Es gilt:

**Satz:**

In jedem vollständigen Verband $\mathbb{D}$ besitzt jede Teilmenge $X \subseteq \mathbb{D}$ eine größte untere Schranke $\bigsqcap X$.

Es gilt:

**Satz:**

In jedem vollständigen Verband $\mathbb{D}$ besitzt jede Teilmenge $X \subseteq \mathbb{D}$ eine größte untere Schranke $\bigsqcap X$.

**Beweis:**

Konstruiere $U = \{u \in \mathbb{D} \mid \forall\, x \in X : \; u \sqsubseteq x\}$.

// die Menge der unteren Schranken von $X$ :-)

Es gilt:

## Satz:

In jedem vollständigen Verband $\mathbb{D}$ besitzt jede Teilmenge $X \subseteq \mathbb{D}$ eine größte untere Schranke $\bigsqcap X$.

## Beweis:

Konstruiere $U = \{u \in \mathbb{D} \mid \forall\, x \in X : \; u \sqsubseteq x\}$.

// die Menge der unteren Schranken von $X$ :-)

Setze: $g := \bigsqcup U$

Behauptung: $g = \bigsqcap X$

(1) $g$ ist eine untere Schranke von $X$ :

Für $x \in X$ gilt:

$$u \sqsubseteq x \text{ für alle } u \in U$$

$$\Longrightarrow \quad x \text{ ist obere Schranke von } U$$

$$\Longrightarrow \quad g \sqsubseteq x$$ :-)

(1) $g$ ist eine untere Schranke von $X$ :

Für $x \in X$ gilt:

$$u \sqsubseteq x \text{ für alle } u \in U$$

$$\Longrightarrow \quad x \text{ ist obere Schranke von } U$$

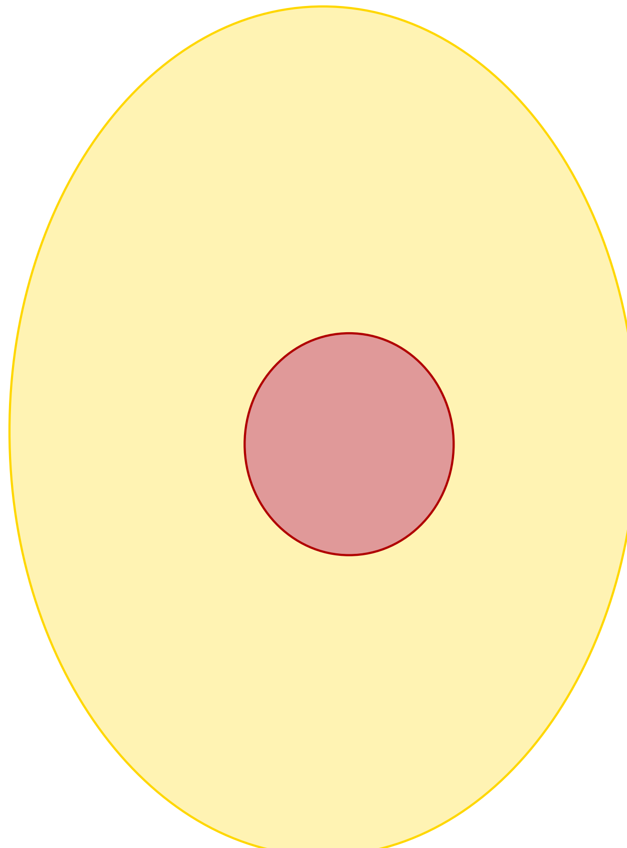
$$\Longrightarrow \quad g \sqsubseteq x \qquad \text{:-)}$$

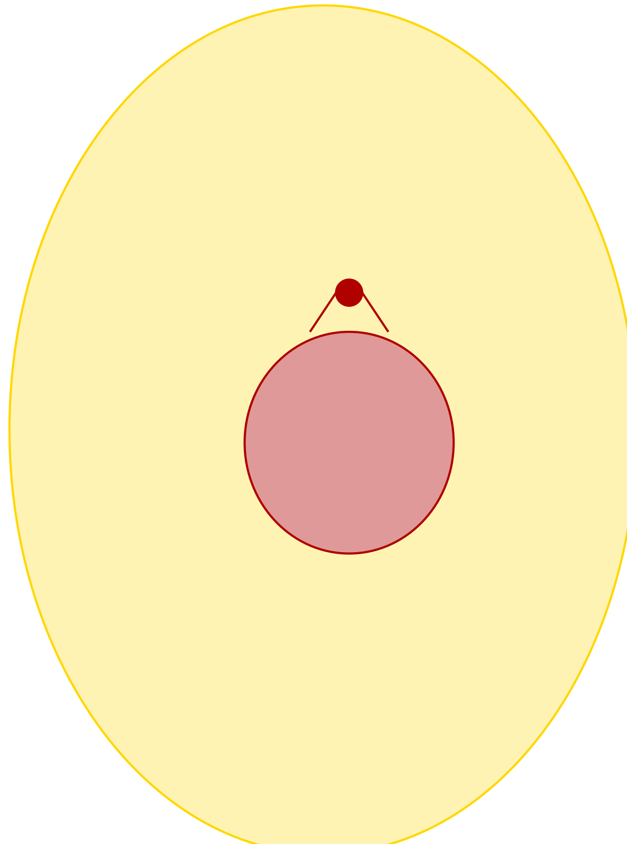
(2) $g$ ist größte untere Schranke von $X$ :

