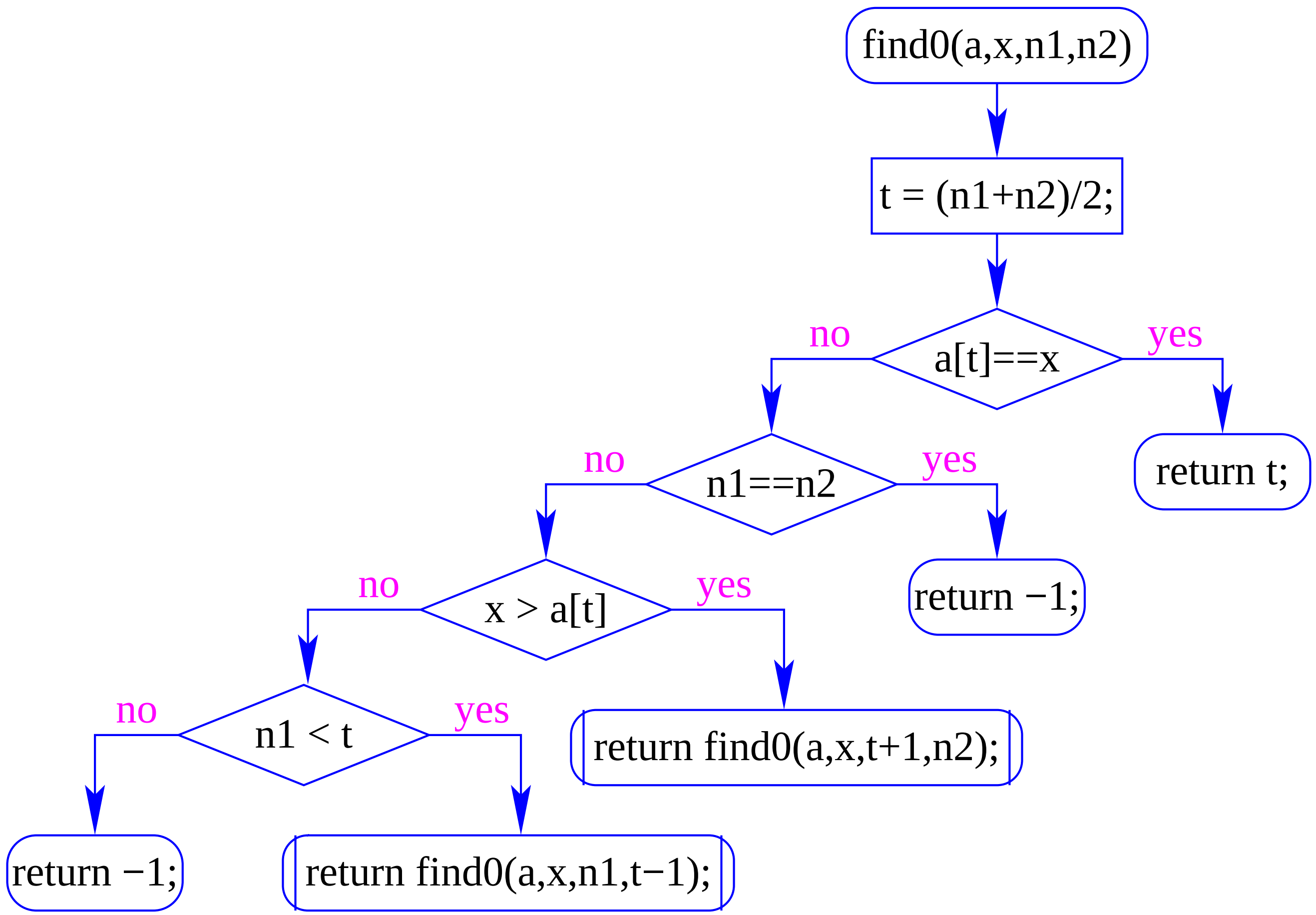
Das Kontrollfluss-Diagramm für `find0()`:



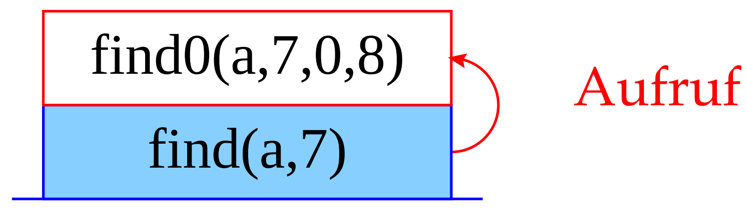
Achtung:

- zwei der `return`-Statements enthalten einen Funktionsaufruf – deshalb die Markierungen an den entsprechenden Knoten.
- (Wir hätten stattdessen auch zwei Knoten und eine Hilfsvariable `result` einführen können :-)
- `find0()` ruft sich selbst auf.
- Funktionen, die sich selbst (evt. mittelbar) aufrufen, heißen rekursiv.

