Verbesserung:

$\rightarrow$ Nicht alle Funktionen aus $\mathbb{D}_f \rightarrow \mathbb{D}_f$ kommen wirklich vor :-)

$\rightarrow$ Alle vorkommenden Funktionen $\lambda D. \bot \neq M$ sind von der Form:

$$\begin{array}{lcll} M & = & \{x \mapsto (b_x \sqcup \bigsqcup_{y \in I_x} y) \mid x \in \mathit{Vars}\} & \text{wobei:} \\ M\ D & = & \{x \mapsto (b_x \sqcup \bigsqcup_{y \in I_x} D\ y) \mid x \in \mathit{Vars}\} & \text{für} \quad D \neq \bot \end{array}$$

$\rightarrow$ Sei $\mathbb{M}$ die Menge aller dieser Funktionen. Dann gilt für $M_1, M_2 \in \mathbb{M}$ $(M_1 \neq \lambda D. \bot \neq M_2)$:

$$(M_1 \sqcup M_2)\ x \quad = \quad (M_1\ x) \sqcup (M_2\ x)$$

$\rightarrow$ Für $k = \#\mathit{Vars}$ hat $\mathbb{M}$ die Höhe $(k+1) \cdot k + 1$:-)

Verbesserung (Forts.):

→ Auch die Komposition lässt sich direkt implementieren:

$$
\begin{array}{rcll}
(M_1 \circ M_2)\ x & = & b' \sqcup \bigsqcup_{y \in I'} y & \text{mit} \\
b' & = & b \sqcup \bigsqcup_{z \in I} b_z & \\
I' & = & \bigcup_{z \in I} I_z & \text{sofern} \\
M_1\ x & = & b \sqcup \bigsqcup_{y \in I} y & \\
M_2\ z & = & b_z \sqcup \bigsqcup_{y \in I_z} y &
\end{array}
$$

→ Die Effekte von Zuweisungen sehen dann so aus:

$$
[\![x = e;]\!]^\sharp \quad = \quad \begin{cases}
\mathsf{Id}_{Vars} \oplus \{x \mapsto c\} & \text{falls} \quad e = c \in \mathbb{Z} \\
\mathsf{Id}_{Vars} \oplus \{x \mapsto y\} & \text{falls} \quad e = y \in Vars \\
\mathsf{Id}_{Vars} \oplus \{x \mapsto \top\} & \text{sonst}
\end{cases}
$$

... im Beispiel:

$$
\begin{array}{lcl}
[\![t = 0;]\!]^\sharp & = & \{a_1 \mapsto a_1, b_1 \mapsto b_1, \mathsf{ret} \mapsto \mathsf{ret}, \boxed{t \mapsto 0}\} \\
[\![b_1 = a_1;]\!]^\sharp & = & \{a_1 \mapsto a_1, \boxed{b_1 \mapsto a_1}, \mathsf{ret} \mapsto \mathsf{ret}, t \mapsto t\}
\end{array}
$$

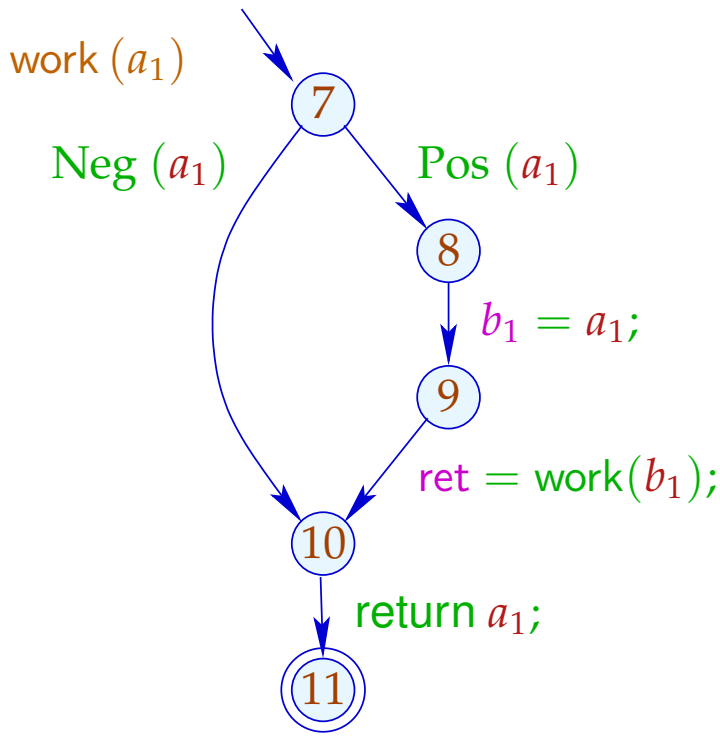
Um die Analyse zu implementieren, müssen wir nur noch den Effekt eines Aufrufs $k = (_, \mathsf{ret} = f\,(b_1, \ldots, b_k);, _)$ aus dem Effekt der Funktion f ermitteln:

$$
\begin{array}{lcll}
[\![k]\!]^\sharp & = & H_f\,([\![f]\!]^\sharp) & \text{wobei:} \\
H_f\,(M) & = & \mathsf{Id} \oplus \{\mathsf{ret} \mapsto ((M \circ E_f)\ \mathsf{ret})\} & \\
E_f\ x & = & \begin{cases} b_i & \text{falls} \quad x = a_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} &
\end{array}
$$

... im Beispiel:

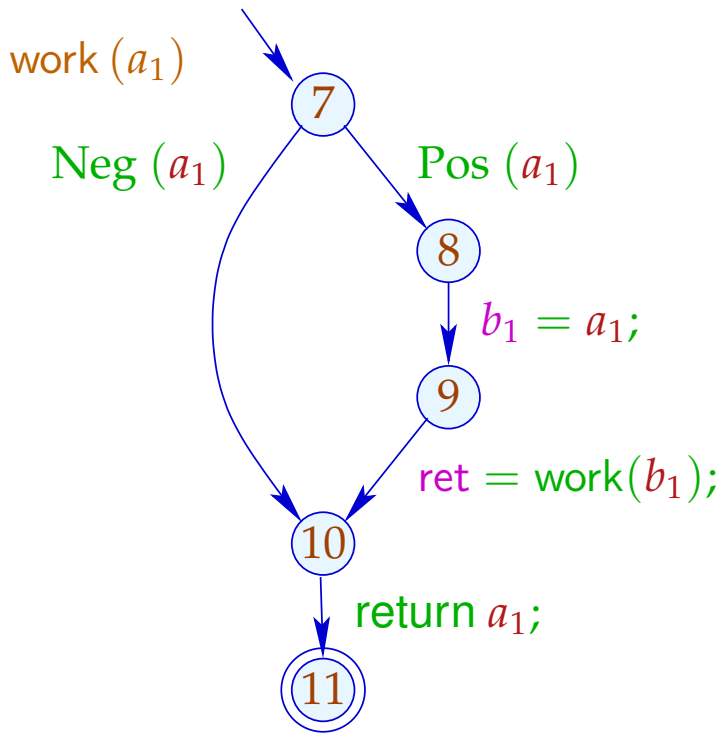
$$
\begin{array}{lrcl}
\text{Falls} & [\![\mathsf{work}]\!]^\sharp & = & \{a_1 \mapsto a_1, b_1 \mapsto b_1, \mathsf{ret} \mapsto a_1\} \\
\text{dann} & H_{\mathsf{work}}\, [\![\mathsf{work}]\!]^\sharp & = & \mathsf{Id} \oplus \{\mathsf{ret} \mapsto (([\![\mathsf{work}]\!]^\sharp \circ E_f)\ \mathsf{ret})\} \\
 & & = & \mathsf{Id} \oplus \{\mathsf{ret} \mapsto (\boxed{\{a_1 \mapsto b_1, b_1 \mapsto 0, \mathsf{ret} \mapsto b_1\}}\ \mathsf{ret})\} \\
 & & = & \{a_1 \mapsto a_1, b_1 \mapsto b_1, \mathsf{ret} \mapsto b_1\}
\end{array}
$$

Damit können wir die Fixpunkt-Iteration durchführen :-)



