

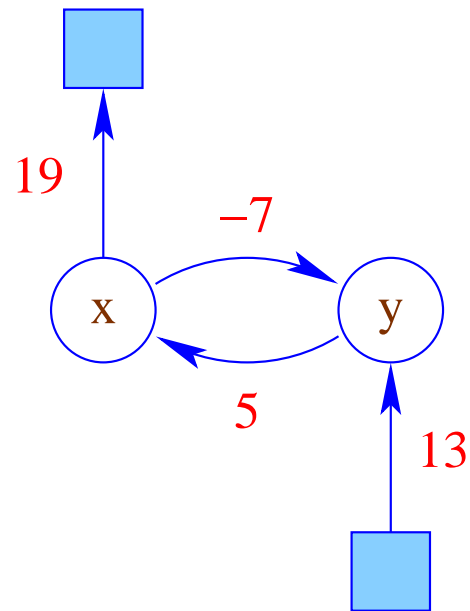
2. Ein polynomieller Spezialfall:

$$\begin{array}{rcl} & x & \geq y + 5 \\ 19 & \geq x & \\ & y & \geq 13 \\ & y & \geq x - 7 \end{array}$$

- Es gibt maximal zwei Variablen pro Un-Gleichung;
- keine Skalierungsfaktoren.

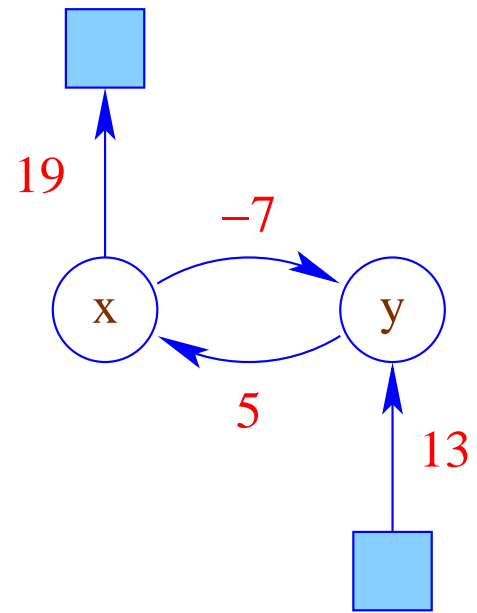
Idee:

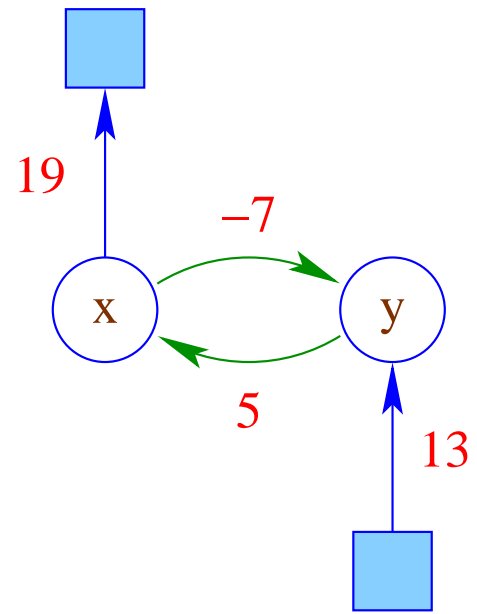
Representiere das System als Graph:

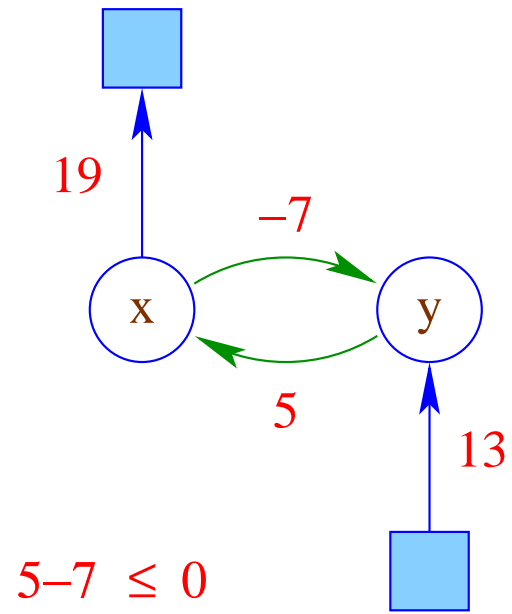


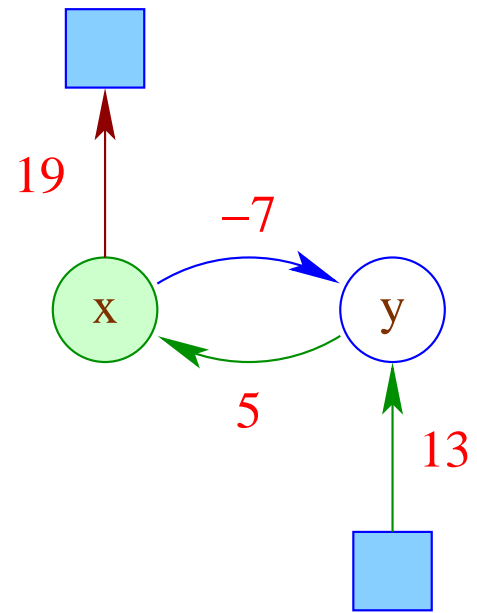
Die Ungleichungen sind **erfüllbar** genau dann wenn

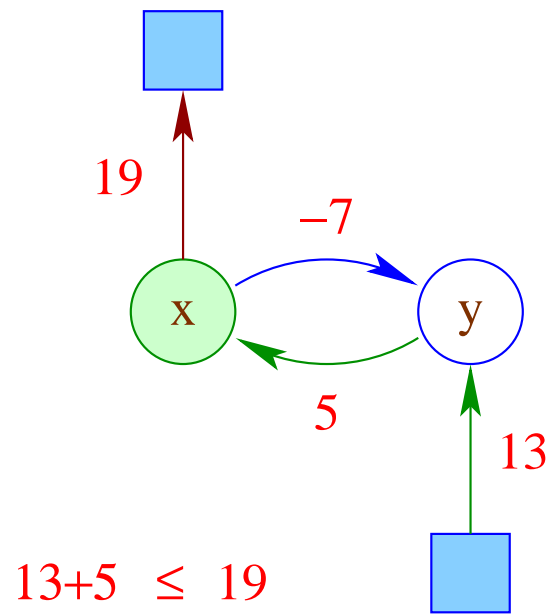
- die Gewichte jedes **Kreises** maximal ≤ 0 sind;
- die Gewichte, die x **erreichen**, maximal \leq der Gewichte sind, die x **verlassen**.











Die Ungleichungen sind **erfüllbar** genau dann wenn

- die Gewichte jedes **Kreises** maximal ≤ 0 sind;
- die Gewichte, die x **erreichen**, maximal \leq der Gewichte sind, die x **verlassen**.

reflexive und **transitive** Hülle der Kanten-Gewichte!

3. Ein allgemeines Lösungsverfahren:

Idee: **Fourier-Motzkin-Elimination**

- Beseitige sukzessive einzelne Variablen x !
- Alle Ungleichungen mit **positiven** Vorkommen von x liefern **untere Schranken**.
- Alle Ungleichungen mit **negativen** Vorkommen von x liefern **obere Schranken**.
- Alle unteren Schranken müssen kleiner oder gleich allen oberen Schranken sein ;-))



Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768–1830

Beispiel:

$$9 \leq 4x_1 + x_2 \quad (1)$$

$$4 \leq x_1 + 2x_2 \quad (2)$$

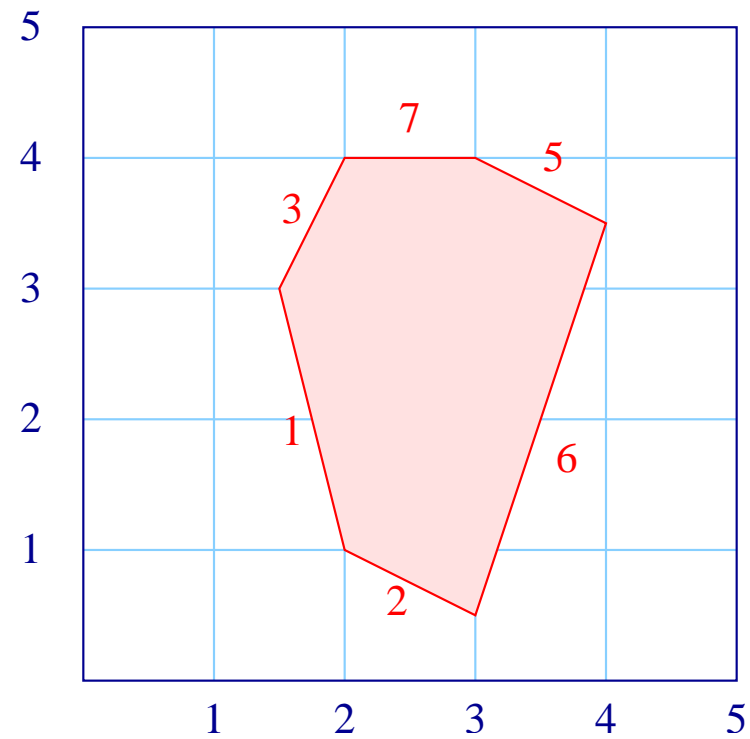
$$0 \leq 2x_1 - x_2 \quad (3)$$

$$6 \leq x_1 + 6x_2 \quad (4)$$

$$-11 \leq -x_1 - 2x_2 \quad (5)$$

$$-17 \leq -6x_1 + 2x_2 \quad (6)$$

$$-4 \leq -x_2 \quad (7)$$



Für x_1 finden wir:

$$9 \leq 4x_1 + x_2 \quad (1) \qquad \frac{9}{4} - \frac{1}{4}x_2 \leq x_1 \quad (1)$$

$$4 \leq x_1 + 2x_2 \quad (2) \qquad 4 - 2x_2 \leq x_1 \quad (2)$$

$$0 \leq 2x_1 - x_2 \quad (3) \qquad \frac{1}{2}x_2 \leq x_1 \quad (3)$$

$$6 \leq x_1 + 6x_2 \quad (4) \qquad 6 - 6x_2 \leq x_1 \quad (4)$$

$$-11 \leq -x_1 - 2x_2 \quad (5) \qquad x_1 \leq 11 - 2x_2 \quad (5)$$

$$-17 \leq -6x_1 + 2x_2 \quad (6) \qquad x_1 \leq \frac{17}{6} + \frac{1}{3}x_2 \quad (6)$$

$$-4 \leq -x_2 \quad (7) \qquad -4 \leq -x_2 \quad (7)$$

Wenn es ein solches x_1 gibt, müssen alle unteren Schranken kleiner gleich allen oberen sein, d.h.:

$$\frac{9}{4} - \frac{1}{4}x_2 \leq 11 - 2x_2 \quad (1, 5)$$

$$\frac{9}{4} - \frac{1}{4}x_2 \leq \frac{17}{6} + \frac{1}{3}x_2 \quad (1, 6)$$

$$4 - 2x_2 \leq 11 - 2x_2 \quad (2, 5)$$

$$4 - 2x_2 \leq \frac{17}{6} + \frac{1}{3}x_2 \quad (2, 6)$$

$$\frac{1}{2}x_2 \leq 11 - 2x_2 \quad (3, 5)$$

$$\frac{1}{2}x_2 \leq \frac{17}{6} + \frac{1}{3}x_2 \quad (3, 6)$$

$$6 - 6x_2 \leq 11 - 2x_2 \quad (4, 5)$$

$$6 - 6x_2 \leq \frac{17}{6} + \frac{1}{3}x_2 \quad (4, 6)$$

$$-4 \leq -x_2 \quad (7)$$

$$-35 \leq -7x_2 \quad (1, 5)$$

$$-\frac{7}{12} \leq \frac{7}{12}x_2 \quad (1, 6)$$

$$-7 \leq 0 \quad (2, 5)$$

$$\frac{7}{6} \leq \frac{7}{3}x_2 \quad (2, 6)$$

$$-22 \leq -5x_2 \quad (3, 5)$$

$$-\frac{17}{6} \leq -\frac{1}{6}x_2 \quad (3, 6)$$

$$-5 \leq 4x_2 \quad (4, 5)$$

$$\frac{19}{6} \leq \frac{19}{3}x_2 \quad (4, 6)$$

$$-4 \leq -x_2 \quad (7)$$

oder:

$\frac{9}{4} - \frac{1}{4}x_2 \leq 11 - 2x_2$	(1,5)			$-5 \leq -x_2$	(1,5)
$\frac{9}{4} - \frac{1}{4}x_2 \leq \frac{17}{6} + \frac{1}{3}x_2$	(1,6)			$-1 \leq x_2$	(1,6)
$4 - 2x_2 \leq 11 - 2x_2$	(2,5)			$-7 \leq 0$	(2,5)
$4 - 2x_2 \leq \frac{17}{6} + \frac{1}{3}x_2$	(2,6)			$\frac{1}{2} \leq x_2$	(2,6)
$\frac{1}{2}x_2 \leq 11 - 2x_2$	(3,5)	oder:		$-\frac{22}{5} \leq -x_2$	(3,5)
$\frac{1}{2}x_2 \leq \frac{17}{6} + \frac{1}{3}x_2$	(3,6)			$-17 \leq -x_2$	(3,6)
$6 - 6x_2 \leq 11 - 2x_2$	(4,5)			$-\frac{5}{4} \leq x_2$	(4,5)
$6 - 6x_2 \leq \frac{17}{6} + \frac{1}{3}x_2$	(4,6)			$\frac{1}{2} \leq x_2$	(4,6)
$-4 \leq -x_2$	(7)			$-4 \leq -x_2$	(7)

Das ist der **Ein-Variablen-Fall**, den wir exakt lösen können:

$$\max \left\{ -1, \frac{1}{2}, -\frac{5}{4}, \frac{1}{2} \right\} \leq x_2 \leq \min \left\{ 5, \frac{22}{5}, 17, 4 \right\}$$

Daraus können wir folgern: $x_2 \in \left[\frac{1}{2}, 4 \right]$:-)

Im Allgemeinen:

- Das ursprüngliche System hat eine Lösung in \mathbb{Q} , gdw. das System nach Eliminierung einer Variable eine Lösung in \mathbb{Q} besitzt :-)
- In jedem Eliminierungsschritt kann sich die Anzahl der Ungleichungen **quadrieren** \implies **exponentielle** Laufzeit :-((
- Es lässt sich so modifizieren, dass es Erfüllbarkeit über \mathbb{Z} entscheidet \implies **Omega-Test**



William Worthington Pugh, Jr.
University of Maryland, College Park

Idee:

- Wir beseitigen sukzessive die Variablen. Dabei müssen wir allerdings Divisionen vermeiden ...
- Hat x überall Koeffizienten ± 1 , machen wir Fourier-Motzkin-Elimination :-)
- Andernfalls stellen wir x auf einer Seite mit positivem Koeffizienten frei ...

Betrachten wir etwa (1) und (6) :

$$\begin{aligned}6 \cdot x_1 &\leq 17 + 2x_2 \\9 - x_2 &\leq 4 \cdot x_1\end{aligned}$$

E.O. können wir **echte** Ungleichungen betrachten:

$$\begin{aligned}6 \cdot x_1 &< 18 + 2x_2 \\8 - x_2 &< 4 \cdot x_1\end{aligned}$$

... und jeweils durch den ggT teilen:

$$\begin{aligned}3 \cdot x_1 &< 9 + x_2 \\8 - x_2 &< 4 \cdot x_1\end{aligned}$$

Das impliziert:

$$3 \cdot (8 - x_2) < 4 \cdot (9 + x_2)$$

Offenbar gilt:

- Ist die abgeleitete Ungleichung **unerfüllbar**, dann das ganze System :-)
- Sind alle so abgeleiteten Ungleichungen erfüllbar, gibt es eine Lösung, die aber möglicherweise **nicht ganzzahlig** ist :-(
- Es gibt aber eine ganzzahlige Lösung, sofern zwischen unterer und oberer Schranke stets **genug Platz** ist, so dass ein Integer dazwischen passt.
- Sei $\alpha < a \cdot x$ $b \cdot x < \beta$.