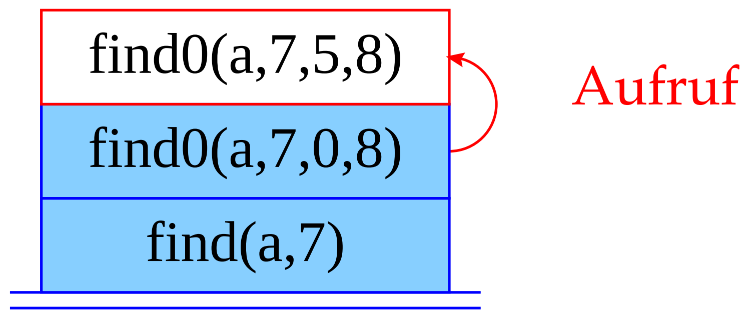
Ausführung:

$$\boxed{\text{find(a,7)}}$$

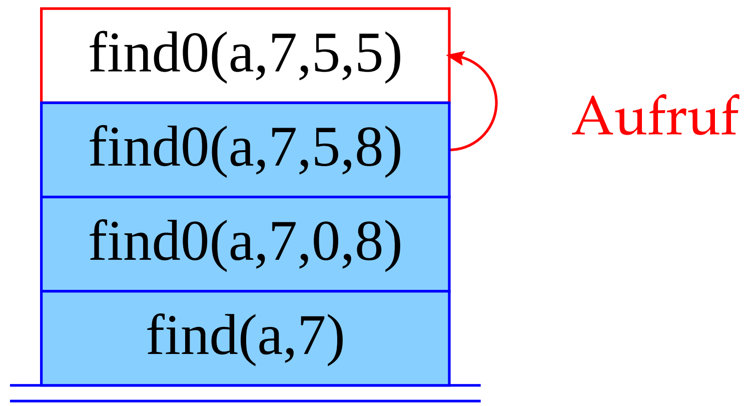
Ausführung:



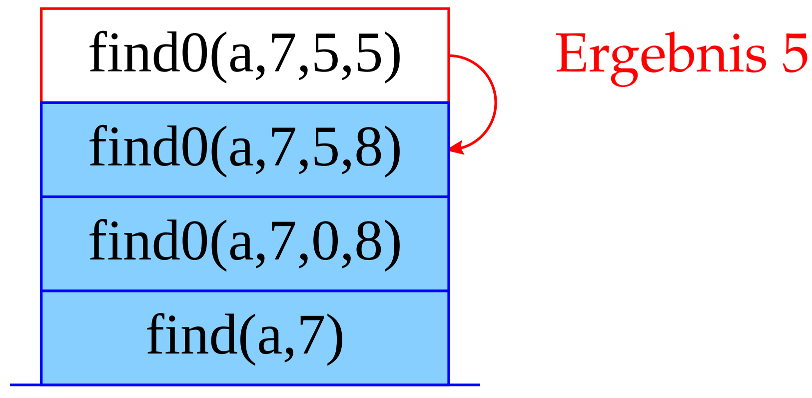
Ausführung:



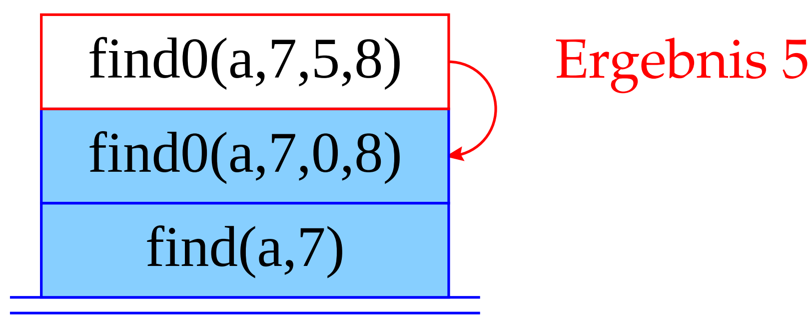
Ausführung:



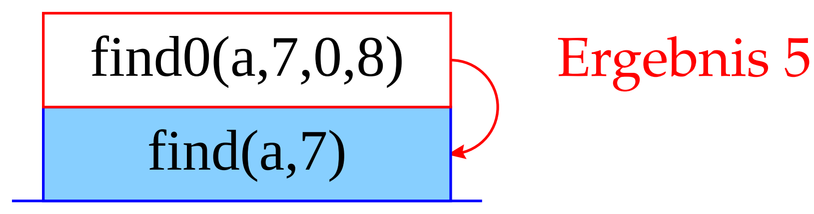
Ausführung:



Ausführung:



Ausführung:



Ausführung:

$\boxed{\text{find(a,7)}}$

Ergebnis 5

- Die Verwaltung der Funktionsaufrufe erfolgt nach dem LIFO-Prinzip (Last-In-First-Out).
- Eine Datenstruktur, die nach diesem Stapel-Prinzip verwaltet wird, heißt auch Keller oder Stack.
- Aktiv ist jeweils nur der oberste/letzte Aufruf.
- Achtung: es kann zu einem Zeitpunkt mehrere weitere inaktive Aufrufe der selben Funktion geben !!!

