluss-Graph:

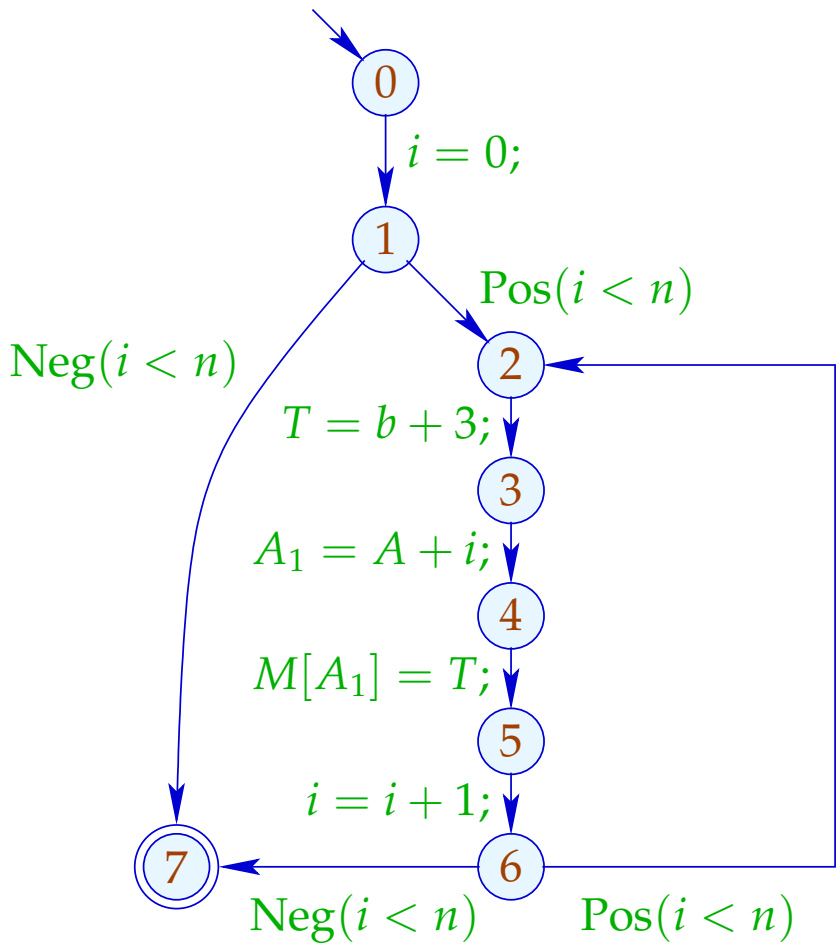


Achtung: $T = b + 3;$ darf nicht vor der Schleife stehen :