Dann muss nicht nur gelten:

$$b \cdot \alpha < a \cdot \beta$$

sondern sogar

$$\boxed{a \cdot b} < a \cdot \beta - b \cdot \alpha$$

... im Beispiel:

$$12 < 4 \cdot (9 + x_2) - 3 \cdot (8 - x_2)$$

oder:

$$12 < 12 + 7x_2$$

bzw:

$$0 < x_2$$

Im Beispiel lassen sich auch diese **verschärften** Ungleichungen erfüllen

\implies das System hat über \mathbb{Z} eine Lösung :-)

Überlegung:

- Sind die verschärften Ungleichungen erfüllbar, dann auch das ursprüngliche System. Die Umkehrung gilt i.A. nicht :-)
- In dem Fall ist bei einem Paar Ungleichungen **weniger Platz**:

$$a \cdot \beta \leq b \cdot \alpha + \boxed{a \cdot b}$$

oder:

$$b \cdot \alpha < ab \cdot x < b \cdot \alpha + \boxed{a \cdot b}$$

Kürzen durch b liefert:

$$\alpha < a \cdot x < \alpha + \boxed{a}$$

$$\implies \boxed{\alpha + i = a \cdot x} \text{ für ein } i \in \{1, \dots, a - 1\} \quad !!!$$

Diskussion:

- Fourier-Motzkin-Elimination ist **nicht** das beste Verfahren für rationale Ungleichungssysteme.
- Der **Omega-Test** ist notwendig exponentiell :-)
Wenn das System **lösbar** ist, terminiert der Test i.a. schnell.
Mit **unlösbar**en Systemen tut er sich schwerer :-)
- Auch für ILP gibt es andere/intelligentere Verfahren ...
- Für Probleme bei Programmiersprachen funktioniert er wohl ganz gut :-)

4. Verallgemeinerung zu einer Logik

Disjunktion:

$$\begin{aligned} & (x - 2y = 15 \quad \wedge \quad x + y = 7) \quad \vee \\ & (x + y = 6 \quad \wedge \quad 3x + z = -8) \end{aligned}$$

Quantoren:

$$\exists x : z - 2x = 42 \quad \wedge \quad z + x = 19$$

4. Verallgemeinerung zu einer Logik

Disjunktion:

$$\begin{aligned} & (x - 2y = 15 \quad \wedge \quad x + y = 7) \quad \vee \\ & (x + y = 6 \quad \wedge \quad 3x + z = -8) \end{aligned}$$

Quantoren:

$$\exists x : z - 2x = 42 \quad \wedge \quad z + x = 19$$



Presburger Arithmetik



Mojzesz Presburger, 1904–1943 (?)

Presburger Arithmetik \equiv normale Arithmetik
ohne Multiplikation

Presburger Arithmetik \equiv normale Arithmetik
ohne Multiplikation

Arithmetik : hochgradig unentscheidbar :-(
sogar sogar unvollständig :-((

Presburger Arithmetik = normale Arithmetik
ohne Multiplikation

Arithmetik : hochgradig unentscheidbar :-(
sogar sogar unvollständig :-((

⇒⇒ Hilberts 10tes Problem

⇒⇒ Gödels Theorem

Presburger Formeln:

$$\begin{aligned} \phi & ::= x + y = z \quad | \quad x = n \quad | \\ & \quad \phi_1 \wedge \phi_2 \quad | \quad \neg \phi \quad | \\ & \quad \exists x : \phi \end{aligned}$$

Presburger Formeln:

$$\begin{aligned} \phi \quad ::= & \quad x + y = z \quad | \quad x = n \quad | \\ & \quad \phi_1 \wedge \phi_2 \quad | \quad \neg \phi \quad | \\ & \quad \exists x : \phi \end{aligned}$$

Ziel: **PSAT**

Finde Werte in \mathbb{N} für die **freien Variablen**, so dass ϕ gilt ...

Idee: Codiere die Werte der Variablen als **Worte** :-)

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0

Idee: Codiere die Werte der Variablen als **Worte** :-)

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0

Idee: Codiere die Werte der Variablen als **Worte** :-)

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0

Idee: Codiere die Werte der Variablen als **Worte** :-)

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0

Idee: Codiere die Werte der Variablen als **Worte** :-)

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0

Idee: Codiere die Werte der Variablen als **Worte** :-)

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0

Idee: Codiere die Werte der Variablen als **Worte** :-)

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0

Idee: Codiere die Werte der Variablen als **Worte** :-)

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0

Idee: Codiere die Werte der Variablen als **Worte** :-)

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0

Idee: Codiere die Werte der Variablen als **Worte** :-)

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0

Beobachtung:

Die Menge der erfüllenden Variablenbelegungen ist regulär :-))

