(3) Differenzen für Mengen

Betrachte die Fixpunkt-Berechnung:

$$
\begin{array}{l}
x = \emptyset; \\
\text{for } \; (t = F\,x; t \not\subseteq x; \boxed{t = F\,x;}) \\
\qquad\qquad x = x \cup t;
\end{array}
$$

Ist F distributiv, könnte man sie ersetzen durch:

$$
\begin{array}{l}
x = \emptyset; \\
\text{for } \; (\Delta = F\,x; \Delta \neq \emptyset; \boxed{\Delta = (F\,\Delta) \setminus x;}) \\
\qquad\qquad x = x \cup \Delta;
\end{array}
$$

Die Funktion F muss jetzt nur noch für die kleineren Mengen Δ ausgerechnet werden :-) semi-naive Iteration

Statt der Folge: $\emptyset \subseteq F(\emptyset) \subseteq F^2(\emptyset) \subseteq \ldots$

berechnen wir: $\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \ldots$

wobei:

$$\begin{aligned} \Delta_{i+1} &= F(F^i(\emptyset)) \backslash F^i(\emptyset) \\ &= F(\Delta_i) \backslash (\Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_i) \quad \text{mit } \Delta_0 = \emptyset \end{aligned}$$

Nehmen wir an, die Kosten von $F\ x$ seien $1 + \#x$.

Dann summieren sich die Kosten zu:

naiv	$1 + 2 + \ldots + n + n$	$=$	$\frac{1}{2}n(n+3)$
semi-naiv			$2n$

wobei n die Kardinalität des Ergebnisses ist.

$\Longrightarrow$ Man spart einen linearen Faktor :-)

2.2 Peephole Optimierung

Idee:

- Schiebe ein kleines Fenster über das Programm.
- Optimiere agressiv innerhalb des Fensters. D.h.:

  → Beseitige Redundanzen!

  → Ersetze innerhalb des Fensters teure Operationen durch billige!

Beispiele:

$x = x + 1;$ $\Longrightarrow$ $x{+}{+};$

// sofern es dafür eine spezielle Instruktion gibt :-)

$z = y - a + a;$ $\Longrightarrow$ $z = y;$

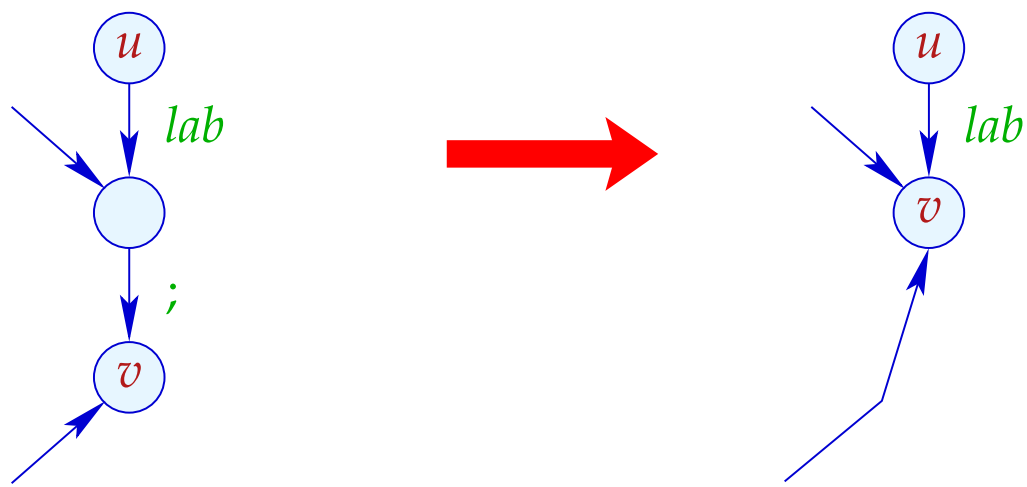
// algebraische Umformungen :-)

$x = x;$ $\Longrightarrow$ $;$

$x = 0;$ $\Longrightarrow$ $x = x \oplus x;$

$x = 2 \cdot x;$ $\Longrightarrow$ $x = x + x;$

Wichtiges Teilproblem: *nop*-Optimierung



→ Ist $(v_1, ;, v)$ eine Kante, hat v_1 keine weitere ausgehende Kante.

→ Folglich dürfen wir v_1 und v identifizieren :-)

→ Die Reihenfolge der Identifizierungen ist egal :-))

Implementierung:

- Wir konstruieren eine Funktion $\mathsf{next} : \mathit{Nodes} \to \mathit{Nodes}$ mit:

$$\mathsf{next}\ u = \begin{cases} \mathsf{next}\ v & \text{falls} \quad (u, ;, v) \quad \text{Kante} \\ u & \text{sonst} \end{cases}$$

  Achtung: Diese Definition ist nur rekursiv, wenn es ;-Schleifen gibt ???

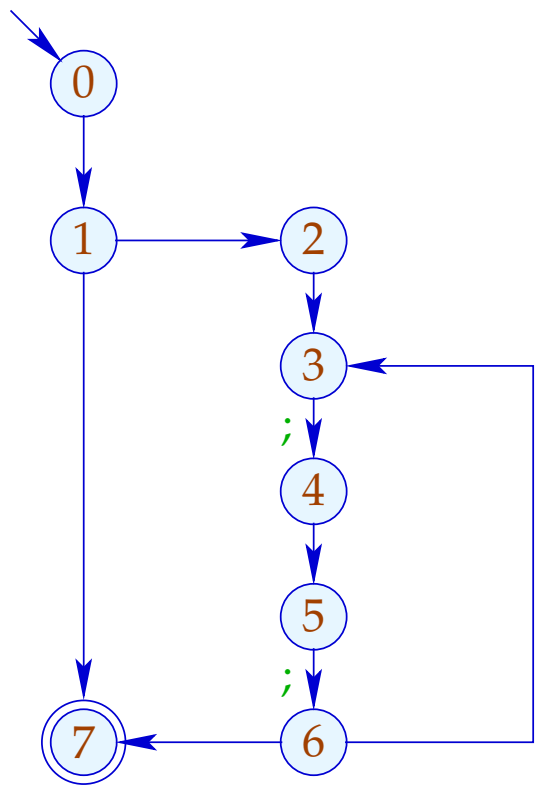
- Wir ersetzen jede Kante:

$$(u, \mathit{lab}, v) \quad \Longrightarrow \quad (u, \mathit{lab}, \mathsf{next}\ v)$$