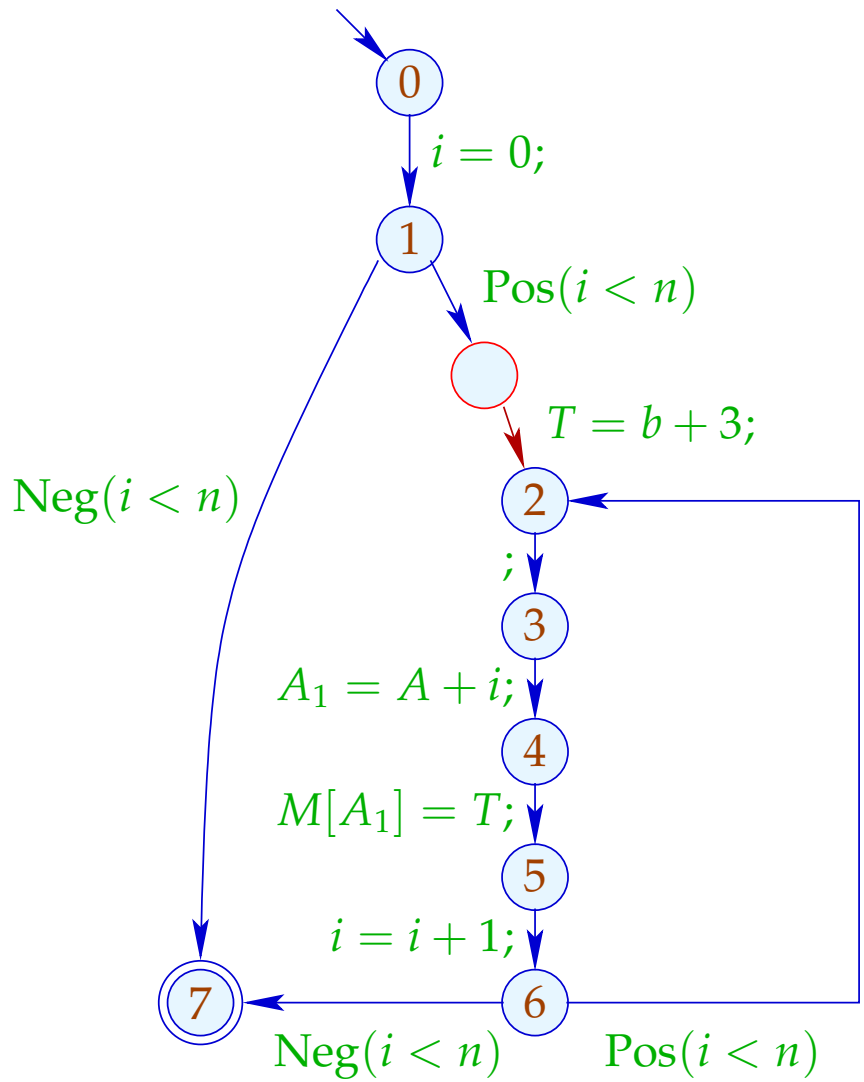


$\Longrightarrow$ Es gibt keinen guten Platz für $T = b + 3;$:-(

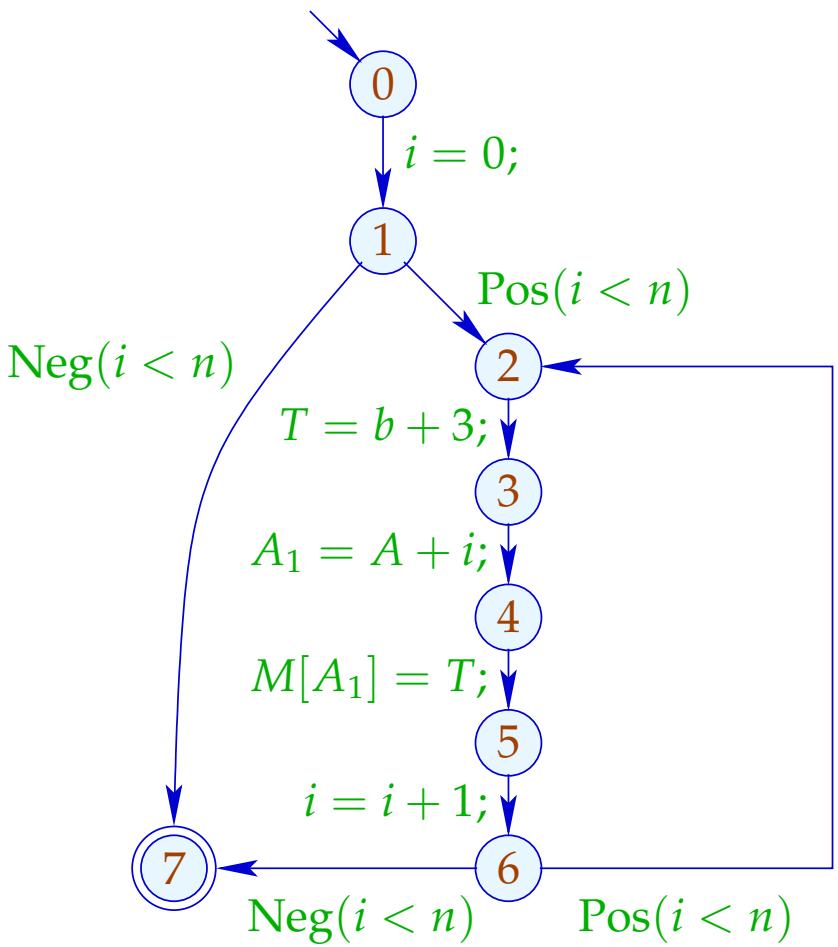
Idee: Transformiere in eine do-while-Schleife ...



... jetzt gibt es eine Stelle für $T = e;$:-)

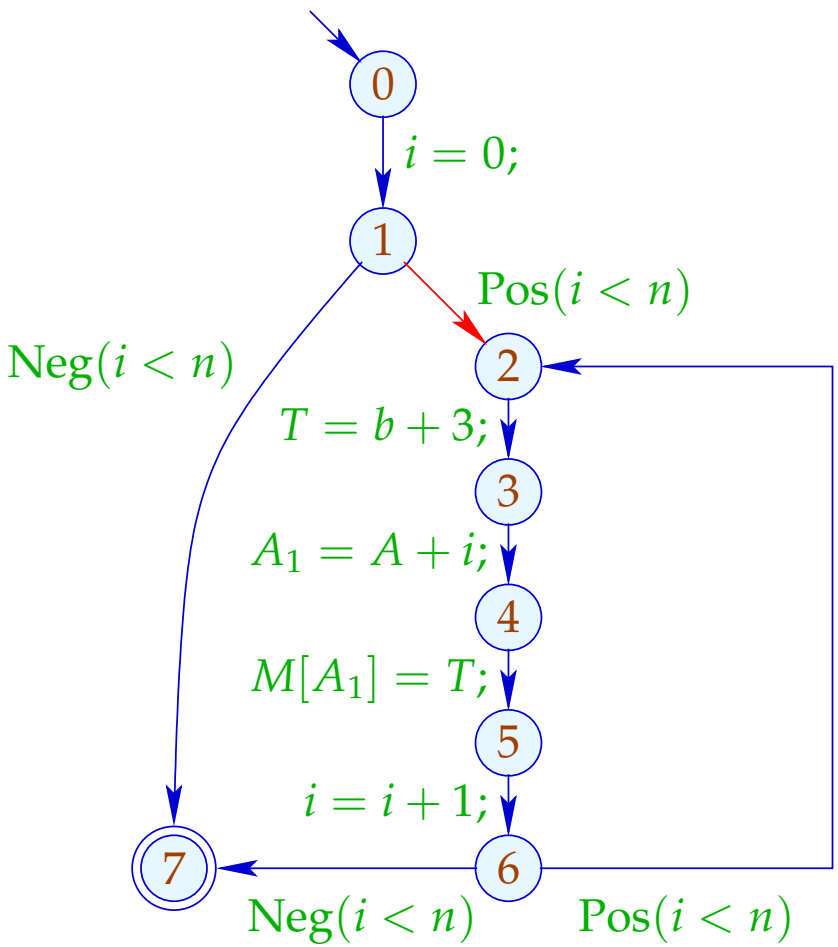


Anwendung von T6 (PRE) :