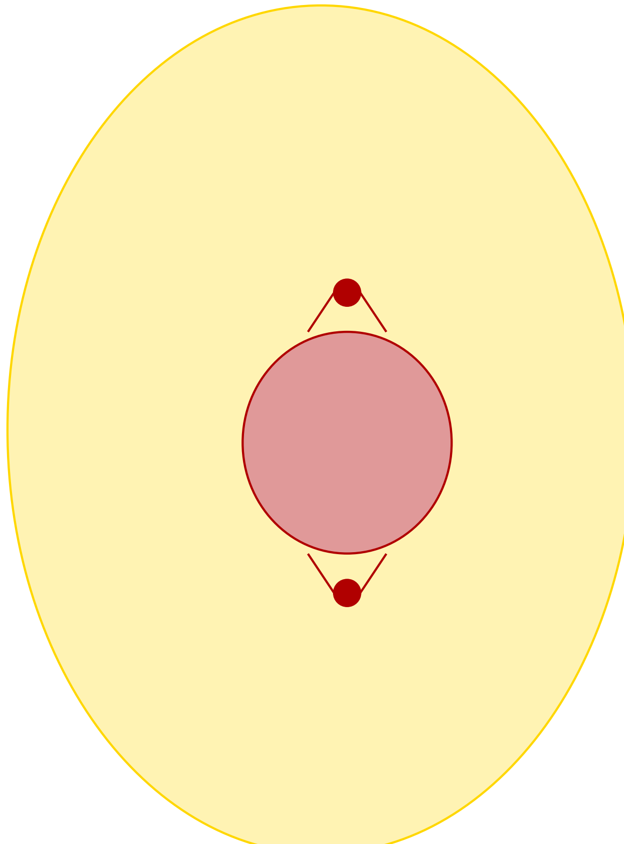
Für jede untere Schranke $u$ von $X$ gilt:

$$u \in U$$

$$\Longrightarrow \quad u \sqsubseteq g \qquad \text{:-))}$$







Wir suchen Lösungen für Constraint-Systeme der Form:

$$x_i \quad \sqsupseteq \quad f_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (*)$$

Wir suchen Lösungen für Constraint-Systeme der Form:

$$x_i \quad \sqsupseteq \quad f_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad\qquad (*)$$

wobei:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_i$ | Unbekannte | hier: | $\mathcal{A}[u]$ |
| $\mathbb{D}$ | Werte | hier: | $2^{Expr}$ |
| $\sqsubseteq \quad \subseteq \quad \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ | Ordnungsrelation | hier: | $\supseteq$ |
| $f_i\colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$ | Bedingung | hier: | ... |

Wir suchen Lösungen für Constraint-Systeme der Form:

$$x_i \quad \sqsupseteq \quad f_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad\qquad (*)$$

wobei:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_i$ | Unbekannte | hier: | $\mathcal{A}[u]$ |
| $\mathbb{D}$ | Werte | hier: | $2^{Expr}$ |
| $\sqsubseteq \quad \subseteq \quad \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ | Ordnungsrelation | hier: | $\supseteq$ |
| $f_i \colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$ | Bedingung | hier: | ... |

Constraint für $\mathcal{A}[v]$ :

$$\mathcal{A}[v] \quad \subseteq \quad \bigcap \{ [\![k]\!]^\sharp \, (\mathcal{A}[u]) \mid k = (u, \_, v) \text{ Kante} \}$$

Wir suchen Lösungen für Constraint-Systeme der Form:

$$x_i \quad \sqsupseteq \quad f_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad\qquad (*)$$

wobei:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x_i$ | Unbekannte | hier: | $\mathcal{A}[u]$ |
| $\mathbb{D}$ | Werte | hier: | $2^{Expr}$ |
| $\sqsubseteq \quad \subseteq \quad \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ | Ordnungsrelation | hier: | $\supseteq$ |
| $f_i\colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$ | Bedingung | hier: | ... |

Constraint für $\mathcal{A}[v]$ :

$$\mathcal{A}[v] \quad \subseteq \quad \bigcap\{[\![k]\!]^\sharp\,(\mathcal{A}[u]) \mid k = (u, \_, v) \;\text{ Kante}\}$$

Denn:

$$x \sqsupseteq d_1 \wedge \ldots \wedge x \sqsupseteq d_k \quad \text{gdw.} \quad x \sqsupseteq \bigsqcup\{d_1, \ldots, d_k\} \qquad \text{:-)}$$

Eine Abbildung $f : \mathbb{D}_1 \to \mathbb{D}_2$ heißt monoton, falls $f(a) \sqsubseteq f(b)$ für alle $a \sqsubseteq b$.

Eine Abbildung $f : \mathbb{D}_1 \to \mathbb{D}_2$ heißt monoton, falls
$f(a) \sqsubseteq f(b)$ für alle $a \sqsubseteq b$.

## Beispiele:

(1) $\mathbb{D}_1 = \mathbb{D}_2 = 2^U$ für eine Menge $U$ und $f\,x = (x \cap a) \cup b$.
Offensichtlich ist jedes solche $f$ monoton :-)

Eine Abbildung $f : \mathbb{D}_1 \to \mathbb{D}_2$ heißt monoton, falls $f(a) \sqsubseteq f(b)$ für alle $a \sqsubseteq b$.

## Beispiele:

(1) $\mathbb{D}_1 = \mathbb{D}_2 = 2^U$ für eine Menge $U$ und $f\,x = (x \cap a) \cup b$.
Offensichtlich ist jedes solche $f$ monoton :-)

(2) $\mathbb{D}_1 = \mathbb{D}_2 = \mathbb{Z}$ (mit der Ordnung "$\leq$"). Dann gilt:

- $\mathsf{inc}\,x = x + 1$ ist monoton.
- $\mathsf{dec}\,x = x - 1$ ist monoton.

Eine Abbildung $f : \mathbb{D}_1 \to \mathbb{D}_2$ heißt monoton, falls $f(a) \sqsubseteq f(b)$ für alle $a \sqsubseteq b$.

## Beispiele:

(1) $\mathbb{D}_1 = \mathbb{D}_2 = 2^U$ für eine Menge $U$ und $f\, x = (x \cap a) \cup b$.
Offensichtlich ist jedes solche $f$ monoton :-)

(2) $\mathbb{D}_1 = \mathbb{D}_2 = \mathbb{Z}$ (mit der Ordnung "$\leq$"). Dann gilt:

- $\mathsf{inc}\, x = x + 1$ ist monoton.
- $\mathsf{dec}\, x = x - 1$ ist monoton.
- $\mathsf{inv}\, x = -x$ ist nicht monoton :-)

**Satz:**

Sind $f_1 : \mathbb{D}_1 \longrightarrow \mathbb{D}_2$ und $f_2 : \mathbb{D}_2 \longrightarrow \mathbb{D}_3$ monoton, dann ist auch $f_2 \circ f_1 : \mathbb{D}_1 \longrightarrow \mathbb{D}_3$ monoton :-)

## Satz:

Sind $f_1 : \mathbb{D}_1 \to \mathbb{D}_2$ und $f_2 : \mathbb{D}_2 \to \mathbb{D}_3$ monoton, dann ist auch $f_2 \circ f_1 : \mathbb{D}_1 \to \mathbb{D}_3$ monoton :-)