  ... sofern $\mathit{lab} \neq ;$

- Alle ;-Kanten werfen wir weg ;-)

Beispiel:

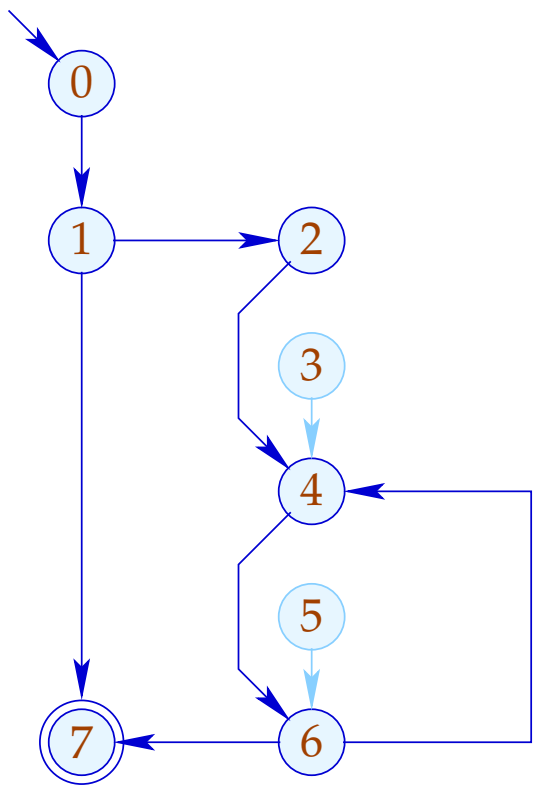


$$\text{next } 1 = 1$$

$$\text{next } 3 = 4$$

$$\text{next } 5 = 6$$

Beispiel:



$$\begin{aligned} \text{next } 1 &= 1 \\ \text{next } 3 &= 4 \\ \text{next } 5 &= 6 \end{aligned}$$

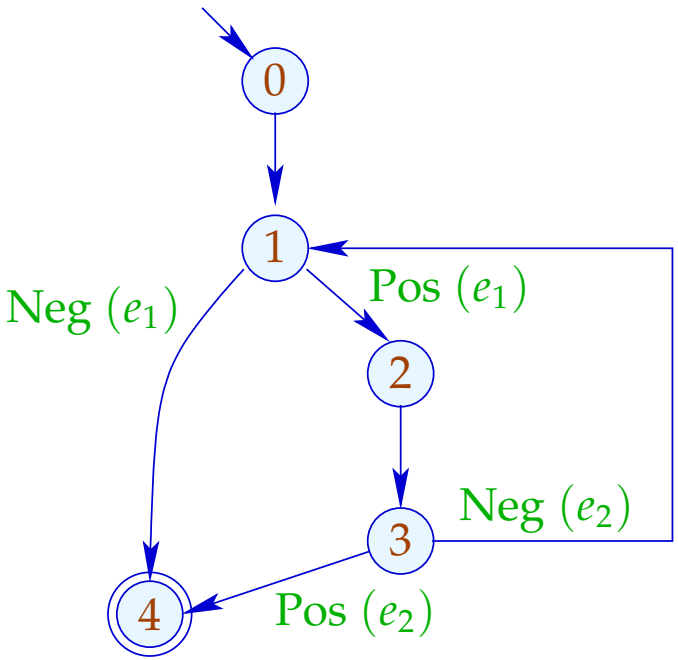
2. Teilproblem: Linearisierung

Der CFG muss nach der Optimierung wieder in eine lineare Abfolge von Instruktionen gebracht werden :-)

Achtung:

Nicht jede Linearisierung ist gleich gut !!!

Beispiel:



0:

1: if (e_1) goto 2;

4: halt

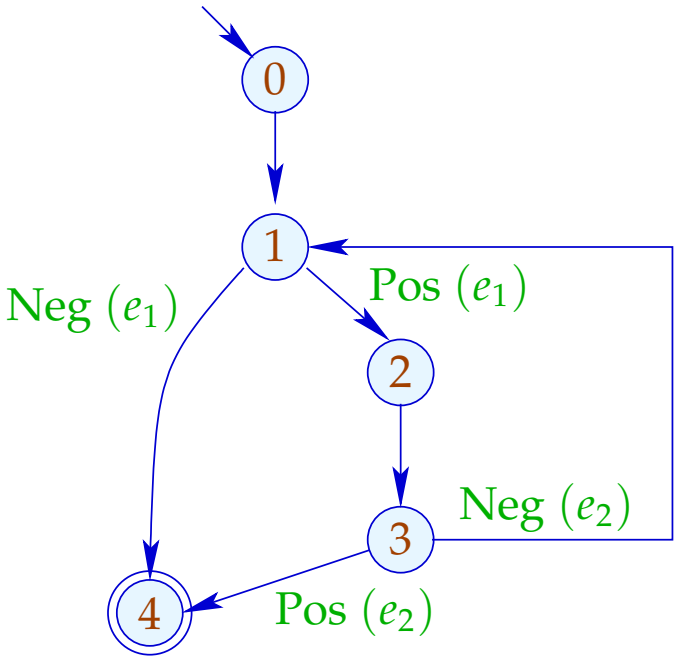
2: $\boxed{\text{Rumpf}}$

3: if (e_2) goto 4;

goto 1;

Schlecht: Der Schleifen-Rumpf wird angesprungen :-(

Beispiel:



0:

1: if $(!e_1)$ goto 4;

2: $\boxed{\text{Rumpf}}$

3: if $(!e_2)$ goto 1;