	$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$
0	$\emptyset$	$\emptyset$
1	$\emptyset$	$\emptyset$
2	$\emptyset$	$\{b + 3\}$
3	$\{b + 3\}$	$\emptyset$
4	$\{b + 3\}$	$\emptyset$
5	$\{b + 3\}$	$\emptyset$
6	$\{b + 3\}$	$\emptyset$
6	$\emptyset$	$\emptyset$
7	$\emptyset$	$\emptyset$

Anwendung von T6 (PRE) :



	$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$
0	$\emptyset$	$\emptyset$
1	$\emptyset$	$\emptyset$
2	$\emptyset$	$\{b + 3\}$
3	$\{b + 3\}$	$\emptyset$
4	$\{b + 3\}$	$\emptyset$
5	$\{b + 3\}$	$\emptyset$
6	$\{b + 3\}$	$\emptyset$
6	$\emptyset$	$\emptyset$
7	$\emptyset$	$\emptyset$

Fazit:

- Beseitigung partieller Redundanzen kann loop-invarianten Code aus Schleifen heraus schieben :-))
- Das funktioniert nur für do-while-Scheifen :-(
- Um andere Scheifen zu optimieren, wandeln wir sie in do-while-Scheifen um:

$$\text{while } (b)\ stmt \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} \text{if } (b) \\ \qquad \text{do } stmt \\ \qquad \text{while } (b); \end{array}$$

$\Longrightarrow$ Schleifen-Rotation

Problem:

Haben wir das Quell-Programm nicht (mehr) zur Verfügung, müssen wir nachträglich die Schleifen (-köpfe) identifizieren ;-)

$\Longrightarrow$ Prädominatoren

u prädominiert v, falls jeder Pfad $\pi : start \rightarrow^* v$ Knoten u enthält. Wir schreiben: $u \Rightarrow v$.

"$\Rightarrow$" ist reflexiv, transitiv und anti-symmetrisch :-)

Berechnung:

Wir sammeln die Knoten entlang Pfaden auf mithilfe der Analyse:

$$\mathbb{P} = 2^{Nodes} \quad , \qquad \sqsubseteq \; = \; \supseteq$$

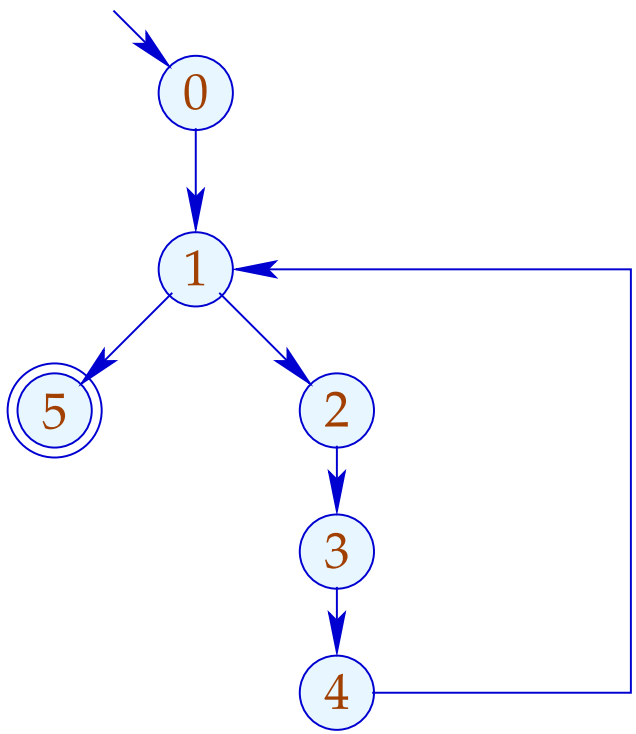
$$[\![(_, _, v)]\!]^\sharp \; P \;\; = \;\; P \cup \{v\}$$

Dann ist die Menge $\mathcal{P}[v]$ der Prädominatoren:

$$\mathcal{P}[v] = \bigcap \{ [\![\pi]\!]^\sharp \; \{start\} \mid \pi : start \to^* v \}$$

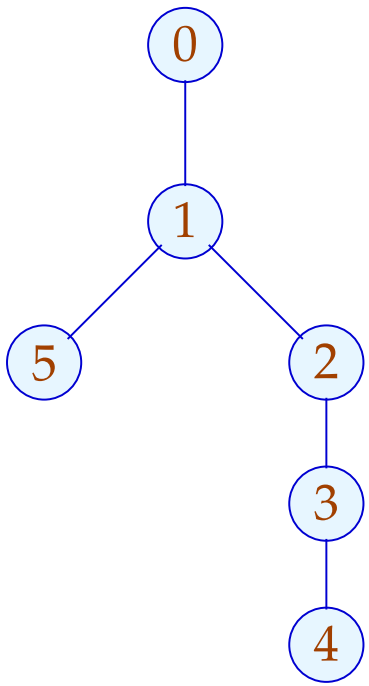
Da die $[\![k]\!]^\sharp$ distributiv sind, können wir die $\mathcal{P}[v]$ mithilfe von Fixpunkt-Iteration berechnen :-)

Beispiel:



	$\mathcal{P}$
0	$\{0\}$
1	$\{0,1\}$
2	$\{0,1,2\}$
3	$\{0,1,2,3\}$
4	$\{0,1,2,3,4\}$
5	$\{0,1,5\}$

Die partielle Ordnung "$\Rightarrow$" im Beispiel:



	$\mathcal{P}$
0	$\{0\}$
1	$\{0,1\}$
2	$\{0,1,2\}$
3	$\{0,1,2,3\}$
4	$\{0,1,2,3,4\}$
5	$\{0,1,5\}$

Offenbar ist das Ergebnis ein Baum :-)

Tatsächlich gilt:

Satz:

Jeder Punkt v hat maximal einen unmittelbaren Prädominator.