## Satz:

Ist $\mathbb{D}_2$ ein vollständiger Verband, dann bildet auch die Menge $[\mathbb{D}_1 \to \mathbb{D}_2]$ der monotonen Funktionen $f : \mathbb{D}_1 \to \mathbb{D}_2$ einen vollständigen Verband, wobei

$$f \sqsubseteq g \quad \text{gdw.} \quad f\,x \sqsubseteq g\,x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{D}_1$$

## Satz:

Sind $f_1 : \mathbb{D}_1 \to \mathbb{D}_2$ und $f_2 : \mathbb{D}_2 \to \mathbb{D}_3$ monoton, dann ist auch $f_2 \circ f_1 : \mathbb{D}_1 \to \mathbb{D}_3$ monoton :-)

## Satz:

Ist $\mathbb{D}_2$ ein vollständiger Verband, dann bildet auch die Menge $[\mathbb{D}_1 \to \mathbb{D}_2]$ der monotonen Funktionen $f : \mathbb{D}_1 \to \mathbb{D}_2$ einen vollständigen Verband, wobei

$$f \sqsubseteq g \quad \text{gdw.} \quad f\,x \sqsubseteq g\,x \quad \text{für alle } x \in \mathbb{D}_1$$

Insbesondere ist für $F \subseteq [\mathbb{D}_1 \to \mathbb{D}_2]$,

$$\bigsqcup F = f \quad \text{mit} \quad f\,x = \bigsqcup \{g\,x \mid g \in F\}$$

Für Funktionen $f_i\,x = a_i \cap x \cup b_i$ können wir die Operationen "$\circ$", "$\sqcup$" und "$\sqcap$" explizit angeben:

$$
\begin{array}{lll}
(f_2 \circ f_1)\,x & = & \boxed{a_1 \cap a_2} \cap x \cup \boxed{a_2 \cap b_1 \cup b_2} \\
(f_1 \sqcup f_2)\,x & = & \boxed{(a_1 \cup a_2)} \cap x \cup \boxed{b_1 \cup b_2} \\
(f_1 \sqcap f_2)\,x & = & \boxed{(a_1 \cup b_1) \cap (a_2 \cup b_2)} \cap x \cup \boxed{b_1 \cap b_2}
\end{array}
$$

**Gesucht:** möglichst kleine Lösung für:

$$x_i \sqsupseteq f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n \qquad (*)$$

wobei alle $f_i : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$ monoton sind.

**Gesucht:** möglichst kleine Lösung für:

$$x_i \sqsupseteq f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n \qquad (*)$$

wobei alle $f_i : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$ monoton sind.

**Idee:**

- Betrachte $F : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ mit

  $$F(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \quad \text{wobei} \quad y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n).$$

**Gesucht:** möglichst kleine Lösung für:

$$x_i \sqsupseteq f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n \qquad (*)$$

wobei alle $f_i : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$ monoton sind.

**Idee:**

- Betrachte $F : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ mit

  $F(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)$ wobei $y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$.

- Sind alle $f_i$ monoton, dann auch $F$ :-)

**Gesucht:** möglichst kleine Lösung für:

$$x_i \sqsupseteq f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n \qquad (*)$$

wobei alle $f_i : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$ monoton sind.

**Idee:**

- Betrachte $F : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ mit

  $$F(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n) \quad \text{wobei} \quad y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n).$$

- Sind alle $f_i$ monoton, dann auch $F$ :-)
- Wir approximieren sukzessive eine Lösung. Wir konstruieren:

  $$\underline{\perp}, \quad F\,\underline{\perp}, \quad F^2\,\underline{\perp}, \quad F^3\,\underline{\perp}, \quad \ldots$$

**Hoffnung:** Wir erreichen irgendwann eine Lösung ... ???

**Beispiel:** $\mathbb{D} = 2^{\{a,b,c\}}, \quad \sqsubseteq \; = \; \subseteq$

$$\begin{array}{lll} x_1 & \supseteq & \{a\} \cup x_3 \\ x_2 & \supseteq & x_3 \cap \{a, b\} \\ x_3 & \supseteq & x_1 \cup \{c\} \end{array}$$

**Beispiel:** $\mathbb{D} = 2^{\{a,b,c\}}, \quad \sqsubseteq = \subseteq$

$$\begin{array}{lll} x_1 & \supseteq & \{a\} \cup x_3 \\ x_2 & \supseteq & x_3 \cap \{a, b\} \\ x_3 & \supseteq & x_1 \cup \{c\} \end{array}$$

**Die Iteration:**

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $\emptyset$ | | | | |
| $x_2$ | $\emptyset$ | | | | |
| $x_3$ | $\emptyset$ | | | | |

**Beispiel:** $\mathbb{D} = 2^{\{a,b,c\}}, \quad \sqsubseteq = \subseteq$

$$\begin{array}{lll} x_1 & \supseteq & \{a\} \cup x_3 \\ x_2 & \supseteq & x_3 \cap \{a,b\} \\ x_3 & \supseteq & x_1 \cup \{c\} \end{array}$$

**Die Iteration:**

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $\emptyset$ | $\{a\}$ | | | |
| $x_2$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | | | |
| $x_3$ | $\emptyset$ | $\{c\}$ | | | |

**Beispiel:** $\mathbb{D} = 2^{\{a,b,c\}}, \quad \sqsubseteq\ = \ \subseteq$

$$\begin{array}{lll} x_1 & \supseteq & \{a\} \cup x_3 \\ x_2 & \supseteq & x_3 \cap \{a,b\} \\ x_3 & \supseteq & x_1 \cup \{c\} \end{array}$$

**Die Iteration:**

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $\emptyset$ | $\{a\}$ | $\{a,c\}$ | | |
| $x_2$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | | |
| $x_3$ | $\emptyset$ | $\{c\}$ | $\{a,c\}$ | | |

**Beispiel:** $\mathbb{D} = 2^{\{a,b,c\}}, \quad \sqsubseteq \, = \, \subseteq$

$$\begin{array}{lll} x_1 & \supseteq & \{a\} \cup x_3 \\ x_2 & \supseteq & x_3 \cap \{a,b\} \\ x_3 & \supseteq & x_1 \cup \{c\} \end{array}$$