4: halt

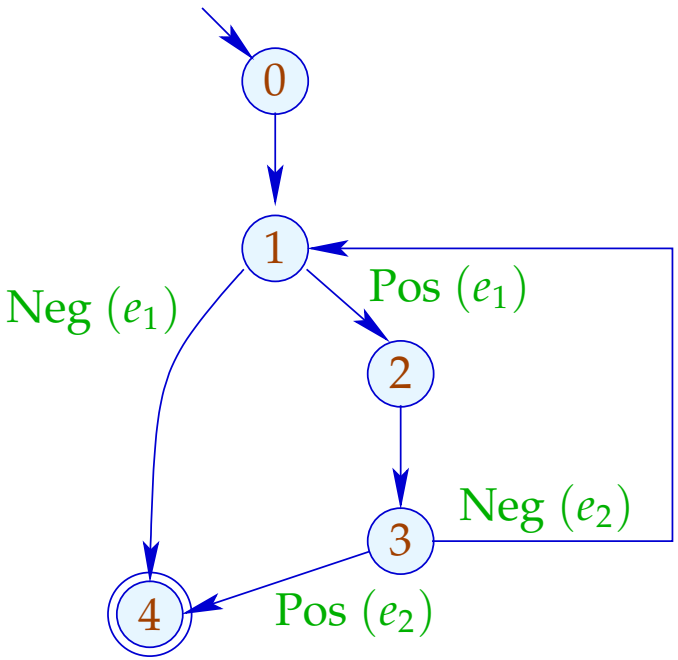
// besseres Cache-Verhalten :-)

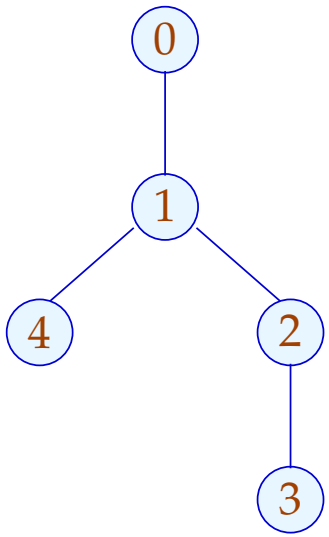
Idee:

- Gib jedem Knoten eine Temperatur!
- Springe stets zu
  - (1) bereits behandelten Knoten;
  - (2) kälteren Knoten.
- Temperatur $\approx$ Schachtelungstiefe

Zur Berechnung benutzen wir den Prädominator-Baum und starke Zusammenhangskomponenten ...

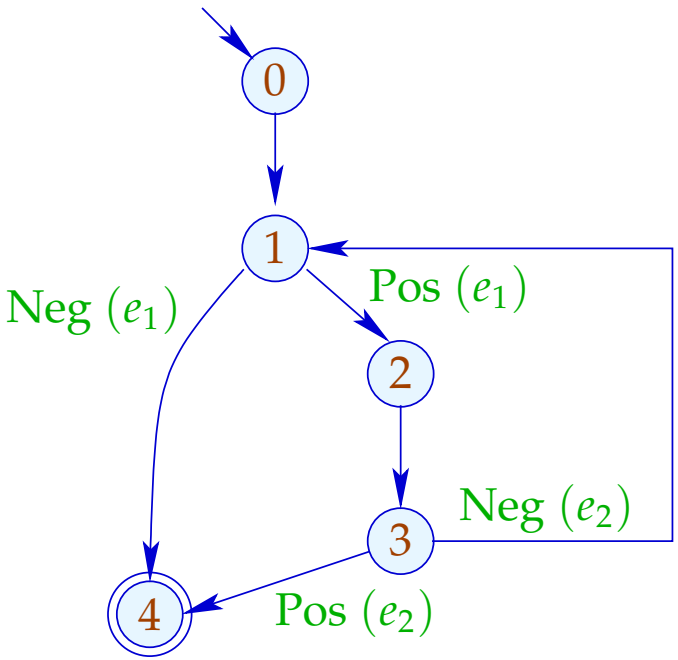
... im Beispiel:

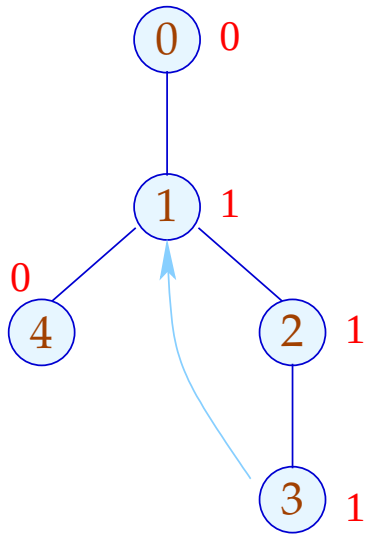




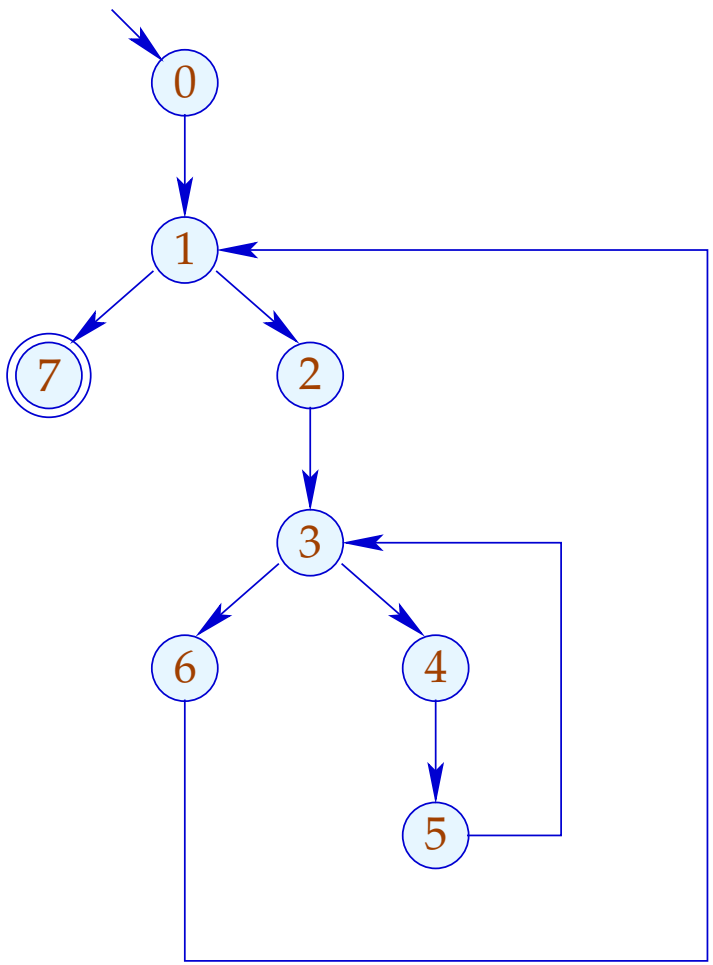
Der Teilbaum mit Rücksprung ist heißer ...