Beweis:

Annahme:

Es gäbe $u_1 \neq u_2$, die v unmittelbar prädominieren.

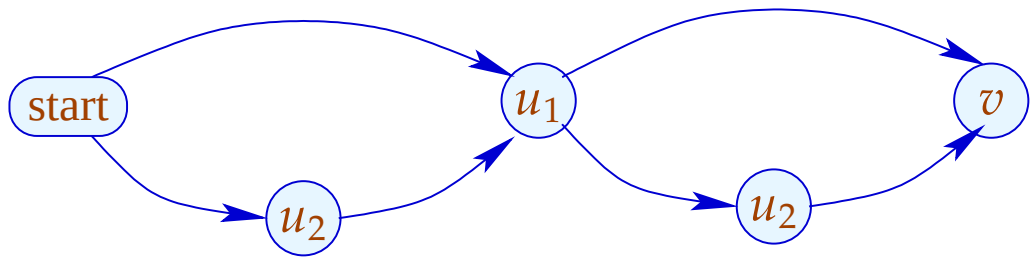
Gälte $u_1 \Rightarrow u_2$, wäre u_1 nicht unmittelbar.

Folglich müssen u_1, u_2 unvergleichbar sein :-)

Nun gilt für jedes $\pi : start \longrightarrow v$:

$$\pi = \pi_1 \; \pi_2 \qquad \text{mit} \qquad \begin{array}{l} \pi_1 : start \longrightarrow u_1 \\ \pi_2 : u_1 \longrightarrow v \end{array}$$

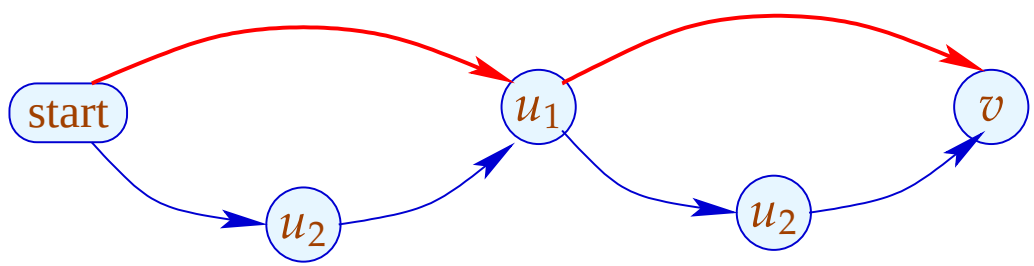
Sind u_1, u_2 aber unvergleichbar, gibt es einen Pfad: $start \longrightarrow^* v$ ohne u_2 :



Nun gilt für jedes $\pi : start \longrightarrow v$:

$$\pi = \pi_1 \; \pi_2 \qquad \text{mit} \qquad \begin{array}{l} \pi_1 : start \longrightarrow u_1 \\ \pi_2 : u_1 \longrightarrow v \end{array}$$

Sind u_1, u_2 aber unvergleichbar, gibt es einen Pfad: $start \longrightarrow^* v$ ohne u_2 :



Beobachtung:

Der Schleifenkopf einer while-Schleife dominiert jeden Knoten des Rumpfs.

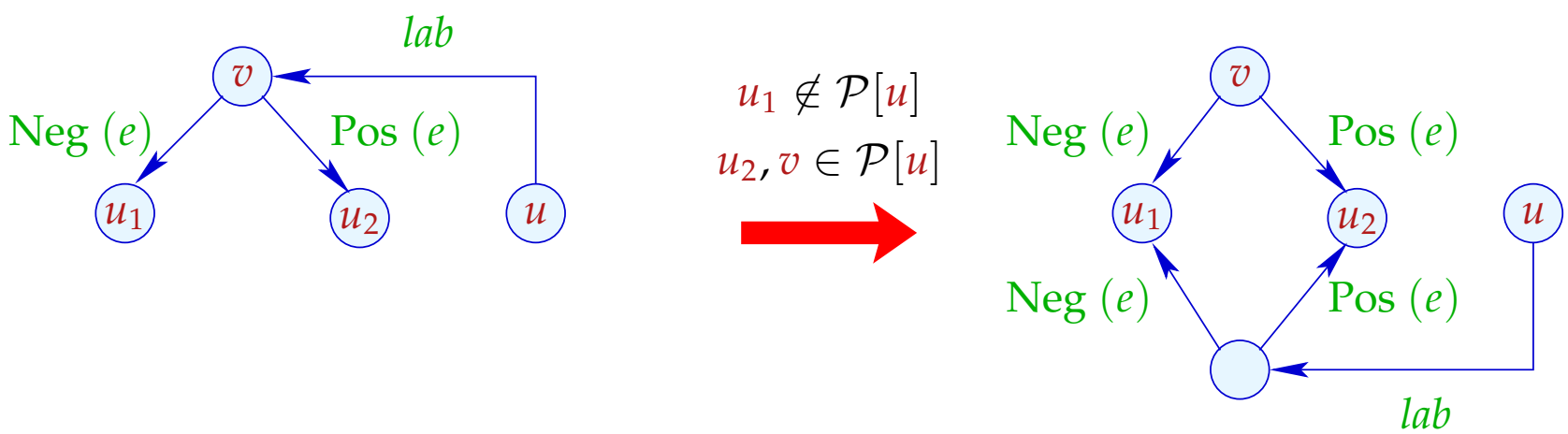
Einen Rücksprung vom Ende u zum Schleifenkopf v erkennt man daran, dass

$$v \in \mathcal{P}[u]$$

:-)