**Die Iteration:**

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $\emptyset$ | $\{a\}$ | $\{a,c\}$ | $\{a,c\}$ | |
| $x_2$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\{a\}$ | |
| $x_3$ | $\emptyset$ | $\{c\}$ | $\{a,c\}$ | $\{a,c\}$ | |

**Beispiel:** $\mathbb{D} = 2^{\{a,b,c\}}, \quad \sqsubseteq \; = \; \subseteq$

$$\begin{array}{lll} x_1 & \supseteq & \{a\} \cup x_3 \\ x_2 & \supseteq & x_3 \cap \{a, b\} \\ x_3 & \supseteq & x_1 \cup \{c\} \end{array}$$

**Die Iteration:**

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $\emptyset$ | $\{a\}$ | $\{a, c\}$ | $\{a, c\}$ | dito |
| $x_2$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\{a\}$ | |
| $x_3$ | $\emptyset$ | $\{c\}$ | $\{a, c\}$ | $\{a, c\}$ | |

# Offenbar gilt:

- Gilt $F^k \underline{\perp} = F^{k+1} \underline{\perp}$, ist eine Lösung gefunden :-)
- $\underline{\perp}, F\,\underline{\perp}, F^2\,\underline{\perp}, \ldots$ bilden eine aufsteigende Kette :

$$\underline{\perp} \quad \sqsubseteq \quad F\,\underline{\perp} \quad \sqsubseteq \quad F^2\,\underline{\perp} \quad \sqsubseteq \quad \ldots$$

- Sind alle aufsteigenden Ketten endlich, gibt es $k$ immer.

## Offenbar gilt:

- Gilt $F^k \underline{\perp} = F^{k+1} \underline{\perp}$, ist eine Lösung gefunden :-)
- $\underline{\perp}, F \underline{\perp}, F^2 \underline{\perp}, \ldots$ bilden eine aufsteigende Kette :

$$\underline{\perp} \quad \sqsubseteq \quad F \underline{\perp} \quad \sqsubseteq \quad F^2 \underline{\perp} \quad \sqsubseteq \quad \ldots$$

- Sind alle aufsteigenden Ketten endlich, gibt es $k$ immer.

Die zweite Aussage folgt mit vollständiger Induktion:

## Offenbar gilt:

- Gilt $F^k \underline{\perp} = F^{k+1} \underline{\perp}$, ist eine Lösung gefunden :-)
- $\underline{\perp}, F\,\underline{\perp}, F^2\,\underline{\perp}, \ldots$ bilden eine aufsteigende Kette :

$$\underline{\perp} \quad \sqsubseteq \quad F\,\underline{\perp} \quad \sqsubseteq \quad F^2\,\underline{\perp} \quad \sqsubseteq \quad \ldots$$

- Sind alle aufsteigenden Ketten endlich, gibt es $k$ immer.

Die zweite Aussage folgt mit vollständiger Induktion:

**Anfang:** $F^0\,\underline{\perp} = \underline{\perp} \sqsubseteq F^1\,\underline{\perp}$ :-)

## Offenbar gilt:

- Gilt $F^k \underline{\perp} = F^{k+1} \underline{\perp}$, ist eine Lösung gefunden :-)
- $\underline{\perp}, F\,\underline{\perp}, F^2\,\underline{\perp}, \ldots$ bilden eine aufsteigende Kette :

$$\underline{\perp} \quad \sqsubseteq \quad F\,\underline{\perp} \quad \sqsubseteq \quad F^2\,\underline{\perp} \quad \sqsubseteq \quad \ldots$$

- Sind alle aufsteigenden Ketten endlich, gibt es $k$ immer.

Die zweite Aussage folgt mit vollständiger Induktion:

**Anfang:** $F^0\,\underline{\perp} = \underline{\perp} \sqsubseteq F^1\,\underline{\perp}$ :-)

**Schluss:** Gelte bereits $F^{i-1}\,\underline{\perp} \sqsubseteq F^i\,\underline{\perp}$. Dann

$$F^i\,\underline{\perp} = F\,(F^{i-1}\,\underline{\perp}) \sqsubseteq F\,(F^i\,\underline{\perp}) = F^{i+1}\,\underline{\perp}$$

da $F$ monoton ist :-)

**Fazit:**

Wenn $\mathbb{D}$ endlich ist, finden wir mit Sicherheit eine Lösung :-)

**Fragen:**

## Fazit:

Wenn $\mathbb{D}$ endlich ist, finden wir mit Sicherheit eine Lösung :-)

## Fragen:

1. Gibt es eine kleinste Lösung ?

## Fazit:

Wenn $\mathbb{D}$ endlich ist, finden wir mit Sicherheit eine Lösung :-)

## Fragen:

1. Gibt es eine kleinste Lösung ?
2. Wenn ja: findet Iteration die kleinste Lösung ??

## Fazit:

Wenn $\mathbb{D}$ endlich ist, finden wir mit Sicherheit eine Lösung :-)

## Fragen:

1. Gibt es eine kleinste Lösung ?
2. Wenn ja: findet Iteration die kleinste Lösung ??
3. Was, wenn $\mathbb{D}$ nicht endlich ist ???

## Satz — Knaster – Tarski

In einem vollständigen Verband $\mathbb{D}$ hat jede monotone Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ einen kleinsten Fixpunkt $d_0$.

Sei $P = \{d \in \mathbb{D} \mid f\, d \sqsubseteq d\}$ die Menge der Präfixpunkte.

Dann ist $d_0 = \bigsqcap P$ .

*Bronisław Knaster (1893-1980), topology*

## Satz Knaster – Tarski

In einem vollständigen Verband $\mathbb{D}$ hat jede monotone Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ einen kleinsten Fixpunkt $d_0$.

Sei $P = \{d \in \mathbb{D} \mid f\,d \sqsubseteq d\}$ die Menge der Präfixpunkte.

Dann ist $d_0 = \bigsqcap P$ .

## Beweis:

(1) $d_0 \in P$ :

## Satz Knaster – Tarski

In einem vollständigen Verband $\mathbb{D}$ hat jede monotone Funktion $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ einen kleinsten Fixpunkt $d_0$.

Sei $P = \{d \in \mathbb{D} \mid f\, d \sqsubseteq d\}$ die Menge der Präfixpunkte.

