Beobachtung 3:

Jede (lösbare) Gleichung kann so massiert werden, dass sie eine Variable mit Koeffizient ± 1 besitzt :-)

Beobachtung 3:

Jede (lösbare) Gleichung kann so massiert werden, dass sie eine Variable mit Koeffizient ± 1 besitzt :-)

... mithilfe von uni-modularen Variablentransformationen :-))

Nehmen wir an, die Gleichung enthalte $a_1x_1 + a_2x_2$ mit

$$\text{ggT}\{a_1, a_2\} = p$$

Idee:

Ersetze x_1, x_2 durch zwei neue Variablen t_1, t_2 so dass zum Einen gilt:

$$\begin{array}{rcccc} pt_1 & = & a_1x_1 & + & a_2x_2 \\ t_2 & = & b_1x_1 & + & b_2x_2 \end{array}$$

für geeignete b_1, b_2 ...

Nehmen wir an, die Gleichung enthalte $a_1 x_1 + a_2 x_2$ mit

$$\text{ggT}\{a_1, a_2\} = p$$

Idee:

Ersetze x_1, x_2 durch zwei neue Variablen t_1, t_2 so dass zum Einen gilt:

$$\begin{array}{rcrcr} pt_1 & = & a_1 x_1 & + & a_2 x_2 \\ t_2 & = & b_1 x_2 & + & b_2 x_2 \end{array}$$

für geeignete b_1, b_2 ... und zum Anderen,

alle Lösungen für t_1, t_2 auch Lösungen für x_1, x_2 ergeben :-)

$\Longrightarrow$ Die inverse Matrix der Transformation:

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{p} & \frac{a_2}{p} \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

sollte ganzzahlige Koeffizienten haben.

$\Longrightarrow$ Die inverse Matrix der Transformation:

$$\begin{pmatrix} \frac{a_1}{p} & \frac{a_2}{p} \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

sollte ganzzahlige Koeffizienten haben.

Dies ist der Fall, wenn

$$\frac{a_1}{p}b_2 - \frac{a_2}{p}b_1 \quad = \quad \pm 1$$

Da a_1, a_2 den ggT p haben,
findet Euclid's Algo λ_1, λ_2 mit:

$$a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 = p$$

Da a_1, a_2 den ggT p haben,
findet Euclid's Algo λ_1, λ_2 mit:

$$a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 \quad = \quad p$$

$\Longrightarrow$

Wähle: $b_1 = -\lambda_2 \qquad b_2 = \lambda_1.$

Da a_1, a_2 den ggT p haben,
findet Euclid's Algo λ_1, λ_2 mit:

$$a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 = p$$

$\Longrightarrow$

Wähle: $b_1 = -\lambda_2 \qquad b_2 = \lambda_1.$

Dann:

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda_1 t_1 - \tfrac{a_2}{p} t_2 \\ x_2 &= \lambda_2 t_1 + \tfrac{a_1}{p} t_2 \end{aligned}$$

Beispiel:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ -4x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & -1 \end{array}$$

Beispiel:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ -4x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & -1 \end{array}$$

Beispiel:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ -4x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & -1 \end{array}$$

Euclid: $\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -1$

Beispiel:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ -4x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & -1 \end{array}$$

Euclid: $\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -1$

$\Longrightarrow$

$$\begin{array}{rcrcr} x_1 & = & -t_1 & - & 3t_2 \\ x_2 & = & -t_1 & - & 4t_2 \end{array}$$

Ersetzen vom x_1, x_2 mit t_1, t_2 liefert:

$$\begin{array}{rcrcrcr} -7t_1 & - & 26t_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ t_1 & & & - & 2x_3 & = & -1 \end{array}$$

... und wir haben eine Variable beseitigt :-)