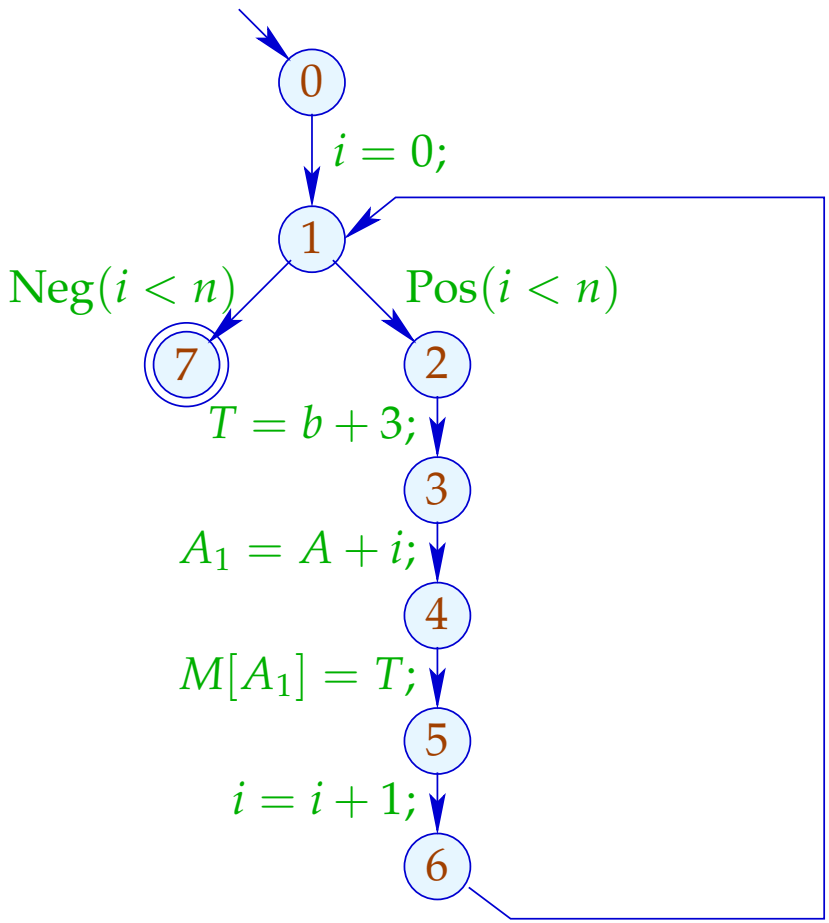
Damit definieren wir:

Transformation 7:

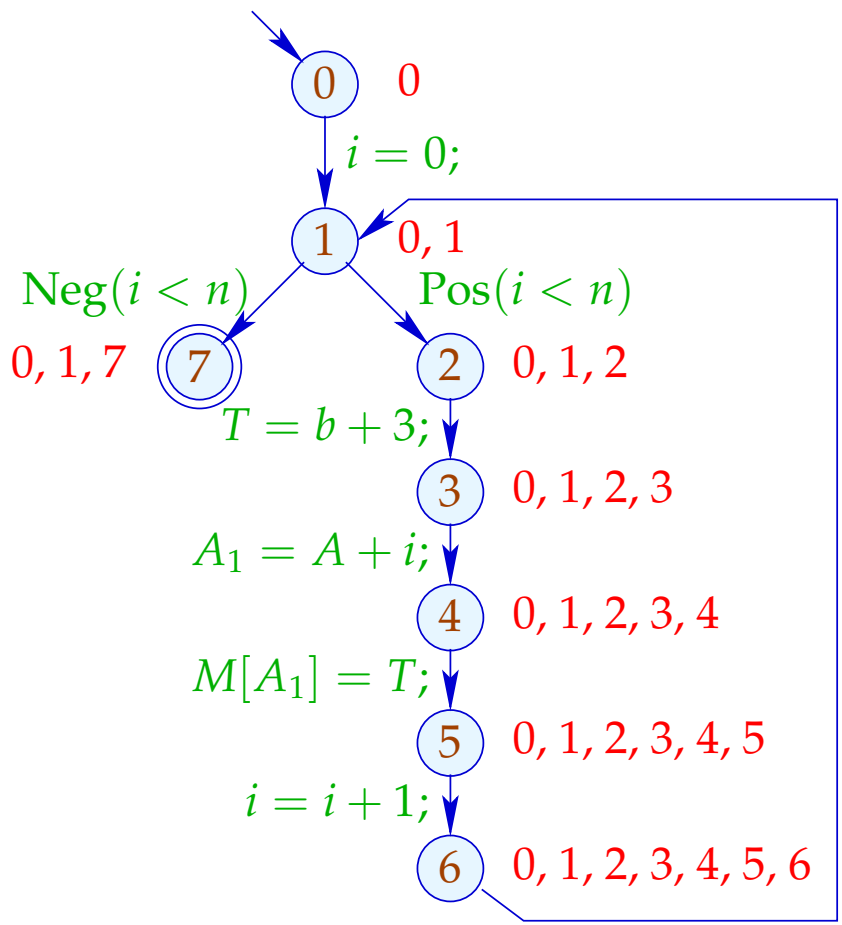


Wir duplizieren den Eintritts-Test an alle Rücksprung-Stellen :-)