Dann ist $d_0 = \bigsqcap P$ .

## Beweis:

(1) $d_0 \in P$ :

$$
\begin{array}{ll}
 & f\, d_0 \sqsubseteq f\, d \sqsubseteq d \quad \text{für alle } d \in P \\
\Longrightarrow & f\, d_0 \quad \text{ist untere Schranke von } P \\
\Longrightarrow & f\, d_0 \sqsubseteq d_0 \quad \text{weil } d_0 = \bigsqcap P \\
\Longrightarrow & d_0 \in P \qquad \text{:-)}
\end{array}
$$

(2) $\qquad f\, d_0 = d_0 :$

(2) $\quad f\, d_0 = d_0$ :

$$
\begin{array}{ll}
 & f\, d_0 \sqsubseteq d_0 \quad \text{wegen} \quad (1) \\
\Longrightarrow & f\,(f\, d_0) \sqsubseteq f\, d_0 \quad \text{wegen Monotonie von } f \\
\Longrightarrow & f\, d_0 \in P \\
\Longrightarrow & d_0 \sqsubseteq f\, d_0 \qquad \text{und die Behauptung folgt} \quad \text{:-)}
\end{array}
$$

(2) $f\,d_0 = d_0$ :

$$f\,d_0 \sqsubseteq d_0 \quad \text{wegen} \quad (1)$$

$$\Longrightarrow \quad f(f\,d_0) \sqsubseteq f\,d_0 \quad \text{wegen Monotonie von } f$$

$$\Longrightarrow \quad f\,d_0 \in P$$

$$\Longrightarrow \quad d_0 \sqsubseteq f\,d_0 \quad \text{und die Behauptung folgt} \quad \text{:-)}$$

(3) $d_0$ ist kleinster Fixpunkt:

(2) $\quad f\,d_0 = d_0$ :

$$
\begin{array}{lll}
 & f\,d_0 \sqsubseteq d_0 & \text{wegen} \quad (1) \\
\Longrightarrow & f(f\,d_0) \sqsubseteq f\,d_0 & \text{wegen Monotonie von } f \\
\Longrightarrow & f\,d_0 \in P & \\
\Longrightarrow & d_0 \sqsubseteq f\,d_0 & \text{und die Behauptung folgt} \quad \text{:-)}
\end{array}
$$

(3) $\quad d_0$ ist kleinster Fixpunkt:

$$
\begin{array}{lll}
 & f\,d_1 = d_1 \sqsubseteq d_1 & \text{weiterer Fixpunkt} \\
\Longrightarrow & d_1 \in P & \\
\Longrightarrow & d_0 \sqsubseteq d_1 & \text{:-))}
\end{array}
$$

## Bemerkung:

Der kleinste Fixpunkt $d_0$ ist in $P$ und untere Schranke :-)

$\Longrightarrow$ $d_0$ ist der kleinste Wert $x$ mit $x \sqsupseteq f\,x$

## Bemerkung:

Der kleinste Fixpunkt $d_0$ ist in $P$ und untere Schranke :-)

$\Longrightarrow$ $d_0$ ist der kleinste Wert $x$ mit $x \sqsupseteq f\, x$

## Anwendung:

Sei $$x_i \sqsupseteq f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n \qquad (*)$$

ein Ungleichungssystem, wobei alle $f_i : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$ monoton sind.

## Bemerkung:

Der kleinste Fixpunkt $d_0$ ist in $P$ und untere Schranke :-)

$\Longrightarrow$ $d_0$ ist der kleinste Wert $x$ mit $x \sqsupseteq f\,x$

## Anwendung:

Sei $$x_i \sqsupseteq f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n \qquad (*)$$

ein Ungleichungssystem, wobei alle $f_i : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$ monoton sind.

$\Longrightarrow$ kleinste Lösung von $(*)$ $==$ kleinster Fixpunkt von $F$ :-)

**Beispiel 1:** $\mathbb{D} = 2^U, \quad f\,x = x \cap a \cup b$

**Beispiel 1:** $\mathbb{D} = 2^U, \quad f\,x = x \cap a \cup b$

| $f$ | $f^k\,\bot$ | $f^k\,\top$ |
|---|---|---|
| 0 | $\emptyset$ | $\top$ |

**Beispiel 1:** $\mathbb{D} = 2^U, \quad f\,x = x \cap a \cup b$

| $f$ | $f^k\,\bot$ | $f^k\,\top$ |
|---|---|---|
| 0 | $\emptyset$ | $\top$ |
| 1 | $b$ | $a \cup b$ |

**Beispiel 1:** $\mathbb{D} = 2^U, \quad f\,x = x \cap a \cup b$

| $f$ | $f^k\,\bot$ | $f^k\,\top$ |
|---|---|---|
| 0 | $\emptyset$ | $\top$ |
| 1 | $b$ | $a \cup b$ |
| 2 | $b$ | $a \cup b$ |

**Beispiel 1:** $\mathbb{D} = 2^U, \quad f\,x = x \cap a \cup b$

| $f$ | $f^k \perp$ | $f^k \top$ |
|---|---|---|
| 0 | $\emptyset$ | $\top$ |
| 1 | $b$ | $a \cup b$ |
| 2 | $b$ | $a \cup b$ |

**Beispiel 2:** $\mathbb{D} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

Für die Funktion $f\,x = x + 1$ ist:

$$f^i \perp = f^i\,0 = i \quad \sqsubset \quad i + 1 = f^{i+1} \perp$$

**Beispiel 1:** $\mathbb{D} = 2^U, \quad f\,x = x \cap a \cup b$

| $f$ | $f^k\,\bot$ | $f^k\,\top$ |
|---|---|---|
| 0 | $\emptyset$ | $\top$ |
| 1 | $b$ | $a \cup b$ |
| 2 | $b$ | $a \cup b$ |

**Beispiel 2:** $\mathbb{D} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

Für die Funktion $f\,x = x + 1$ ist:

$$f^i\,\bot = f^i\,0 = i \quad \sqsubset \quad i + 1 = f^{i+1}\,\bot$$

$\Longrightarrow$ Die normale Iteration erreicht nie einen Fixpunkt :-(

$\Longrightarrow$ Man benötigt manchmal transfinite Iteration :-)

## Satz:

Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ monoton und $X \subseteq \mathbb{D}$ die kleinste Menge mit:

(a) $\bot \in X$;

(b) $f\,d \in X$ falls $d \in X$;

(c) $\bigsqcup X_0 \in X$ für alle $X_0 \subseteq X$.