Lösen über $\mathbb{N}$

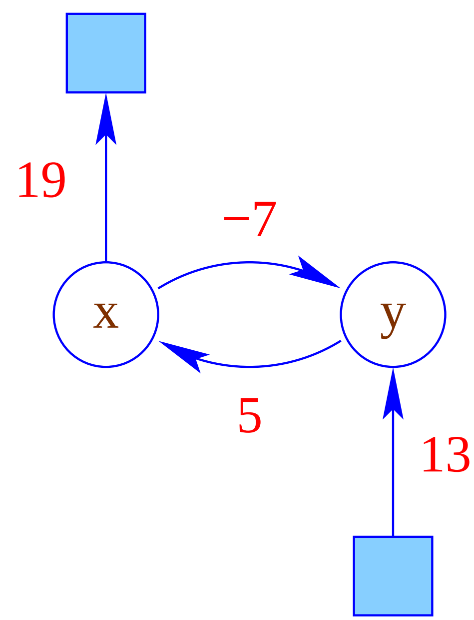
- ... ist von großer praktischer Bedeutung;
- ... hat zur Entwicklung vieler neuer Techniken geführt;
- ... erlaubt leicht die Kodierung NP-schwieriger Probleme;
- ... bleibt schwierig, sogar wenn nur drei Variablen pro Gleichung erlaubt sind.

2. Ein polynomieller Spezialfall:

$$\begin{array}{rcl} & x & \geq & y + 5 \\ 19 & \geq & x & \\ & y & \geq & 13 \\ & y & \geq & x - 7 \end{array}$$

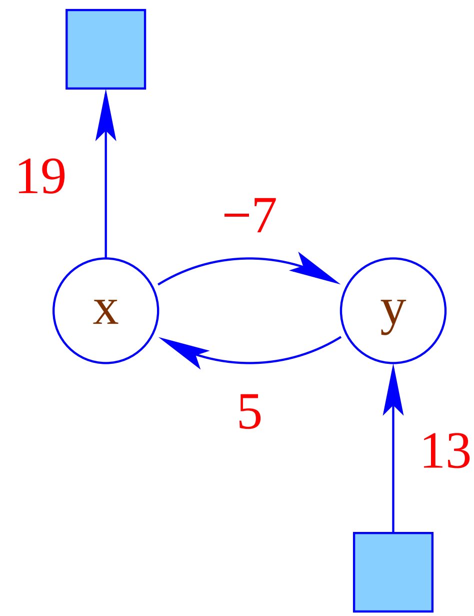
- Es gibt maximal zwei Variablen pro Un-Gleichung;
- keine Skalierungsfaktoren.

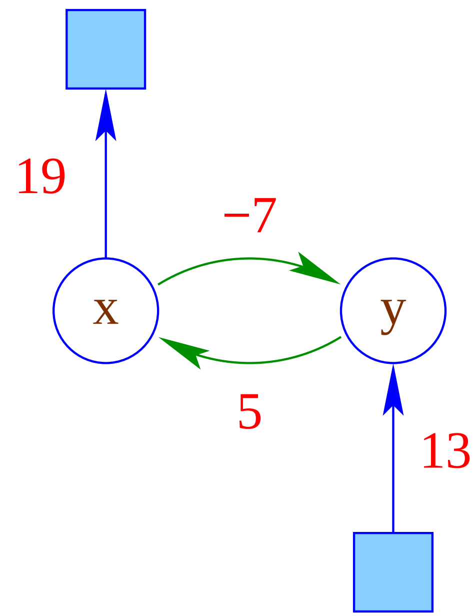
Idee: Representiere das System als Graph:



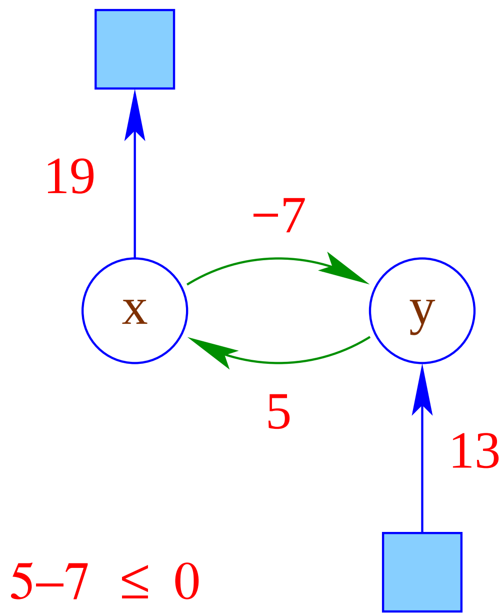
Die Ungleichungen sind erfüllbar genau dann wenn

- die Gewichte jedes Kreises maximal ≤ 0 sind;
- die Gewichte, die x erreichen, maximal $\leq$ der Gewichte sind, die x verlassen.