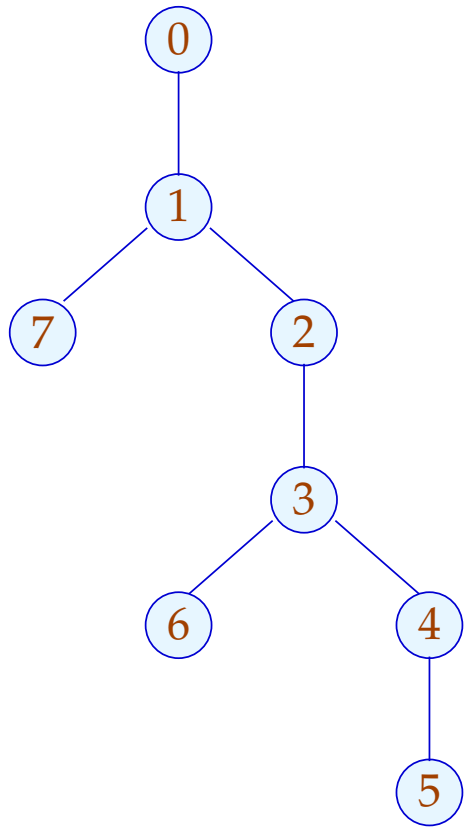
... im Beispiel:



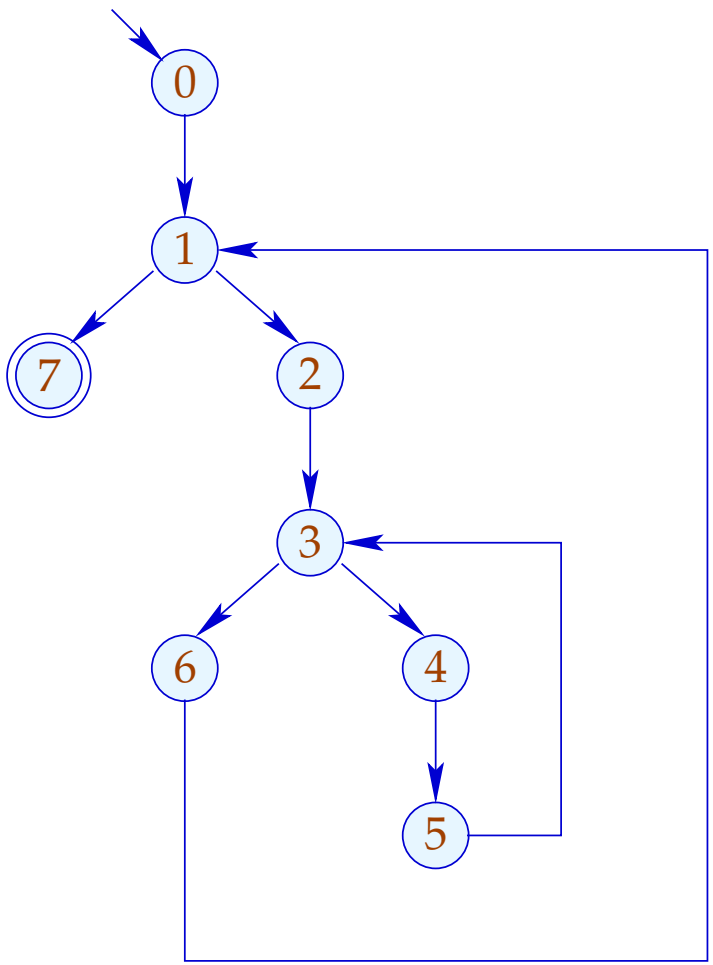


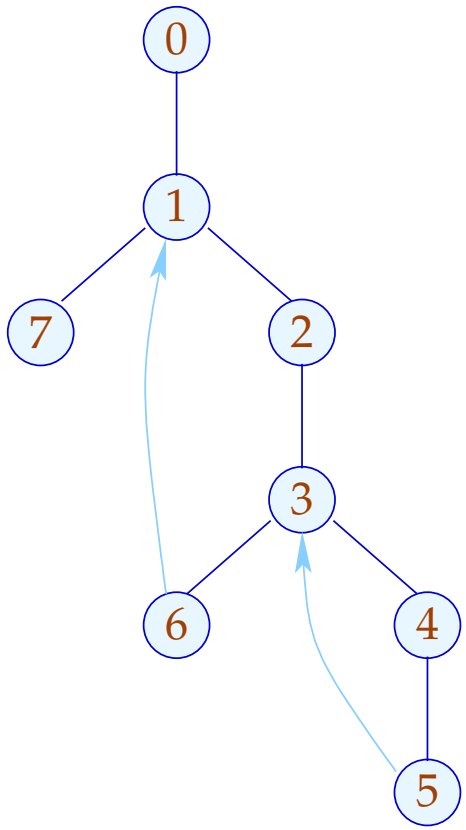
Komplizierteres Beispiel:



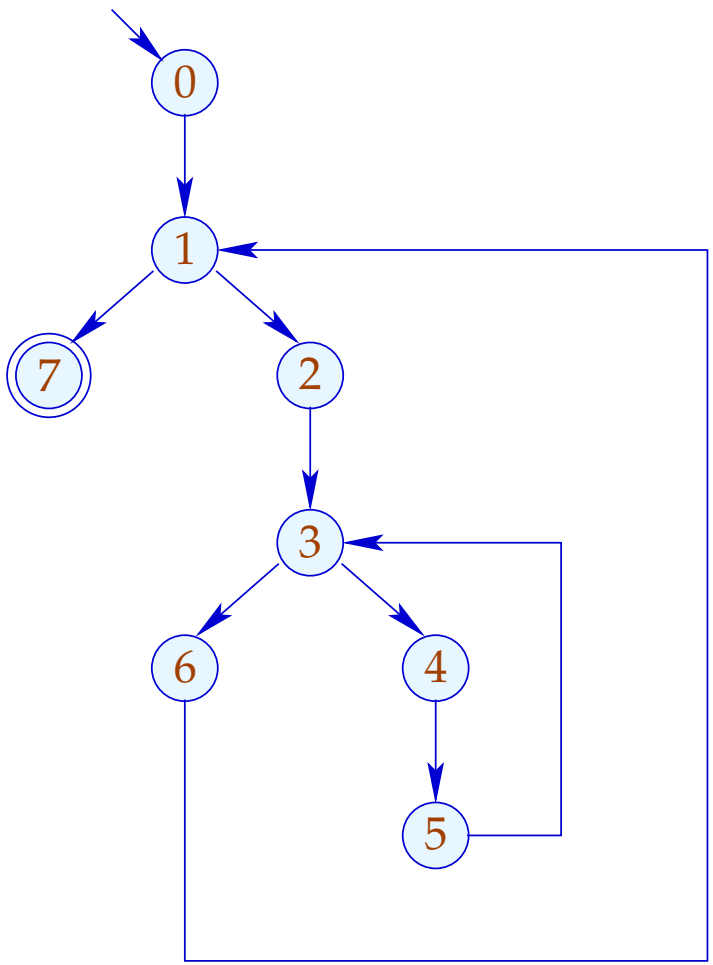


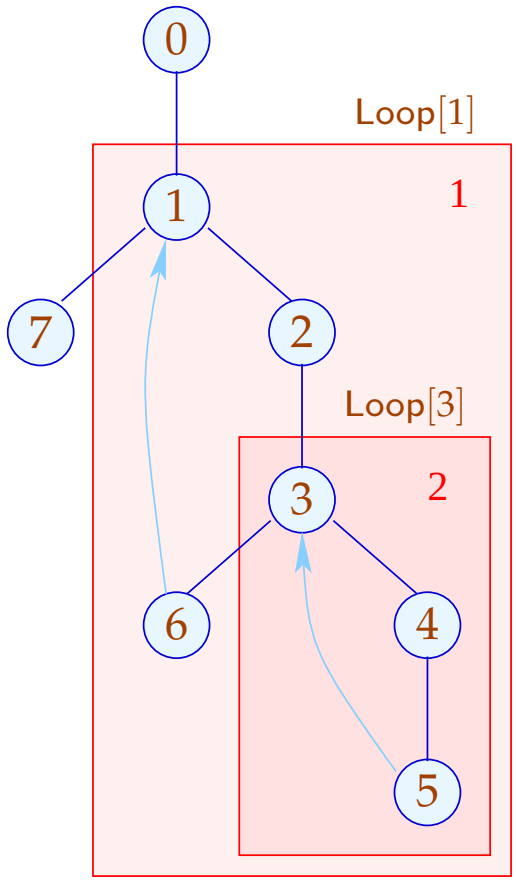
Komplizierteres Beispiel:





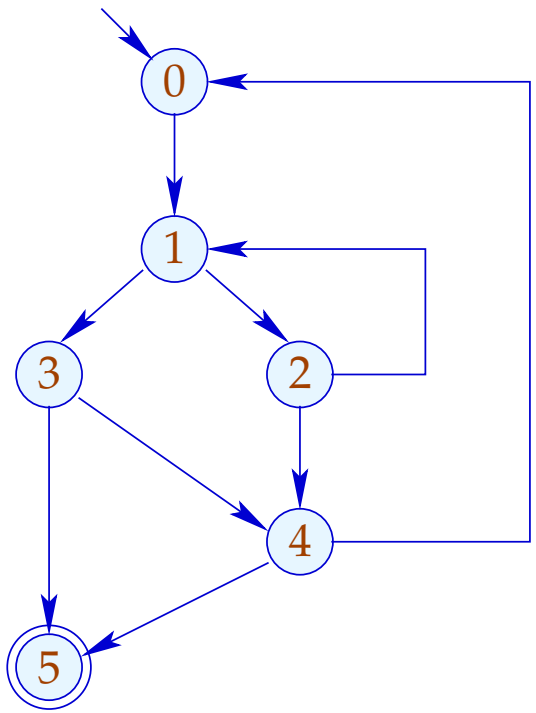
Komplizierteres Beispiel:

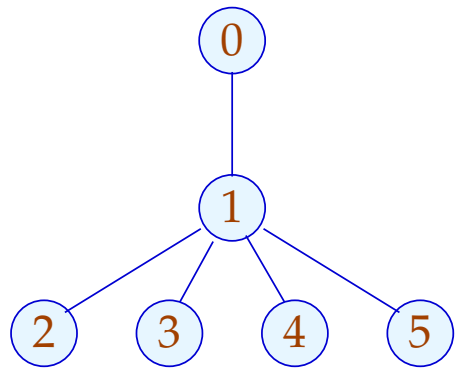




Unsere Definition von Loop sorgt dafür, dass (erkannte) Schleifen geschachtelt auftreten :-)

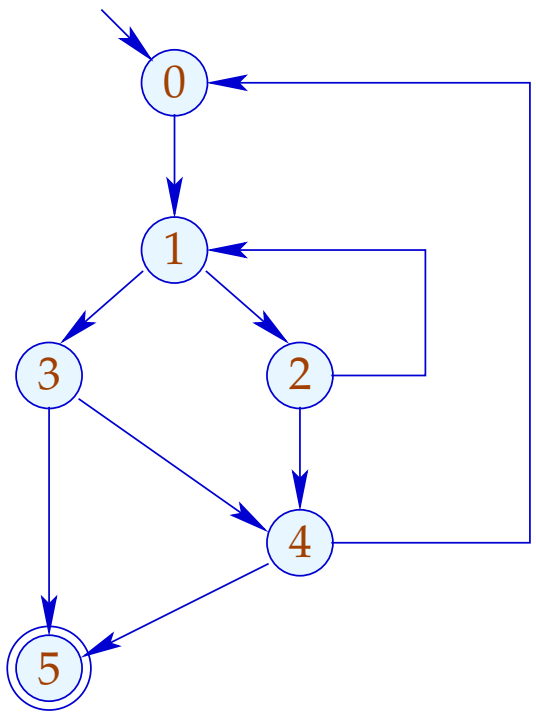
Sie ist auch für do-while-Schleifen mit breaks vernünftig...

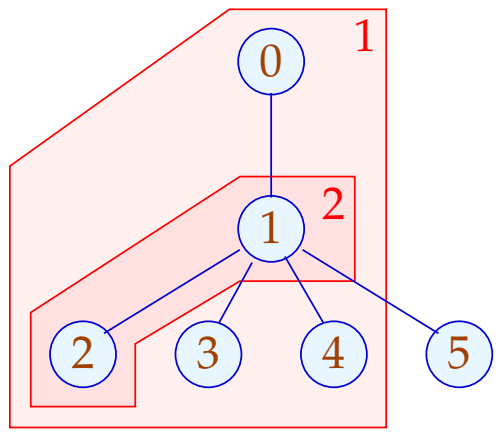




Unsere Definition von Loop sorgt dafür, dass (erkannte) Schleifen geschachtelt auftreten :-)

Sie ist auch für do-while-Schleifen mit breaks vernünftig...