// diese Menge existiert offenbar :-)

## Satz:

Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ monoton und $X \subseteq \mathbb{D}$ die kleinste Menge mit:

(a) $\bot \in X$;

(b) $f\, d \in X$ falls $d \in X$;

(c) $\bigsqcup X_0 \in X$ für alle $X_0 \subseteq X$.

// diese Menge existiert offenbar :-)

Dann ist $d_0 = \bigsqcup X$ der kleinste Fixpunkt von $f$.

## Beweis:

(1) $\quad f\, d_0 \sqsubseteq d_0 \quad$ d.h. $\quad d_0 \quad$ ist Präfixpunkt:

## Beweis:

(1) $f\,d_0 \sqsubseteq d_0$ d.h. $d_0$ ist Präfixpunkt:

$$
\begin{array}{rll}
& d_0 \in X & \text{wegen (c)} \\
\Longrightarrow & f\,d_0 \in X & \text{wegen (b)} \\
\Longrightarrow & f\,d_0 \sqsubseteq d_0 & \text{:-)}
\end{array}
$$

## Beweis:

(1) $f\, d_0 \sqsubseteq d_0$ d.h. $d_0$ ist Präfixpunkt:

$$
\begin{array}{rll}
 & d_0 \in X & \text{wegen (c)} \\
\Longrightarrow & f\, d_0 \in X & \text{wegen (b)} \\
\Longrightarrow & f\, d_0 \sqsubseteq d_0 & \text{:-)}
\end{array}
$$

(2) $d_0$ ist kleinster Präfixpunkt:

**Beweis:**

(1) $f\,d_0 \sqsubseteq d_0$ d.h. $d_0$ ist Präfixpunkt:

$$
\begin{array}{rll}
& d_0 \in X & \text{wegen (c)} \\
\Longrightarrow & f\,d_0 \in X & \text{wegen (b)} \\
\Longrightarrow & f\,d_0 \sqsubseteq d_0 & \text{:-)}
\end{array}
$$

(2) $d_0$ ist kleinster Präfixpunkt:

Sei $d_1$ weiterer Präfixpunkt, d.h. $f\,d_1 \sqsubseteq d_1$.
Dann erfüllt die Menge: $X_1 = \{x \in \mathbb{D} \mid x \sqsubseteq d_1\}$
die Eigenschaften (a), (b) und (c) :-)

## Beweis:

(1) $f\,d_0 \sqsubseteq d_0$ d.h. $d_0$ ist Präfixpunkt:

$$\begin{array}{lll} & d_0 \in X & \text{wegen (c)} \\ \Longrightarrow & f\,d_0 \in X & \text{wegen (b)} \\ \Longrightarrow & f\,d_0 \sqsubseteq d_0 & \text{:-)} \end{array}$$

(2) $d_0$ ist kleinster Präfixpunkt:

Sei $d_1$ weiterer Präfixpunkt, d.h. $f\,d_1 \sqsubseteq d_1$.
Dann erfüllt die Menge: $X_1 = \{x \in \mathbb{D} \mid x \sqsubseteq d_1\}$
die Eigenschaften (a), (b) und (c) :-)

$$\begin{array}{ll} \Longrightarrow & X \subseteq X_1 \\ \Longrightarrow & d_1 \text{ ist obere Schranke von } X \\ \Longrightarrow & d_0 = \bigsqcup X \sqsubseteq d_1 \quad \text{:-))} \end{array}$$

## Fazit:

Wir können Constraint-Systeme durch Fixpunkt-Iteration lösen, d.h. durch wiederholtes Einsetzen :-)

**Fazit:**

Wir können Constraint-Systeme durch Fixpunkt-Iteration lösen, d.h. durch wiederholtes Einsetzen :-)

**Achtung:** Naive Fixpunkt-Iteration ist ziemlich ineffizient :-(

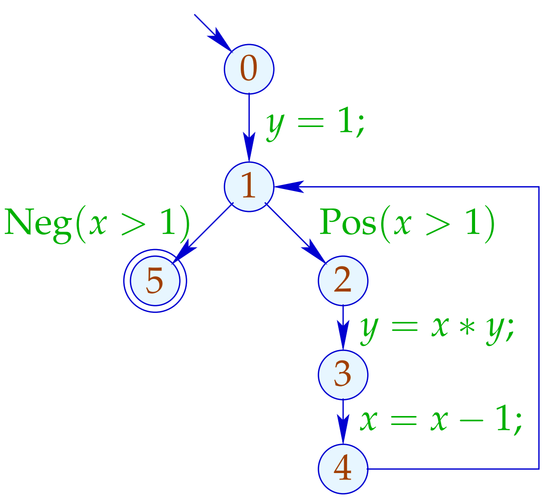
# Fazit:

Wir können Constraint-Systeme durch Fixpunkt-Iteration lösen, d.h. durch wiederholtes Einsetzen :-)

# Achtung:

Naive Fixpunkt-Iteration ist ziemlich ineffizient :-(

# Beispiel:




| |
|---|
| 0 |
| 1 |
| 2 |
| 3 |
| 4 |
| 5 |

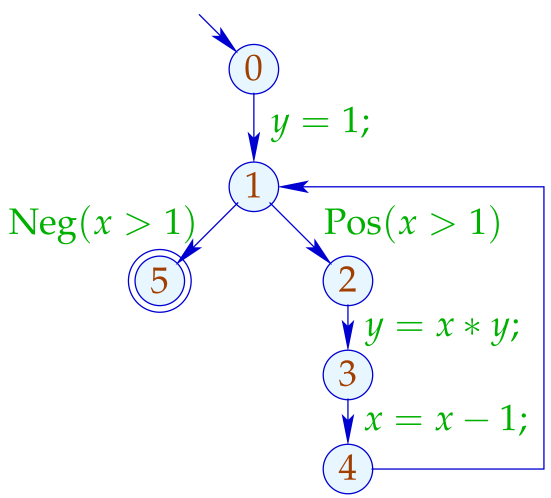
## Fazit:

Wir können Constraint-Systeme durch Fixpunkt-Iteration lösen, d.h. durch wiederholtes Einsetzen :-)