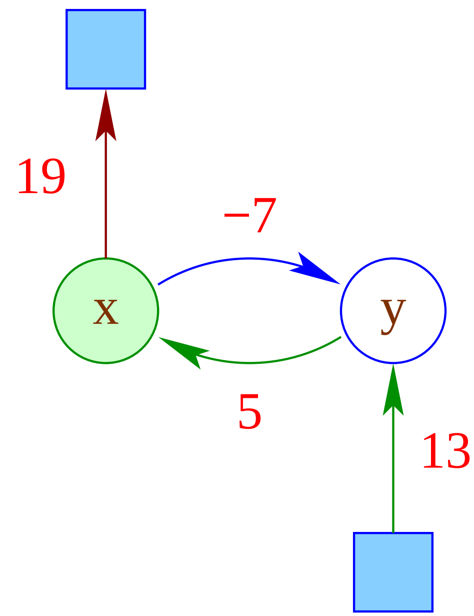

19
−7
x
y
5
13

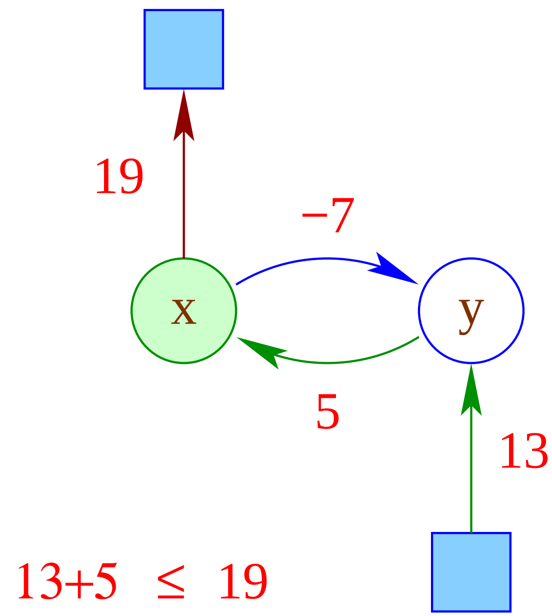


19
−7
x
y
5
13



19
−7
x
y
5
13
5−7 ≤ 0


19
−7
x
y
5
13



19
−7
x
y
5
13
13+5 ≤ 19

Die Ungleichungen sind erfüllbar genau dann wenn

- die Gewichte jedes Kreises maximal ≤ 0 sind;
- die Gewichte, die x erreichen, maximal $\leq$ der Gewichte sind, die x verlassen.

reflexive und transitive Hülle der Kanten-Gewichte!

3. Ein allgemeines Lösungsverfahren:

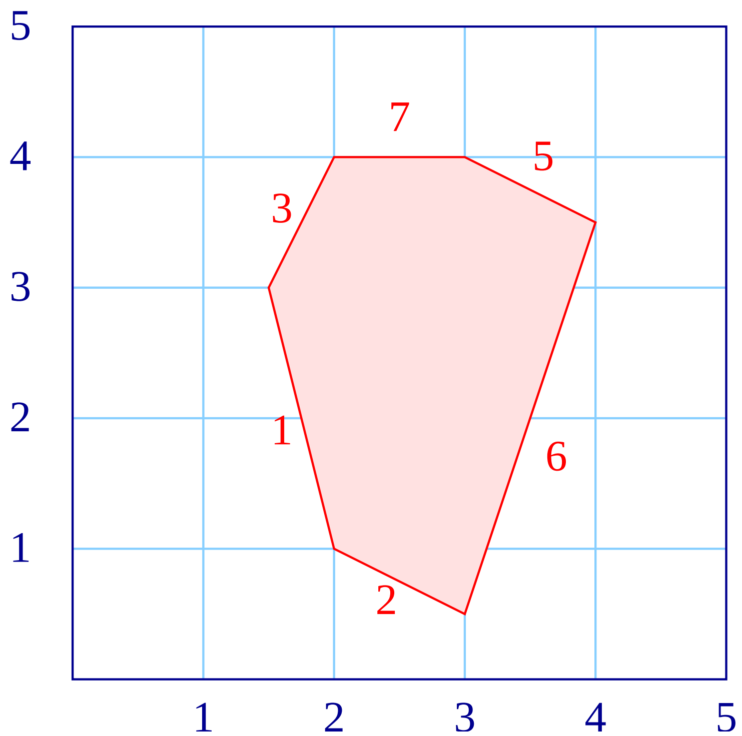
Idee: Fourier-Motzkin-Elimination

- Beseitige sukzessive einzelne Variablen x !
- Alle Ungleichungen mit positiven Vorkommen von x liefern untere Schranken.
- Alle Ungleichungen mit negativen Vorkommen von x liefern obere Schranken.
- Alle unteren Schranken müssen kleiner oder gleich allen oberen Schranken sein ;-))