	1
7	$\{a_1 \mapsto a_1, b_1 \mapsto b_1, \mathsf{ret} \mapsto \mathsf{ret}\}$
10	$\{a_1 \mapsto a_1, b_1 \mapsto b_1, \mathsf{ret} \mapsto \mathsf{ret}\}$
11	$\{a_1 \mapsto a_1, b_1 \mapsto b_1, \mathsf{ret} \mapsto a_1\}$
8	$\{a_1 \mapsto a_1, b_1 \mapsto b_1, \mathsf{ret} \mapsto \mathsf{ret}\}$
9	$\{a_1 \mapsto a_1, b_1 \mapsto a_1, \mathsf{ret} \mapsto \mathsf{ret}\}$

$$
\begin{aligned}
[\![(9,\ldots,10)]\!]^\sharp \circ [\![9]\!]^\sharp &= \{a_1 \mapsto a_1, b_1 \mapsto b_1, \mathsf{ret} \mapsto b_1\} \circ \\
&\quad \{a_1 \mapsto a_1, b_1 \mapsto a_1, \mathsf{ret} \mapsto \mathsf{ret}\} \\
&= \{a_1 \mapsto a_1, b_1 \mapsto a_1, \mathsf{ret} \mapsto a_1\}
\end{aligned}
$$



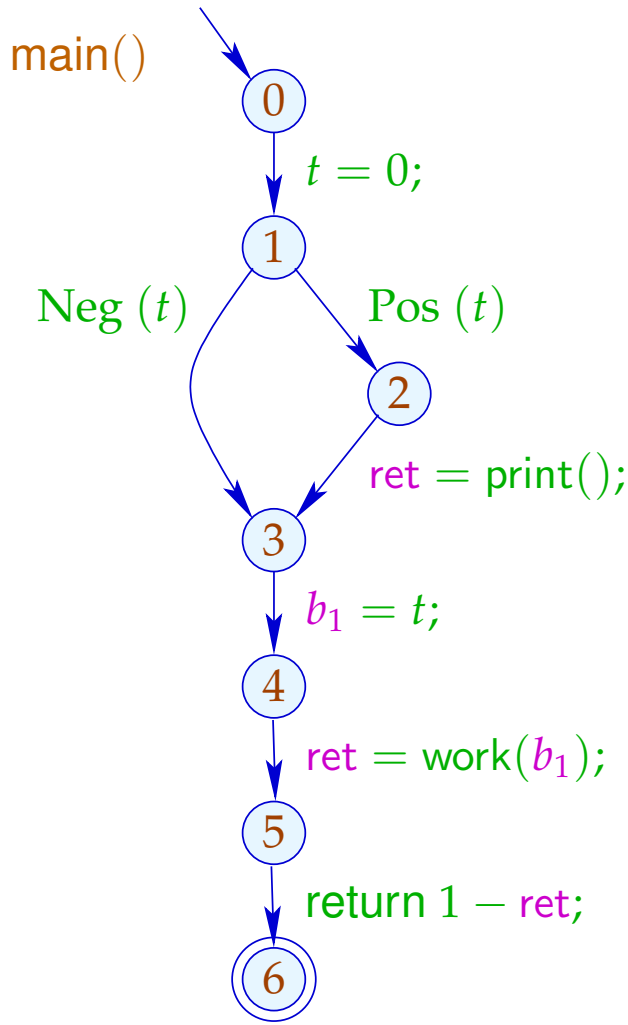
	2
7	$\{a_1 \mapsto a_1, b_1 \mapsto b_1, \mathsf{ret} \mapsto \mathsf{ret}\}$
10	$\boxed{\{a_1 \mapsto a_1, b_1 \mapsto a_1 \sqcup b_1, \mathsf{ret} \mapsto a_1 \sqcup \mathsf{ret}\}}$
11	$\boxed{\{a_1 \mapsto a_1, b_1 \mapsto a_1 \sqcup b_1, \mathsf{ret} \mapsto a_1\}}$
8	$\{a_1 \mapsto a_1, b_1 \mapsto b_1, \mathsf{ret} \mapsto \mathsf{ret}\}$
9	$\{a_1 \mapsto a_1, b_1 \mapsto a_1, \mathsf{ret} \mapsto \mathsf{ret}\}$

$$
\begin{aligned}
[\![(9,\ldots,10)]\!]^\sharp \circ [\![9]\!]^\sharp &= \{a_1 \mapsto a_1, b_1 \mapsto b_1, \mathsf{ret} \mapsto b_1\} \circ \\
&\quad \{a_1 \mapsto a_1, b_1 \mapsto a_1, \mathsf{ret} \mapsto \mathsf{ret}\} \\
&= \{a_1 \mapsto a_1, b_1 \mapsto a_1, \mathsf{ret} \mapsto a_1\}
\end{aligned}
$$