Beobachtung:

Die Menge der erfüllenden Variablenbelegungen ist **regulär** :-))

$\phi_1 \wedge \phi_2$	\implies	$\mathcal{L}(\phi_1) \cap \mathcal{L}(\phi_2)$	(Durchschnitt)
$\neg\phi$	\implies	$\overline{\mathcal{L}(\phi)}$	(Komplement)
$\exists x : \phi$	\implies	$\pi_x(\mathcal{L}(\phi))$	(Projektion)

Weg-Projizierung der x -Komponente:

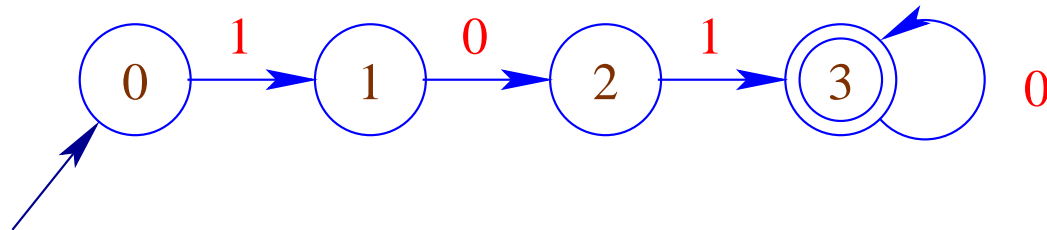
213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0

Weg-Projizierung der x -Komponente:

213	<i>t</i>	1	0	1	0	1	0	1	1
42	<i>z</i>	0	1	0	1	0	1	0	0
89	<i>y</i>	1	0	0	1	1	0	1	0

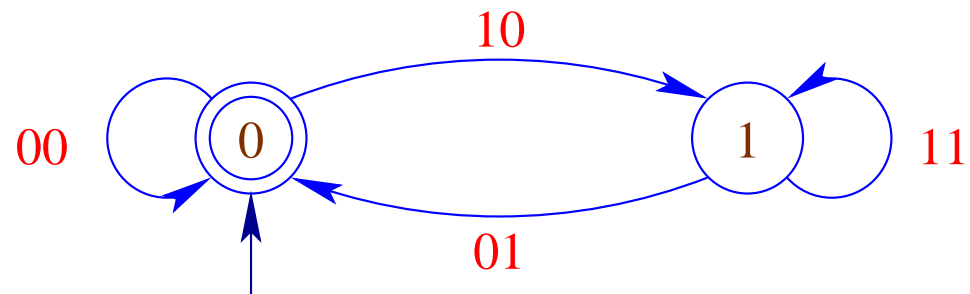
Automaten für Basis-Prädikate:

$$x = 5$$



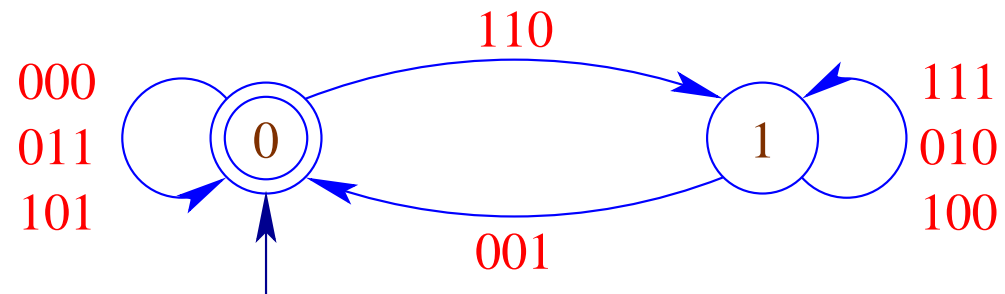
Automaten für Basis-Prädikate:

$$x+x = y$$



Automaten für Basis-Prädikate:

$$x+y = z$$



Ergebnisse:

Ferrante, Rackoff, 1973 : $\text{PSAT} \leq \text{DSPACE}(2^{2^{c \cdot n}})$

Ergebnisse:

Ferrante, Rackoff, 1973 : $\text{PSAT} \leq \text{DSPACE}(2^{2^{c \cdot n}})$

Fischer, Rabin, 1974 : $\text{PSAT} \geq \text{NTIME}(2^{2^{c \cdot n}})$