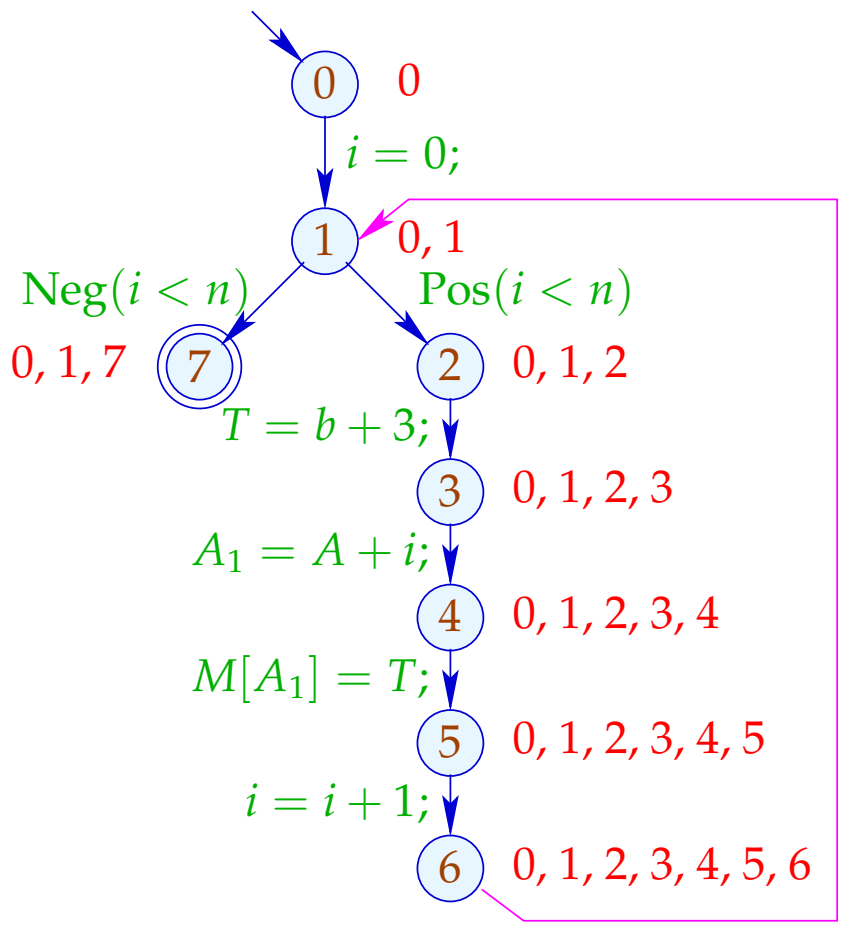
... im Beispiel:



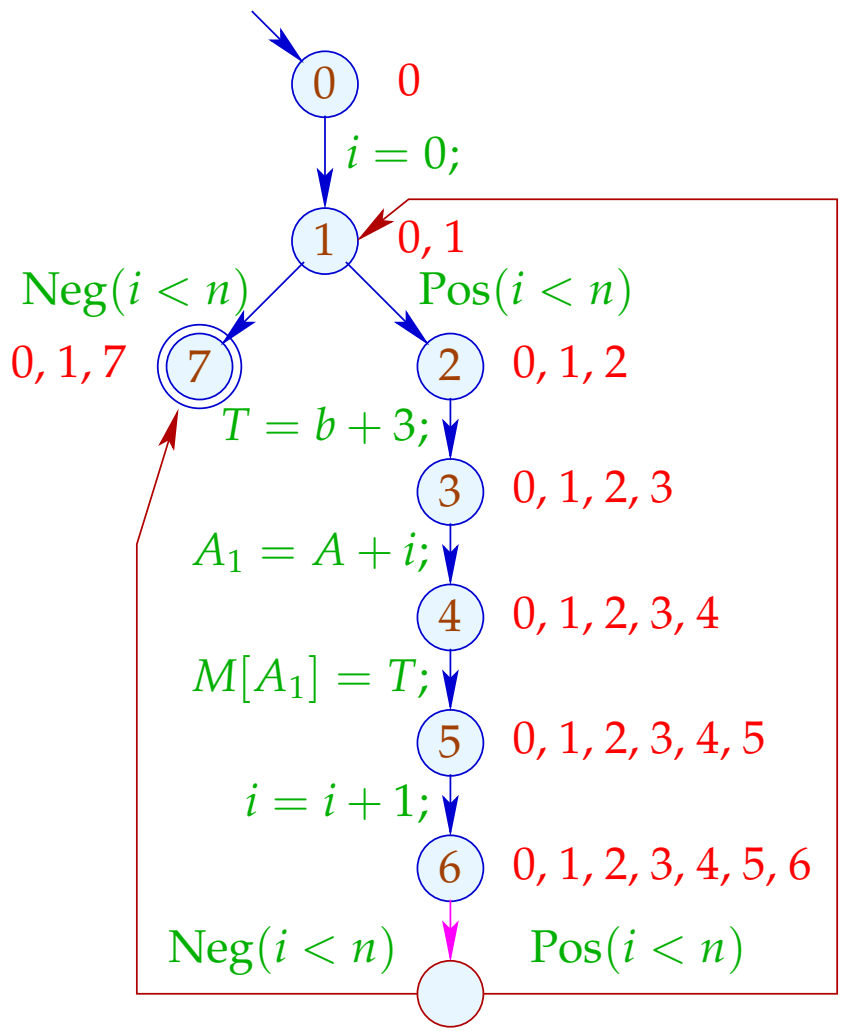
... im Beispiel:


0
0
$i = 0;$
1
0, 1
Neg$(i < n)$
Pos$(i < n)$
0, 1, 7
7
2
0, 1, 2
$T = b + 3;$
3
0, 1, 2, 3
$A_1 = A + i;$
4
0, 1, 2, 3, 4
$M[A_1] = T;$
5
0, 1, 2, 3, 4, 5
$i = i + 1;$
6
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

... im Beispiel:

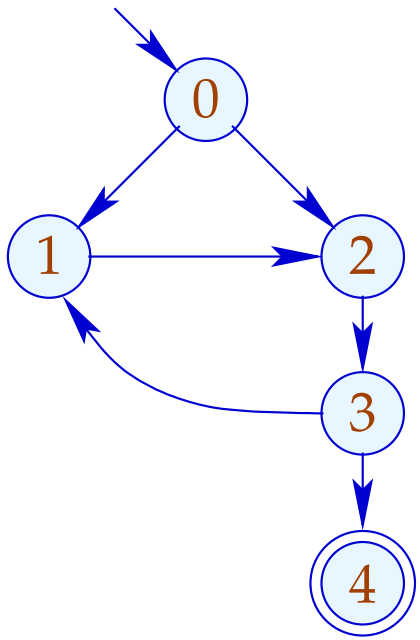

0
0
$i = 0;$
1
0, 1
$\mathrm{Neg}(i < n)$
$\mathrm{Pos}(i < n)$
0, 1, 7
7
2
0, 1, 2
$T = b + 3;$
3
0, 1, 2, 3
$A_1 = A + i;$
4
0, 1, 2, 3, 4
$M[A_1] = T;$
5
0, 1, 2, 3, 4, 5
$i = i + 1;$
6
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

... im Beispiel:

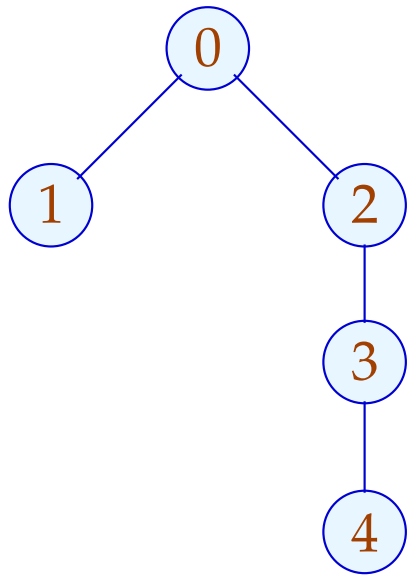

0
0
$i = 0;$
1
0, 1
Neg$(i < n)$
Pos$(i < n)$
0, 1, 7
7
2
0, 1, 2
$T = b + 3;$
3
0, 1, 2, 3
$A_1 = A + i;$
4
0, 1, 2, 3, 4
$M[A_1] = T;$
5
0, 1, 2, 3, 4, 5
$i = i + 1;$
6
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6
Neg$(i < n)$
Pos$(i < n)$

Achtung:

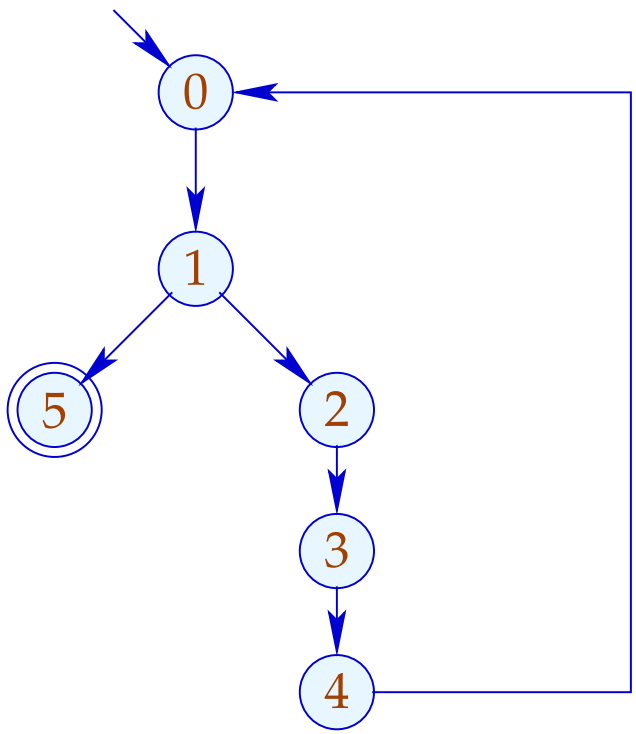
Es gibt ungewöhnliche Schleifen, die so nicht rotiert werden:

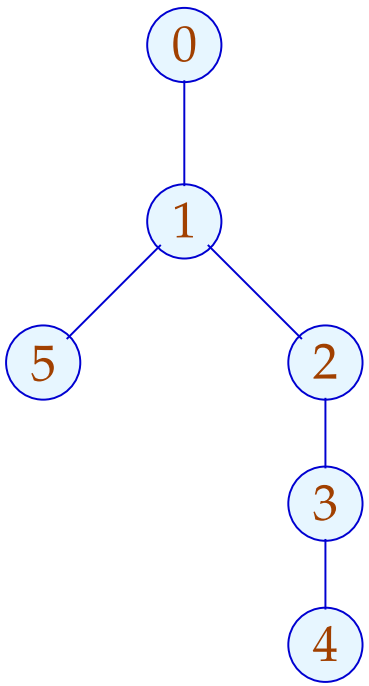


Prädominatoren:



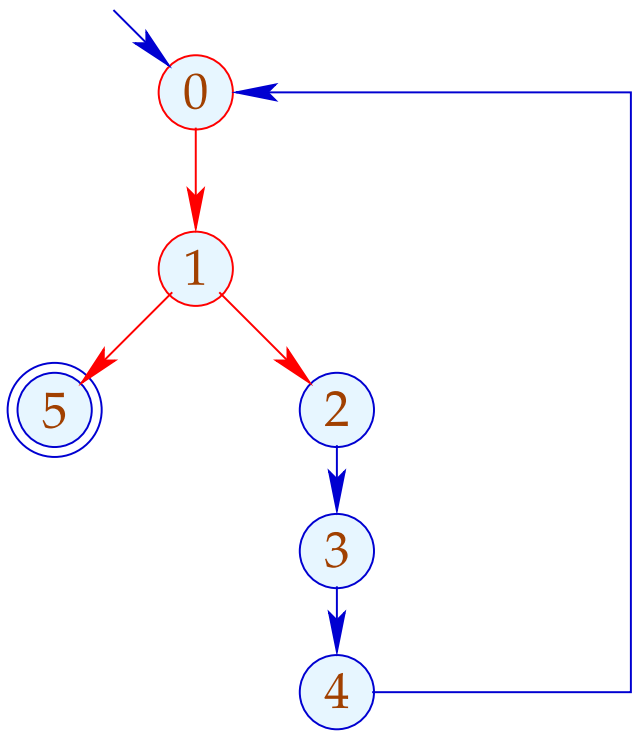
... leider aber auch gewöhnliche, die nicht rotiert werden:

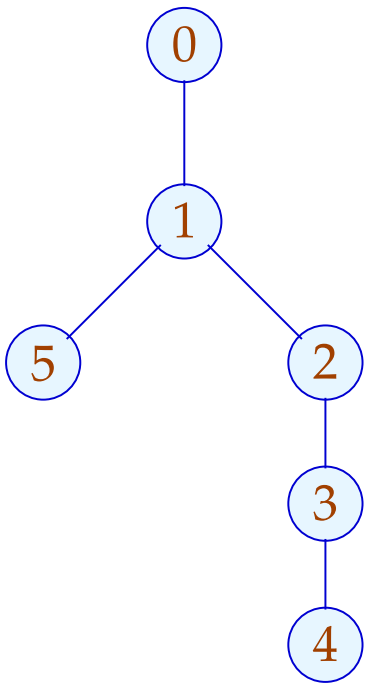




Hier müsste man den ganzen Pfad zwischen Rücksprung und Bedingung duplizieren :-(

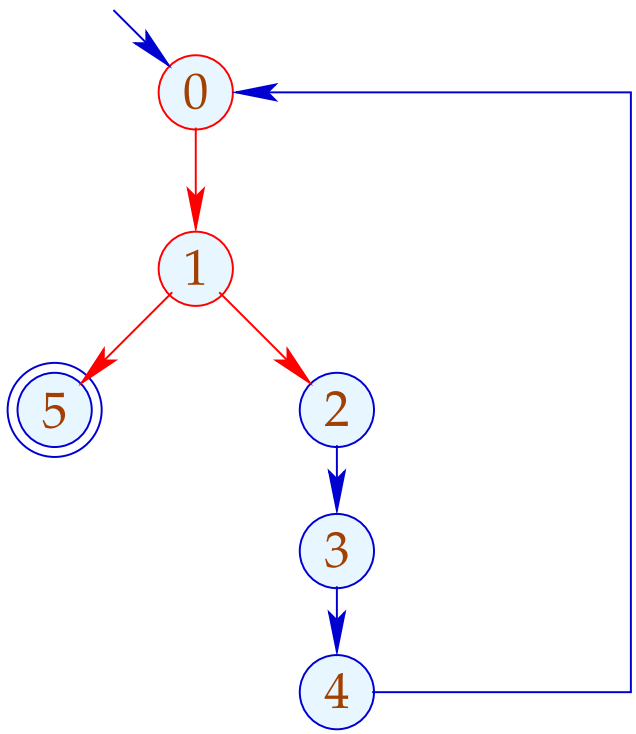
... leider aber auch gewöhnliche, die nicht rotiert werden:

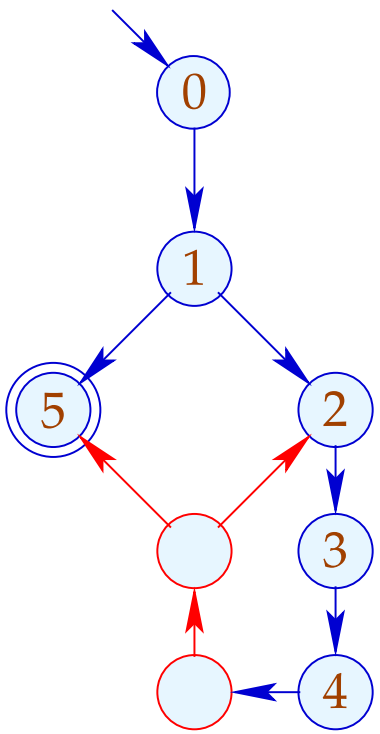




Hier müsste man den ganzen Pfad zwischen Rücksprung und Bedingung duplizieren :-(

... leider aber auch gewöhnliche, die nicht rotiert werden:





Hier müsste man den ganzen Pfad zwischen Rücksprung und Bedingung duplizieren :-)