## Achtung:

Naive Fixpunkt-Iteration ist ziemlich ineffizient :-(

## Beispiel:




| | 1 |
|---|---|
| 0 | $\emptyset$ |
| 1 | $\{1, x > 1, x - 1\}$ |
| 2 | *Expr* |
| 3 | $\{1, x > 1, x - 1\}$ |
| 4 | $\{1\}$ |
| 5 | *Expr* |

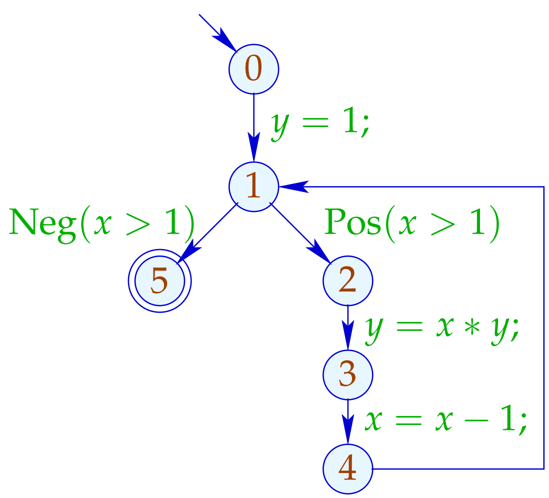
## Fazit:

Wir können Constraint-Systeme durch Fixpunkt-Iteration lösen, d.h. durch wiederholtes Einsetzen :-)

## Achtung:

Naive Fixpunkt-Iteration ist ziemlich ineffizient :-(

## Beispiel:




| | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 0 | $\emptyset$ | $\emptyset$ |
| 1 | $\{1, x > 1, x - 1\}$ | $\{1\}$ |
| 2 | *Expr* | $\{1, x > 1, x - 1\}$ |
| 3 | $\{1, x > 1, x - 1\}$ | $\{1, x > 1, x - 1\}$ |
| 4 | $\{1\}$ | $\{1\}$ |
| 5 | *Expr* | $\{1, x > 1, x - 1\}$ |

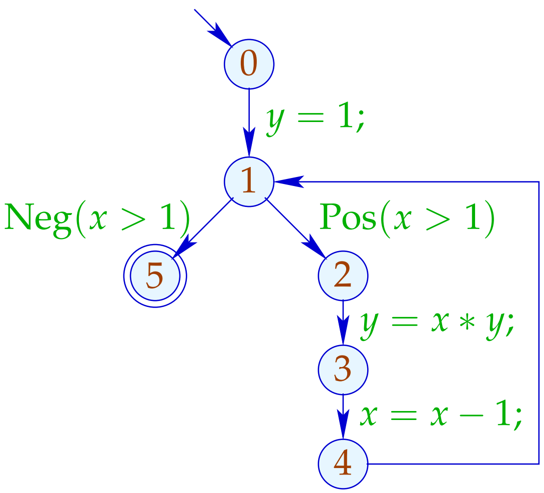
## Fazit:

Wir können Constraint-Systeme durch Fixpunkt-Iteration lösen, d.h. durch wiederholtes Einsetzen :-)

## Achtung:

Naive Fixpunkt-Iteration ist ziemlich ineffizient :-(

## Beispiel:




| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 0 | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ |
| 1 | $\{1, x > 1, x - 1\}$ | $\{1\}$ | $\{1\}$ |
| 2 | *Expr* | $\{1, x > 1, x - 1\}$ | $\{1, x > 1\}$ |
| 3 | $\{1, x > 1, x - 1\}$ | $\{1, x > 1, x - 1\}$ | $\{1, x > 1, x - 1\}$ |
| 4 | $\{1\}$ | $\{1\}$ | $\{1\}$ |
| 5 | *Expr* | $\{1, x > 1, x - 1\}$ | $\{1, x > 1\}$ |

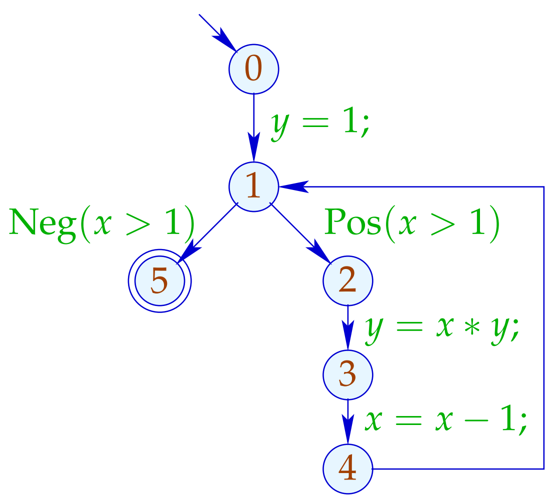
## Fazit:

Wir können Constraint-Systeme durch Fixpunkt-Iteration lösen, d.h. durch wiederholtes Einsetzen :-)

## Achtung:

Naive Fixpunkt-Iteration ist ziemlich ineffizient :-(

## Beispiel:



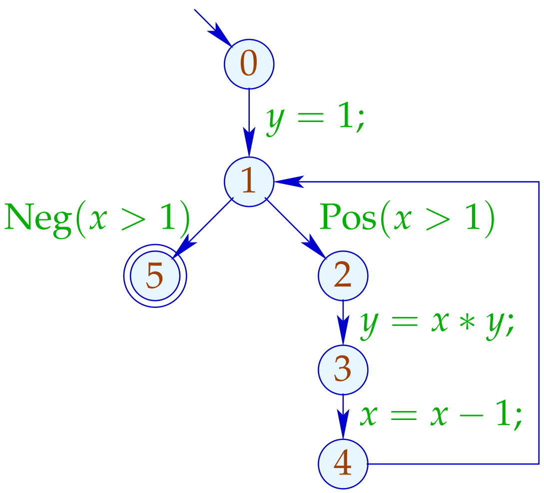

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ |
| 1 | $\{1, x > 1, x - 1\}$ | $\{1\}$ | $\{1\}$ | $\{1\}$ |
| 2 | *Expr* | $\{1, x > 1, x - 1\}$ | $\{1, x > 1\}$ | $\{1, x > 1\}$ |
| 3 | $\{1, x > 1, x - 1\}$ | $\{1, x > 1, x - 1\}$ | $\{1, x > 1, x - 1\}$ | $\{1, x > 1\}$ |
| 4 | $\{1\}$ | $\{1\}$ | $\{1\}$ | $\{1\}$ |
| 5 | *Expr* | $\{1, x > 1, x - 1\}$ | $\{1, x > 1\}$ | $\{1, x > 1\}$ |