Wenn wir die Effekte von Funktionsaufrufen kennen, können wir ein Constraintsystem aufstellen, um den abstrakten Zustand bei Erreichen eines Punkts ermitteln:

$$
\begin{array}{lcll}
\mathcal{R}[\mathsf{main}] & \sqsupseteq & \mathsf{enter}_0\ d_0 & \\
\mathcal{R}[f] & \sqsupseteq & \mathsf{enter}^\sharp_f\ (\mathcal{R}[u]) & k = (u, \mathsf{ret} = f\ (a_1, \ldots, a_k);, _) \quad \text{Aufruf} \\
\mathcal{R}[v] & \sqsupseteq & \mathcal{R}[f] & v \quad \text{Anfangspunkt von} \quad f \\
\mathcal{R}[v] & \sqsupseteq & [\![k]\!]^\sharp\ (\mathcal{R}[u]) & k = (u, _, v) \quad \text{Kante}
\end{array}
$$

... im Beispiel:



0	$\{b_1 \mapsto 0, \mathsf{ret} \mapsto 0, t \mapsto 0\}$
1	$\{b_1 \mapsto 0, \mathsf{ret} \mapsto 0, t \mapsto 0\}$
2	$\{b_1 \mapsto 0, \mathsf{ret} \mapsto 0, t \mapsto 0\}$
3	$\{b_1 \mapsto 0, \mathsf{ret} \mapsto \top, t \mapsto 0\}$
4	$\{b_1 \mapsto 0, \mathsf{ret} \mapsto \top, t \mapsto 0\}$
5	$\{b_1 \mapsto 0, \mathsf{ret} \mapsto 0, t \mapsto 0\}$
6	$\{b_1 \mapsto 0, \mathsf{ret} \mapsto \top, t \mapsto 0\}$

Diskussion:

- Zumindest Kopier-Konstanten lassen sich interprozedural ermitteln.
- Dazu mussten wir Bedingungen und kompliziertere Zuweisungen ignorieren :-(
- In der zweiten Phase hätten wir allerdings exakter rechnen können :-)
- Die weitere Abstrahierung war aus zwei Gründen notwendig:

  (1) Die Menge der auftretenden Transformer $\mathbb{M} \subseteq \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ muss endlich sein;

  (2) Die Funktionen $M \in \mathbb{M}$ müssen effizient implementierbar sein :-)

- Auf die zweite Bedingung kann evt. verzichtet werden ...

Beobachtung:

Sharir/Pnueli, Cousot

→ Oft werden Funktionen nur mit wenigen verschiedenen abstrakten Argumenten aufgerufen.

→ Man könnte dann doch jede Funktion für nur genau diese Aufrufe analysieren :-)

→ Stelle das folgende Constraint-System auf:

$$
\begin{array}{llll}
[\![v,a]\!]^\sharp & \sqsupseteq & a & v \quad \text{Eintrittspunkt} \\
[\![v,a]\!]^\sharp & \sqsupseteq & \mathsf{conbine}^\sharp\,([\![u,a]\!], [\![f, \mathsf{enter}^\sharp_f\, [\![u,a]\!]^\sharp]\!]^\sharp) & \\
 & & & (u, \mathsf{ret} = f\,(a_1,\ldots,a_k);, v) \quad \text{Aufruf} \\
[\![v,a]\!]^\sharp & \sqsupseteq & [\![lab]\!]^\sharp\, [\![u]\!]^\sharp & k = (u, lab, v) \quad \text{Kante} \\
[\![f,a]\!]^\sharp & \sqsupseteq & [\![stop_f, a]\!]^\sharp & stop_f \quad \text{Endpunkt von} \quad f
\end{array}
$$