Jean Baptiste Joseph Fourier, 1768–1830

Beispiel:

$$
\begin{array}{rcll}
9 & \leq & 4x_1 + x_2 & (1) \\
4 & \leq & x_1 + 2x_2 & (2) \\
0 & \leq & 2x_1 - x_2 & (3) \\
6 & \leq & x_1 + 6x_2 & (4) \\
-11 & \leq & -x_1 - 2x_2 & (5) \\
-17 & \leq & -6x_1 + 2x_2 & (6) \\
-4 & \leq & -x_2 & (7)
\end{array}
$$



Für x_1 finden wir:

$$\begin{array}{rcll} 9 & \leq & 4x_1 + x_2 & (1) \\ 4 & \leq & x_1 + 2x_2 & (2) \\ 0 & \leq & 2x_1 - x_2 & (3) \\ 6 & \leq & x_1 + 6x_2 & (4) \\ -11 & \leq & -x_1 - 2x_2 & (5) \\ -17 & \leq & -6x_1 + 2x_2 & (6) \\ -4 & \leq & -x_2 & (7) \end{array}$$

$$\begin{array}{lcll} \frac{9}{4} - \frac{1}{4}x_2 & \leq & x_1 & (1) \\ 4 - 2x_2 & \leq & x_1 & (2) \\ \frac{1}{2}x_2 & \leq & x_1 & (3) \\ 6 - 6x_2 & \leq & x_1 & (4) \\ x_1 & \leq & 11 - 2x_2 & (5) \\ x_1 & \leq & \frac{17}{6} + \frac{1}{3}x_2 & (6) \\ -4 & \leq & -x_2 & (7) \end{array}$$

Wenn es ein solches x_1 gibt, müssen alle unteren Schranken kleiner gleich allen oberen sein, d.h.:

$$
\begin{array}{rcll}
\frac{9}{4}-\frac{1}{4}x_2 & \leq & 11-2x_2 & (1,5) \\
\frac{9}{4}-\frac{1}{4}x_2 & \leq & \frac{17}{6}+\frac{1}{3}x_2 & (1,6) \\
4-2x_2 & \leq & 11-2x_2 & (2,5) \\
4-2x_2 & \leq & \frac{17}{6}+\frac{1}{3}x_2 & (2,6) \\
\frac{1}{2}x_2 & \leq & 11-2x_2 & (3,5) \\
\frac{1}{2}x_2 & \leq & \frac{17}{6}+\frac{1}{3}x_2 & (3,6) \\
6-6x_2 & \leq & 11-2x_2 & (4,5) \\
6-6x_2 & \leq & \frac{17}{6}+\frac{1}{3}x_2 & (4,6) \\
-4 & \leq & -x_2 & (7)
\end{array}
$$

oder:

$$
\begin{array}{rcll}
-35 & \leq & -7x_2 & (1,5) \\
-\frac{7}{12} & \leq & \frac{7}{12}x_2 & (1,6) \\
-7 & \leq & 0 & (2,5) \\
\frac{7}{6} & \leq & \frac{7}{3}x_2 & (2,6) \\
-22 & \leq & -5x_2 & (3,5) \\
-\frac{17}{6} & \leq & -\frac{1}{6}x_2 & (3,6) \\
-5 & \leq & 4x_2 & (4,5) \\
\frac{19}{6} & \leq & \frac{19}{3}x_2 & (4,6) \\
-4 & \leq & -x_2 & (7)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rcll}
\frac{9}{4} - \frac{1}{4}x_2 & \leq & 11 - 2x_2 & (1,5) \\
\frac{9}{4} - \frac{1}{4}x_2 & \leq & \frac{17}{6} + \frac{1}{3}x_2 & (1,6) \\
4 - 2x_2 & \leq & 11 - 2x_2 & (2,5) \\
4 - 2x_2 & \leq & \frac{17}{6} + \frac{1}{3}x_2 & (2,6) \\
\frac{1}{2}x_2 & \leq & 11 - 2x_2 & (3,5) \\
\frac{1}{2}x_2 & \leq & \frac{17}{6} + \frac{1}{3}x_2 & (3,6) \\
6 - 6x_2 & \leq & 11 - 2x_2 & (4,5) \\
6 - 6x_2 & \leq & \frac{17}{6} + \frac{1}{3}x_2 & (4,6) \\
-4 & \leq & -x_2 & (7)
\end{array}
\quad \text{oder:} \quad
\begin{array}{rcll}
-5 & \leq & -x_2 & (1,5) \\
-1 & \leq & x_2 & (1,6) \\
-7 & \leq & 0 & (2,5) \\
\frac{1}{2} & \leq & x_2 & (2,6) \\
-\frac{22}{5} & \leq & -x_2 & (3,5) \\
-17 & \leq & -x_2 & (3,6) \\
-\frac{5}{4} & \leq & x_2 & (4,5) \\
\frac{1}{2} & \leq & x_2 & (4,6) \\
-4 & \leq & -x_2 & (7)
\end{array}
$$

Das ist der Ein-Variablen-Fall, den wir exakt lösen können:

$$\max\left\{-1, \boxed{\tfrac{1}{2}}, -\tfrac{5}{4}, \tfrac{1}{2}\right\} \quad \leq \quad x_2 \quad \leq \quad \min\left\{5, \tfrac{22}{5}, 17, \boxed{4}\right\}$$

Daraus können wir folgern: $\qquad x_2 \in [\frac{1}{2}, 4] \qquad$:-)

Im Allgemeinen:

- Das ursprüngliche System hat eine Lösung in $\mathbb{Q}$, gdw. das System nach Eliminierung einer Variable eine Lösung in $\mathbb{Q}$ besitzt :-)
- In jedem Eliminierungsschritt kann sich die Anzahl der Ungleichungen quadrieren $\implies$ exponentielle Laufzeit :-((
- Es lässt sich so modifizieren, dass es Erfüllbarkeit über $\mathbb{Z}$ entscheidet $\implies$ Omega-Test

William Worthington Pugh, Jr.
University of Maryland, College Park

Idee:

- Wir beseitigen sukzessive die Variablen. Dabei müssen wir allerdings Divisionen vermeiden ...
- Hat x überall Koeffizienten ± 1, machen wir Fourier-Motzkin-Elimination :-)
- Andernfalls stellen wir x auf einer Seite mit positivem Koeffizienten frei ...

Betrachten wir etwa (1) und (6) :

$$\begin{array}{rcl} 6 \cdot x_1 & \leq & 17 + 2x_2 \\ 9 - x_2 & \leq & 4 \cdot x_1 \end{array}$$

E.O. können wir echte Ungleichungen betrachten:

$$\begin{aligned} 6 \cdot x_1 &< 18 + 2x_2 \\ 8 - x_2 &< 4 \cdot x_1 \end{aligned}$$

... und jeweils durch den ggT teilen:

$$\begin{aligned} 3 \cdot x_1 &< 9 + x_2 \\ 8 - x_2 &< 4 \cdot x_1 \end{aligned}$$

Das impliziert:

$$3 \cdot (8 - x_2) < 4 \cdot (9 + x_2)$$

Offenbar gilt:

- Ist die abgeleitete Ungleichung unerfüllbar, dann das ganze System :-)
- Sind alle so abgeleiteten Ungleichungen erfüllbar, gibt es eine Lösung, die aber möglicherweise nicht ganzzahlig ist :-(
- Es gibt aber eine ganzzahlige Lösung, sofern zwischen unterer und oberer Schranke stets genug Platz ist, so dass ein Integer dazwischen passt.
- Sei $\alpha < a \cdot x \qquad\qquad b \cdot x < \beta$.