Zusammenfassung: Das Verfahren

(1) Ermittlung einer Temperatur für jeden Knoten;

(2) Prä-order-DFS über den CFG;

→ Führt eine Kante zu einem Knoten, für den wir bereits Code erzeugt haben, fügen wir einen Sprung ein.

→ Hat ein Knoten zwei Nachfolger unterschiedlicher Temperatur, fügen wir einen Sprung zum kälteren der beiden ein.

→ Hat ein Knoten zwei gleich warme Nachfolger, ist es egal ;-)

2.3 Funktionen

Wir erweitern unsere Mini-Programmiersprache um Funktionen und Funktions-Aufrufe. Dazu führen wir neue Statements ein:

$$\mathsf{ret} = f(b_1, \ldots, b_k); \qquad \mathsf{return}\ e;$$

Jede Funktion f besitzt eine Definition:

$$f\ (a_1, \ldots, a_n)\ \{\ stmt^*\ \}$$

// a_i formale Parameter

// b_i aktuelle Parameter

// ret Register für Rückgabewert

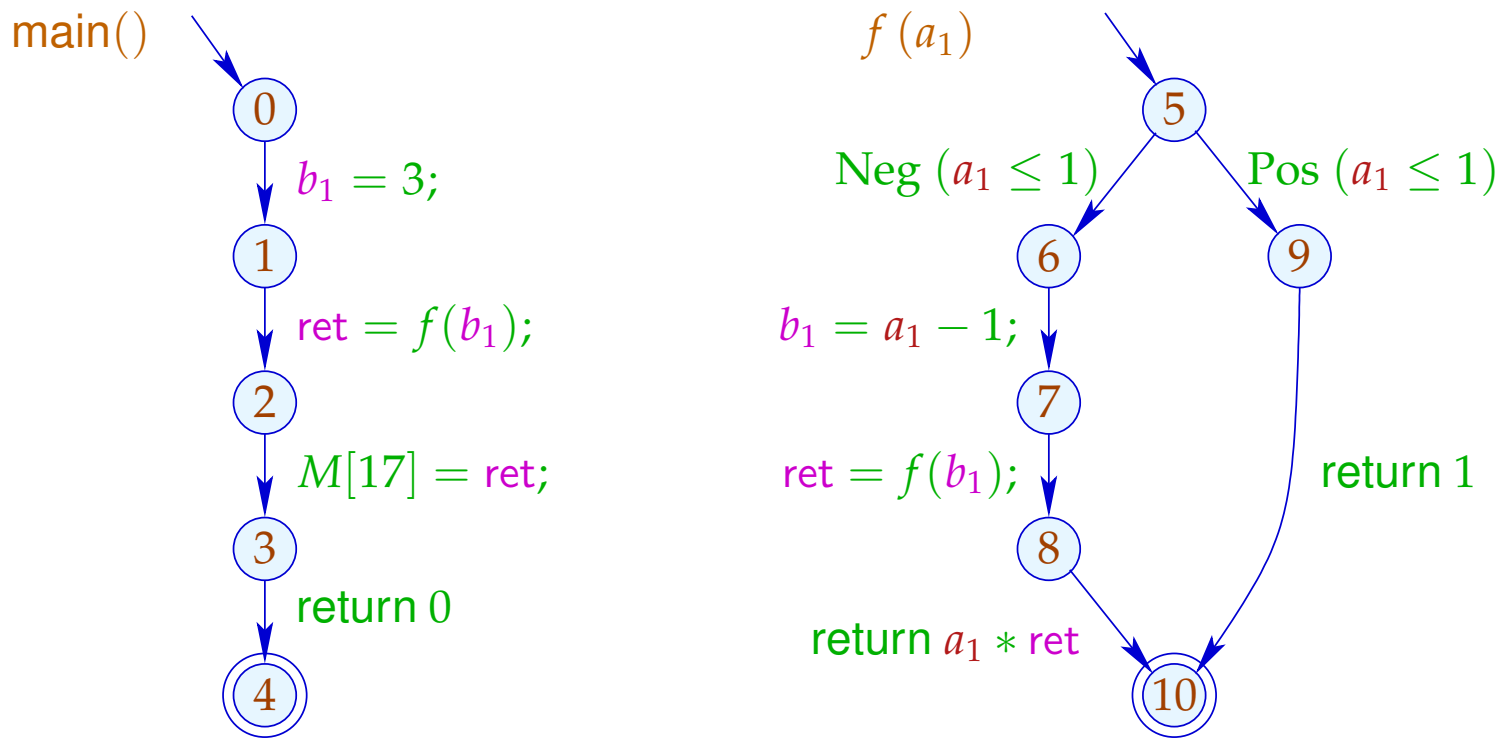
Die Programm-Ausführung startet mit dem Aufruf einer (parameterlosen) Funktion main () .

Beispiel:

```
main () {                    f (a_1) {
    b_1 = 2;                     if (a_1 ≤ 1) return 1;
    ret = f(b_1);                  b_1 = a_1 − 1;
    M[17] = ret;                 ret = f(b_1);
    return 0;                    return a_1 · ret;
}                            }
```