## Fazit:

Wir können Constraint-Systeme durch Fixpunkt-Iteration lösen, d.h. durch wiederholtes Einsetzen :-)

**Achtung:** Naive Fixpunkt-Iteration ist ziemlich ineffizient :-(

## Beispiel:




| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ | |
| 1 | $\{1, x > 1, x - 1\}$ | $\{1\}$ | $\{1\}$ | $\{1\}$ | |
| 2 | *Expr* | $\{1, x > 1, x - 1\}$ | $\{1, x > 1\}$ | $\{1, x > 1\}$ | |
| 3 | $\{1, x > 1, x - 1\}$ | $\{1, x > 1, x - 1\}$ | $\{1, x > 1, x - 1\}$ | $\{1, x > 1\}$ | dito |
| 4 | $\{1\}$ | $\{1\}$ | $\{1\}$ | $\{1\}$ | |
| 5 | *Expr* | $\{1, x > 1, x - 1\}$ | $\{1, x > 1\}$ | $\{1, x > 1\}$ | |

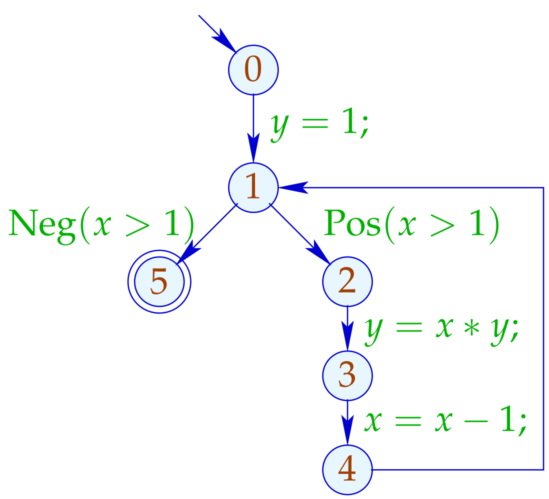
## Idee: Round Robin Iteration

Benutze bei der Iteration nicht die Werte der letzten Iteration, sondern die jeweils aktuellen :-)

# Idee: Round Robin Iteration

Benutze bei der Iteration nicht die Werte der letzten Iteration, sondern die jeweils aktuellen :-)

## Beispiel:

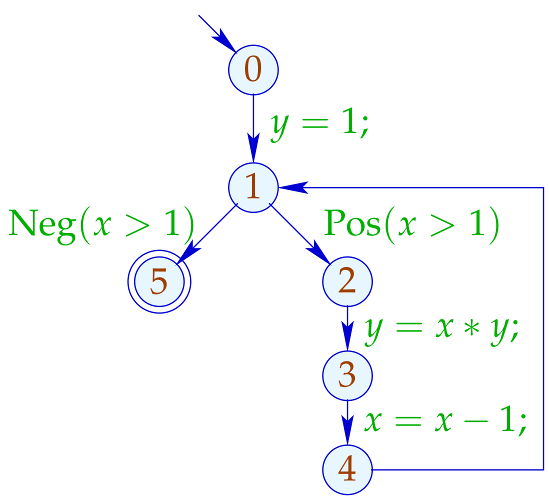



| |
|---|
| 0 |
| 1 |
| 2 |
| 3 |
| 4 |
| 5 |

## Idee: Round Robin Iteration

Benutze bei der Iteration nicht die Werte der letzten Iteration, sondern die jeweils aktuellen :-)

## Beispiel:

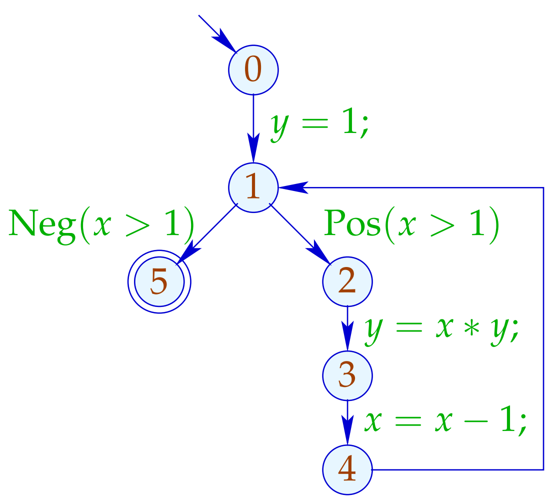



| | 1 |
|---|---|
| 0 | $\emptyset$ |
| 1 | $\{1\}$ |
| 2 | $\{1, x > 1\}$ |
| 3 | $\{1, x > 1\}$ |
| 4 | $\{1\}$ |
| 5 | $\{1, x > 1\}$ |

## Idee: Round Robin Iteration

Benutze bei der Iteration nicht die Werte der letzten Iteration, sondern die jeweils aktuellen :-)

## Beispiel:




| | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 0 | $\emptyset$ | |
| 1 | $\{1\}$ | |
| 2 | $\{1, x > 1\}$ | |
| 3 | $\{1, x > 1\}$ | dito |
| 4 | $\{1\}$ | |
| 5 | $\{1, x > 1\}$ | |

Der Code für Round Robin Iteration sieht in Java so aus:

$$
\begin{array}{l}
\textsf{for}\ (i = 1; i \leq n; i{+}{+})\ x_i = \bot;\\
\textsf{do}\ \{\\
\qquad \mathit{finished} = \textsf{true};\\
\qquad \textsf{for}\ (i = 1; i \leq n; i{+}{+})\ \{\\
\qquad\qquad \mathit{new} = f_i(x_1, \ldots, x_n);\\
\qquad\qquad \textsf{if}\ (!(x_i \ \sqsupseteq \mathit{new}))\ \{\\
\qquad\qquad\qquad \mathit{finished} = \textsf{false};\\
\qquad\qquad\qquad x_i = x_i \sqcup \mathit{new};\\
\qquad\qquad \}\\
\qquad \}\\
\}\ \textsf{while}\ (!\mathit{finished});
\end{array}
$$