  Dann muss nicht nur gelten:

  $$b \cdot \alpha < a \cdot \beta$$

  sondern sogar

  $$\boxed{a \cdot b} < a \cdot \beta - b \cdot \alpha$$

... im Beispiel:

$$12 \quad < \quad 4 \cdot (9 + x_2) - 3 \cdot (8 - x_2)$$

oder:

$$12 \quad < \quad 12 + 7x_2$$

bzw:

$$0 \quad < \quad x_2$$

Im Beispiel lassen sich auch diese verschärften Ungleichungen erfüllen

$\Longrightarrow$ das System hat über $\mathbb{Z}$ eine Lösung :-)

Überlegung:

- Sind die verschärften Ungleichungen erfüllbar, dann auch das ursprüngliche System. Die Umkehrung gilt i.A. nicht :-(
- In dem Fall ist bei einem Paar Ungleichungen weniger Platz:

$$a \cdot \beta \leq b \cdot \alpha + \boxed{a \cdot b}$$

oder:

$$b \cdot \alpha < ab \cdot x < b \cdot \alpha + \boxed{a \cdot b}$$

Kürzen durch b liefert:

$$\alpha < a \cdot x < \alpha + \boxed{a}$$

$\Longrightarrow$ $\boxed{\alpha + i = a \cdot x}$ für ein $i \in \{1, \ldots, a-1\}$!!!

Diskussion:

→ Fourier-Motzkin-Elimination ist nicht das beste Verfahren für rationale Ungleichungssysteme.

→ Der Omega-Test ist notwendig exponentiell :-)

Wenn das System lösbar ist, terminiert der Test i.a. schnell.

Mit unlösbaren Systemen tut er sich schwerer :-(

→ Auch für ILP gibt es andere/intelligentere Verfahren ...

→ Für Probleme bei Programmiersprachen funktioniert er wohl ganz gut :-)

4. Verallgemeinerung zu einer Logik

Disjunktion:

$$
\begin{array}{llll}
(x - 2y = 15 & \wedge & x + y = 7) & \vee \\
(x + y = 6 & \wedge & 3x + z = -8) &
\end{array}
$$

Quantoren:

$$\exists\, x : \quad z - 2x = 42 \quad \wedge \quad z + x = 19$$

4. Verallgemeinerung zu einer Logik

Disjunktion:

$$\begin{array}{llll} (x - 2y = 15 & \wedge & x + y = 7) & \vee \\ (x + y = 6 & \wedge & 3x + z = -8) & \end{array}$$

Quantoren:

$$\exists\, x : \quad z - 2x = 42 \quad \wedge \quad z + x = 19$$

$\Longrightarrow$ Presburger Arithmetik

Mojzesz Presburger, 1904–1943 (?)

Presburger Arithmetik $=$ normale Arithmetik ohne Multiplikation

Presburger Arithmetik $\Longrightarrow$ normale Arithmetik
ohne Multiplikation

Arithmetik : hochgradig unentscheidbar :-(
sogar sogar unvollständig :-((

Presburger Arithmetik $\quad == \quad$ normale Arithmetik
ohne Multiplikation

Arithmetik $\quad : \quad$ hochgradig unentscheidbar :-(
sogar sogar unvollständig :-((

$\Longrightarrow$ Hilberts 10tes Problem

$\Longrightarrow$ Gödels Theorem

Presburger Formeln:

$$\begin{array}{lll} \phi & ::= & x + y = z \quad | \quad x = n \quad | \\ & & \phi_1 \wedge \phi_2 \quad | \quad \neg\phi \quad | \\ & & \exists\, x : \ \phi \end{array}$$

Presburger Formeln:

$$\begin{array}{lll} \phi & ::= & x + y = z \quad | \quad x = n \quad | \\ & & \phi_1 \wedge \phi_2 \quad | \quad \neg\phi \quad | \\ & & \exists\, x : \quad \phi \end{array}$$

Ziel: PSAT

Finde Werte in $\mathbb{N}$ für die freien Variablen, so dass ϕ gilt ...

Idee: Codiere die Werte der Variablen als Worte :-)

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0

Idee: Codiere die Werte der Variablen als Worte :-)

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0

Idee: Codiere die Werte der Variablen als Worte :-)

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0

Idee: Codiere die Werte der Variablen als Worte :-)

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0

Idee: Codiere die Werte der Variablen als Worte :-)

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0

Idee: Codiere die Werte der Variablen als Worte :-)

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0

Idee: Codiere die Werte der Variablen als Worte :-)

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0

Idee: Codiere die Werte der Variablen als Worte :-)

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0

Idee: Codiere die Werte der Variablen als Worte :-)

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0

Idee: Codiere die Werte der Variablen als Worte :-)