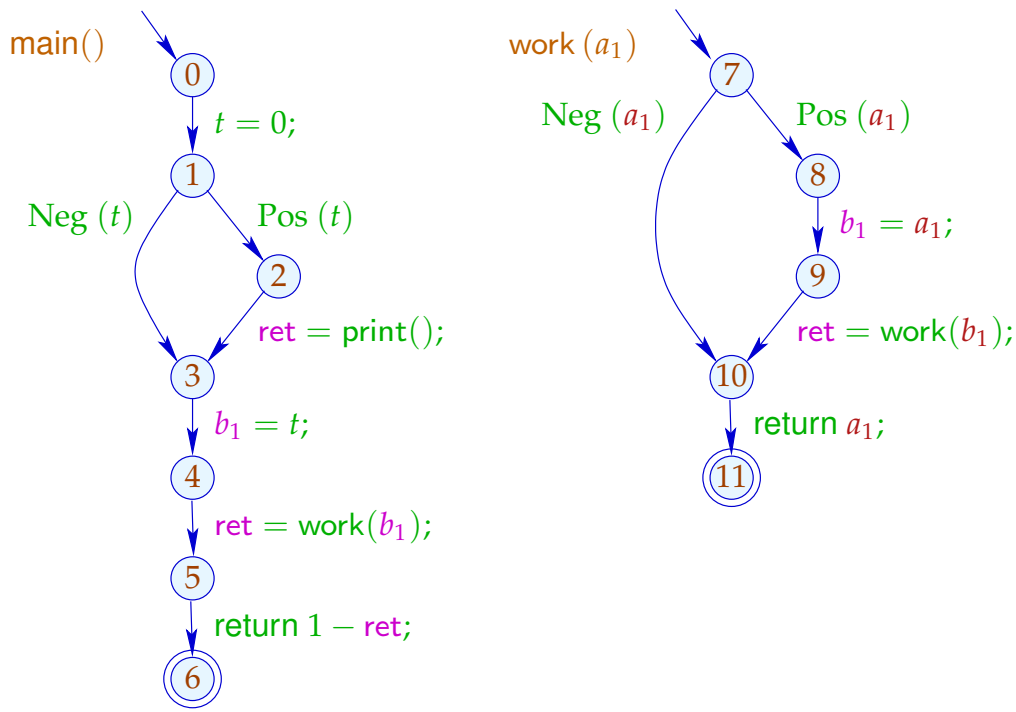
// $[\![v,a]\!]^\sharp$ == Wert des Effekts für das Argument a .

Diskussion:

- Dieses Constraint-System ist i.a. riesengroß :-(
- Wir wollen es aber gar nicht komplett lösen !!!
- Uns reicht es, die korrekten Werte für alle Aufrufe zu ermitteln, die vorkommen, d.h. für die Berechnung des Werts $[\![\mathsf{main}(), a_0]\!]^\sharp$ benötigt werden $\Longrightarrow$ wir verwenden unseren lokalen Fixpunkt-Algorithmus :-))
- Der Fixpunkt-Algo liefert uns sogar noch die Menge der aktuellen Parameter $a \in \mathbb{D}$, für die eine Funktion (möglicherweise) aufgerufen wird sowie die Werte an allen ihren Programm-Punkten für jeden dieser Aufrufe :-)

... im Beispiel:

Versuchen wir einfach einmal eine volle Konstanten-Propagation ...



0	$\lambda\, x.\, 0$	$\lambda\, x.\, 0$
1	$\lambda\, x.\, 0$	$\lambda\, x.\, 0$
2	$\lambda\, x.\, 0$	$\bot$
3	$\lambda\, x.\, 0$	$\lambda\, x.\, 0$
4	$\lambda\, x.\, 0$	$\lambda\, x.\, 0$
7	$\lambda\, x.\, 0$	$\lambda\, x.\, 0$
8	$\lambda\, x.\, 0$	$\bot$
9	$\lambda\, x.\, 0$	$\bot$
10	$\lambda\, x.\, 0$	$\lambda\, x.\, 0$
11	$\lambda\, x.\, 0$	$\lambda\, x.\, 0$
5	$\lambda\, x.\, 0$	$\lambda\, x.\, 0$
6	$\lambda\, x.\, 0$	$(\lambda\, x.\, 0) \oplus \{\mathsf{ret} \mapsto 1\}$
main()	$\lambda\, x.\, 0$	$(\lambda\, x.\, 0) \oplus \{\mathsf{ret} \mapsto 1\}$