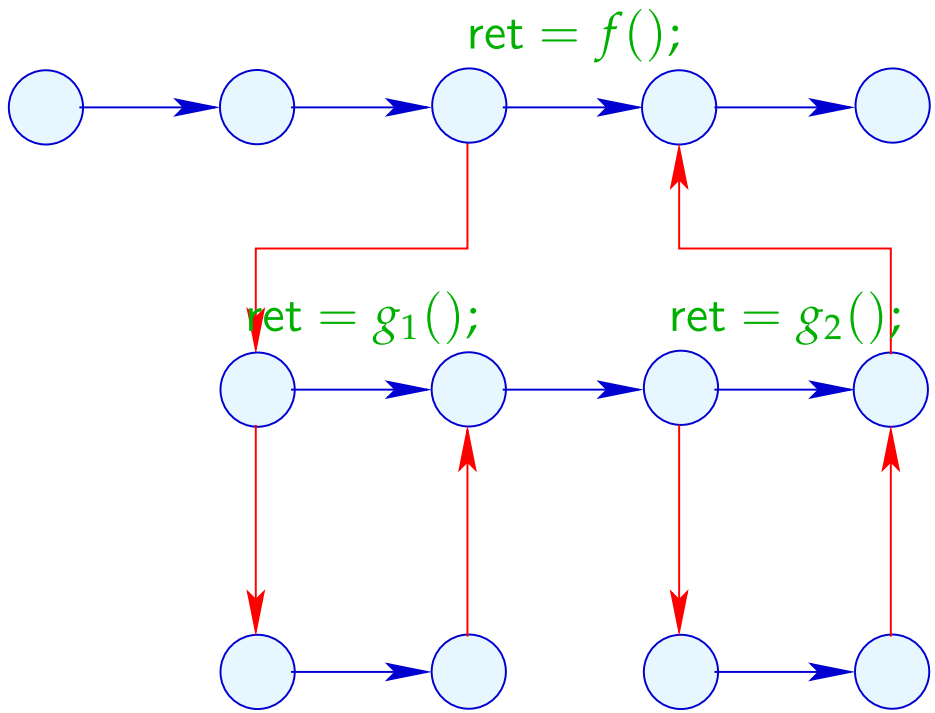
Solche Programme lassen sich durch eine Menge von CFGs darstellen: einem für jede Funktion ...

... im Beispiel:

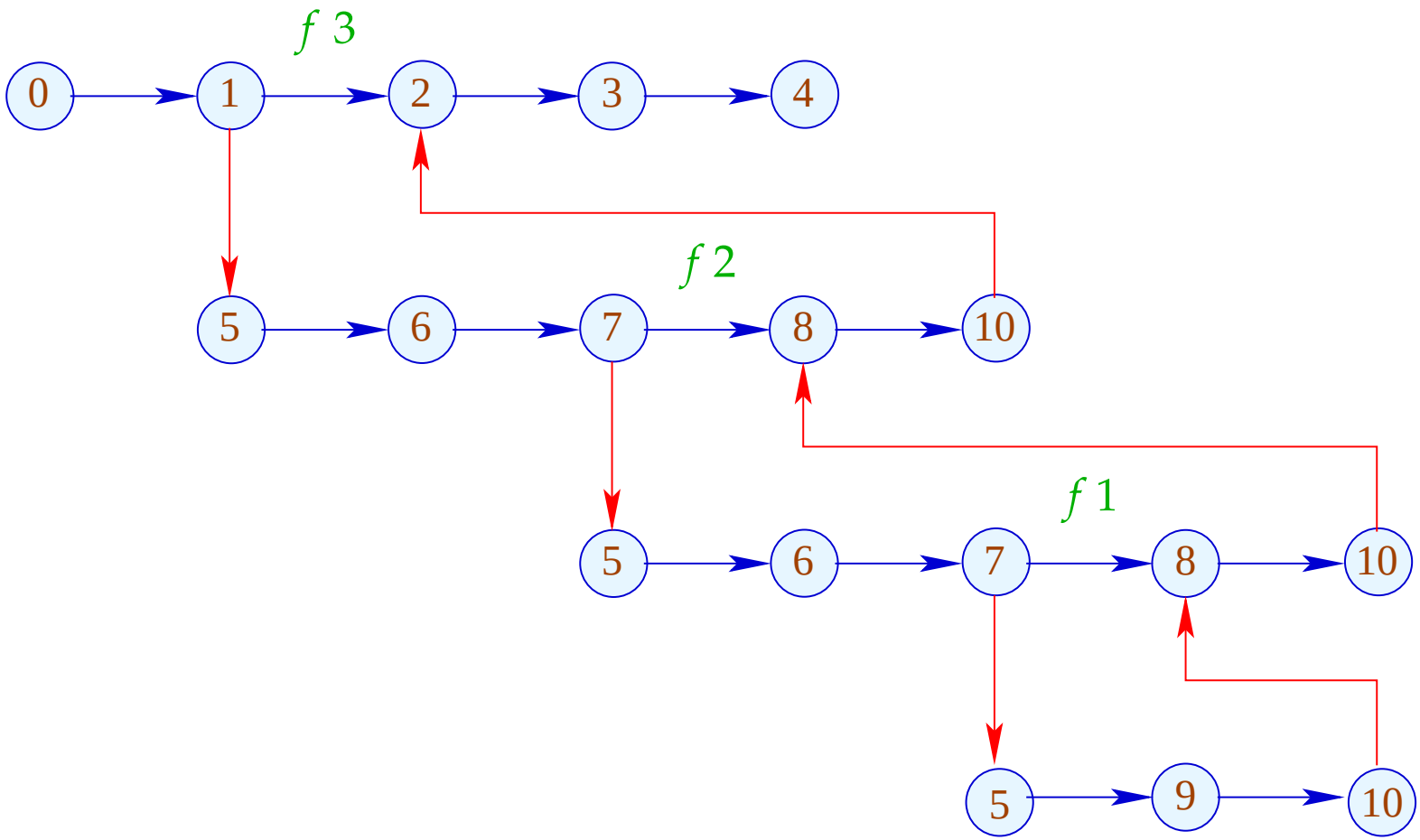

main()
0
$b_1 = 3;$
1
ret $= f(b_1);$
2
$M[17] =$ ret;
3
return 0
4
$f\ (a_1)$
5
Neg $(a_1 \leq 1)$
Pos $(a_1 \leq 1)$
6
9
$b_1 = a_1 - 1;$
7
ret $= f(b_1);$
return 1
8
return $a_1 *$ ret
10

Um solche Programme zu optimieren, benötigen wir eine erweiterte operationelle Semantik ;-)

Programm-Ausführungen sind nicht mehr Pfade, sondern Wälder:



... im Beispiel:



Die Funktion $[\![.]\!]$ erweitern wir auf Berechnungs-Wälder w :

$$[\![w]\!] : (Vars \to \mathbb{Z}) \times (\mathbb{N} \to \mathbb{Z}) \to (Vars \to \mathbb{Z}) \times (\mathbb{N} \to \mathbb{Z})$$

Für einen Aufruf $k = (u, \mathsf{ret} = f\,(b_1, \ldots, b_k);, v)$ müssen wir:

- die Anfangwerte der lokalen Variablen ermitteln:

$$\mathsf{enter}\ \rho\ x = \begin{cases} \rho\, b_i & \text{falls} \quad x = a_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- ... den berechneten Rückgabe-Wert in ret ablegen:

$$\mathsf{combine}\ (\rho_1, \rho_2) = \rho_1 \oplus \{\mathsf{ret} \to \rho_2\ \mathsf{ret}\}$$

- ... dazwischen den Berechnungs-Wald der Funktion auswerten:

$$
\begin{aligned}
[\![k\ \langle w \rangle]\!]\ (\rho, \mu) \quad = & \\
& \mathsf{let}\ \ (\rho_1, \mu_1) = [\![w]\!]\ (\mathsf{enter}\ \rho, \mu) \\
& \mathsf{in}\ \ \ (\mathsf{combine}\ (\rho, \rho_1), \mu_1)
\end{aligned}
$$

Ein Return $k = (u, \mathsf{return}\ \ e;, v)$ ist eine Zuweisung an ret :

$$
[\![k]\!]\ (\rho, \mu) \quad = \quad (\rho \oplus \{\mathsf{ret} \mapsto [\![e]\!]\ \rho\}, \mu)
$$

Achtung:

- $[\![w]\!]$ ist i.a. nur partiell definiert :-)
- Die Benutzung von speziellen Registern a_i, b_i, ret repräsentiert eine bestimmte Aufruf-Konvention.
- Die normale operationelle Semantik arbeitet mit Konfigurationen, die Aufrufkeller verwalten.
- Berechnungs-Wälder eignen sich aber besser zur Konstruktion von Analysen und Korrektheitsbeweisen :-)
- Es ist eine lästige (aber nützliche) Aufgabe, die Äquivalenz der beiden Ansätze zu zeigen ...

Konfigurationen:

$$
\begin{array}{lcl}
\mathit{configuration} & = & \mathit{stack} \times \mathit{store} \\
\mathit{store} & = & \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \\
\mathit{stack} & = & \mathit{frame} \cdot \mathit{frame}^* \\
\mathit{frame} & = & \mathit{point} \times \mathit{locals} \\
\mathit{locals} & = & (\mathit{Vars} \to \mathbb{Z})
\end{array}
$$

Ein *frame* (Kellerrahmen) beschreibt den lokalen Berechnungszustand innerhalb eines Funktionsaufrufs :-)

Den Rahmen des aktuellen Aufrufs schreiben wir links.

Berechnungsschritte beziehen sich auf den aktuellen Aufruf :-)

Zusätzlich benötigte Arten von Schritten:

Aufruf $k = (u, \mathsf{ret} = f\,(b_1, \ldots, b_k);, v)$:

$$(\boxed{(u, \rho)} \cdot \sigma, \mu) \quad \Longrightarrow \quad (\boxed{(u_f, \mathsf{enter}\ \rho) \cdot (v, \rho)} \cdot \sigma, \mu)$$

u_f Anfangspunkt von f

Rückkehr:

$$(\boxed{(r_f, \rho_2) \cdot (v, \rho_1)} \cdot \sigma, \mu) \quad \Longrightarrow \quad (\boxed{(v, \mathsf{combine}\,(\rho_1, \rho_2))} \cdot \sigma, \mu)$$

r_f Endpunkt von f

Rückgabe: $k = (u, \mathsf{return}\ \ e;, v)$:

$$(\boxed{(u, \rho)} \cdot \sigma, \mu) \quad \Longrightarrow \quad (\boxed{(v, \rho \oplus \{\mathsf{ret} \mapsto [\![e]\!]\ \rho\})} \cdot \sigma, \mu)$$

Mit dem Aufruf-Keller verwalten wir explizit den DFS-Durchlauf über den Berechnungswald :-)

... im Beispiel:

1	$b_1 \mapsto 3$

Mit dem Aufruf-Keller verwalten wir explizit den DFS-Durchlauf über den Berechnungswald :-)

... im Beispiel:

5	$a_1 \mapsto 3$
2	

Mit dem Aufruf-Keller verwalten wir explizit den DFS-Durchlauf über den Berechnungswald :-)

... im Beispiel:

7	$a_1 \mapsto 3$
2	

Mit dem Aufruf-Keller verwalten wir explizit den DFS-Durchlauf über den Berechnungswald :-)

... im Beispiel:

5	$a_1 \mapsto 2$
8	$a_1 \mapsto 3$
2	

Mit dem Aufruf-Keller verwalten wir explizit den DFS-Durchlauf über den Berechnungswald :-)

... im Beispiel:

7	$a_1 \mapsto 2$
8	$a_1 \mapsto 3$
2	

Mit dem Aufruf-Keller verwalten wir explizit den DFS-Durchlauf über den Berechnungswald :-)

... im Beispiel:

5	$a_1 \mapsto 1$
8	$a_1 \mapsto 2$
8	$a_1 \mapsto 3$
2	

Mit dem Aufruf-Keller verwalten wir explizit den DFS-Durchlauf über den Berechnungswald :-)

... im Beispiel:

10	ret $\mapsto$ 1
8	$a_1 \mapsto 2$
8	$a_1 \mapsto 3$
2	

Mit dem Aufruf-Keller verwalten wir explizit den DFS-Durchlauf über den Berechnungswald :-)

... im Beispiel:

8	ret $\mapsto 1$
8	$a_1 \mapsto 3$
2	

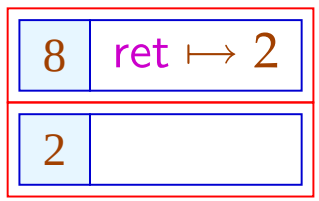
Mit dem Aufruf-Keller verwalten wir explizit den DFS-Durchlauf über den Berechnungswald :-)

... im Beispiel:

10	ret $\mapsto$ 2
8	$a_1 \mapsto 3$
2	

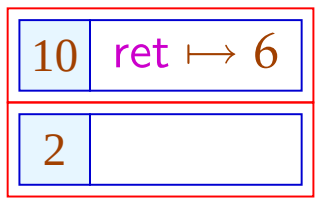
Mit dem Aufruf-Keller verwalten wir explizit den DFS-Durchlauf über den Berechnungswald :-)

... im Beispiel:



Mit dem Aufruf-Keller verwalten wir explizit den DFS-Durchlauf über den Berechnungswald :-)

... im Beispiel:



Mit dem Aufruf-Keller verwalten wir explizit den DFS-Durchlauf über den Berechnungswald :-)

... im Beispiel:

2	ret $\mapsto$ 6