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0

Beobachtung:

Die Menge der erfüllenden Variablenbelegungen ist regulär :-))

Beobachtung:

Die Menge der erfüllenden Variablenbelegungen ist regulär :-))

$$\begin{array}{llll} \phi_1 \wedge \phi_2 & \Longrightarrow & \mathcal{L}(\phi_1) \cap \mathcal{L}(\phi_2) & (\text{Durchschnitt}) \\ \neg\phi & \Longrightarrow & \overline{\mathcal{L}(\phi)} & (\text{Komplement}) \\ \exists\, x : \quad \phi & \Longrightarrow & \pi_x(\mathcal{L}(\phi)) & (\text{Projektion}) \end{array}$$

Weg-Projizierung der x-Komponente:

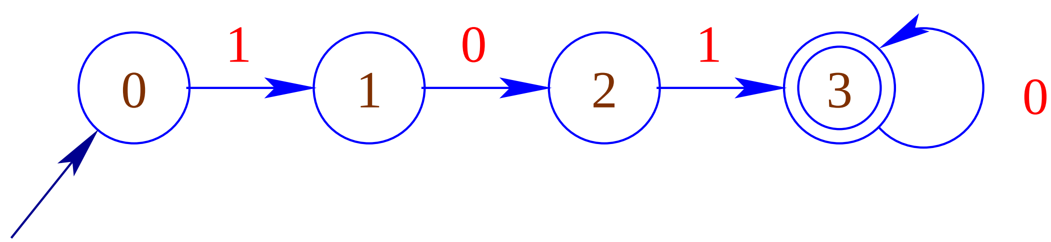
213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0
17	x	1	0	0	0	1	0	0	0

Weg-Projizierung der x-Komponente:

213	t	1	0	1	0	1	0	1	1
42	z	0	1	0	1	0	1	0	0
89	y	1	0	0	1	1	0	1	0

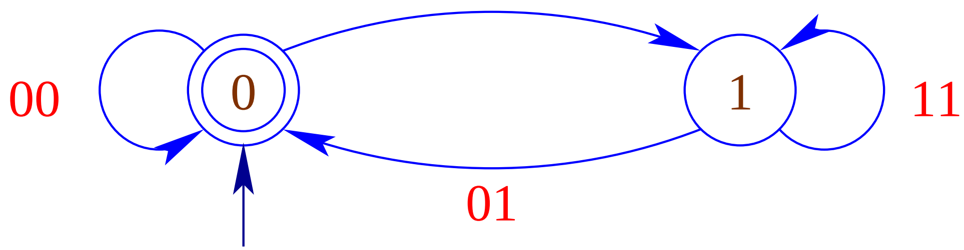
Automaten für Basis-Prädikate:

$x = 5$



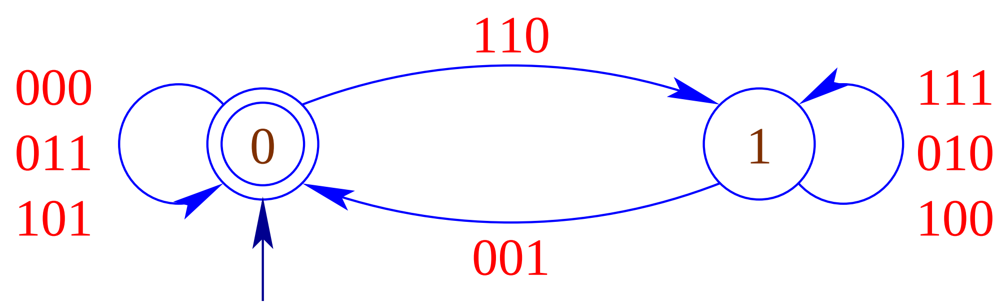
Automaten für Basis-Prädikate:

$x+x = y$



Automaten für Basis-Prädikate:

$x+y = z$



Ergebnisse:

Ferrante, Rackoff,1973 : $\text{PSAT} \leq \text{DSPACE}(2^{2^{c \cdot n}})$

Ergebnisse:

Ferrante, Rackoff,1973 : $\mathrm{PSAT} \leq \mathrm{DSPACE}(2^{2^{c \cdot n}})$

Fischer, Rabin,1974 : $\mathrm{PSAT} \geq \mathrm{NTIME}(2^{2^{c \cdot n}})$