Um zu beweisen, dass `find0()` terminiert, beobachten wir:

1. Wird `find0()` für ein ein-elementiges Intervall `[n,n]` aufgerufen, dann terminiert der Funktionsaufruf direkt.
2. wird `find0()` für ein Intervall `[n1,n2]` aufgerufen mit mehr als einem Element, dann terminiert der Aufruf entweder direkt (weil `x` gefunden wurde), oder `find0()` wird mit einem Intervall aufgerufen, das echt in `[n1,n2]` enthalten ist, genauer: sogar maximal die Hälfte der Elemente von `[n1,n2]` enthält.

$\Longrightarrow$ ähnliche Technik wird auch für andere rekursive Funktionen angewandt.

Beobachtung:

- Das Ergebnis eines Aufrufs von `find0()` liefert direkt das Ergebnis auch für die aufrufende Funktion!
- Solche Rekursion heißt End- oder Tail-Rekursion.
- End-Rekursion kann auch ohne Aufrufkeller implementiert werden ...
- Idee: lege den neuen Aufruf von `find0()` nicht oben auf den Stapel drauf, sondern ersetze den bereits dort liegenden Aufruf !

Verbesserte Ausführung:

find(a,7)

Verbesserte Ausführung:

find0(a,7,0,8)

Verbesserte Ausführung:

$\boxed{\text{find0(a,7,5,8)}}$

Verbesserte Ausführung:

$\boxed{\text{find0(a,7,5,5)}}$

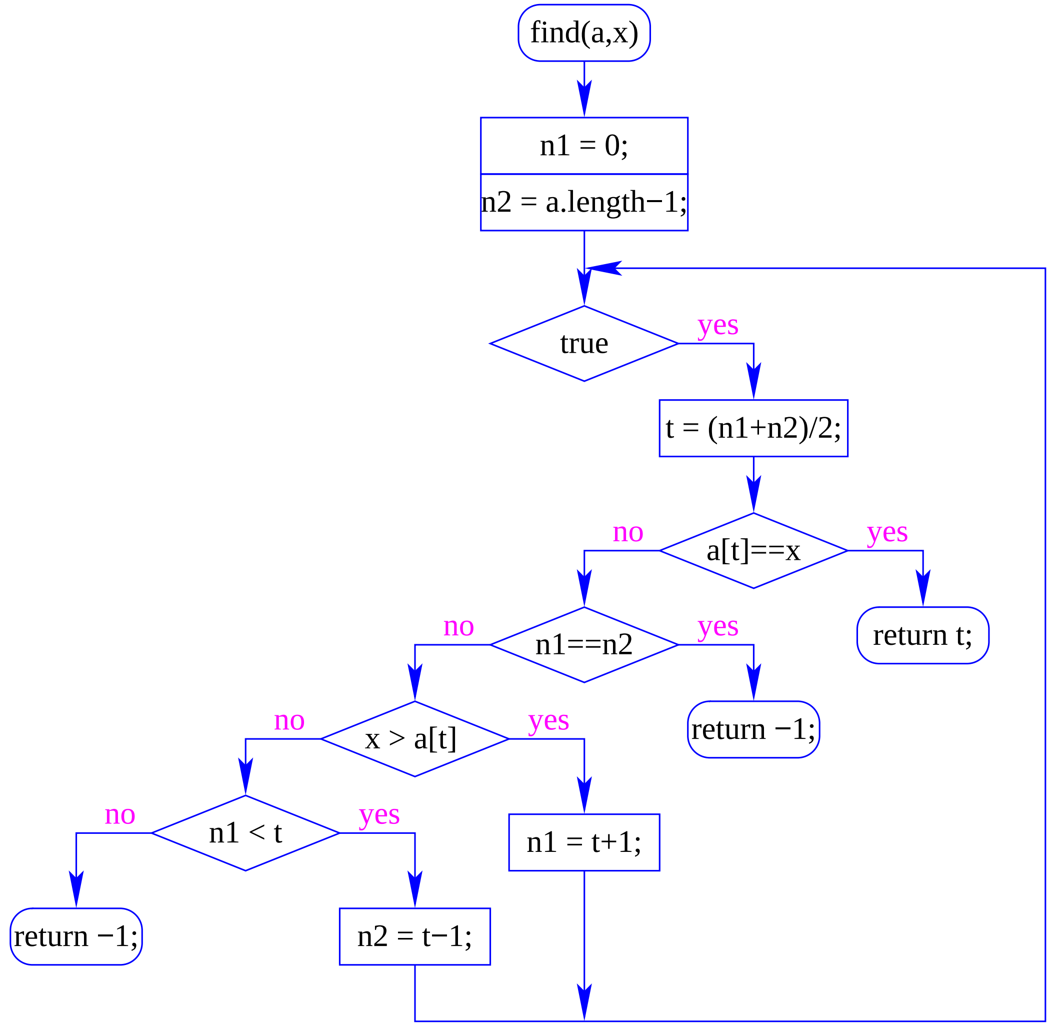
Verbesserte Ausführung:

$\boxed{\text{find0(a,7,5,5)}}$ Ergebnis: 5

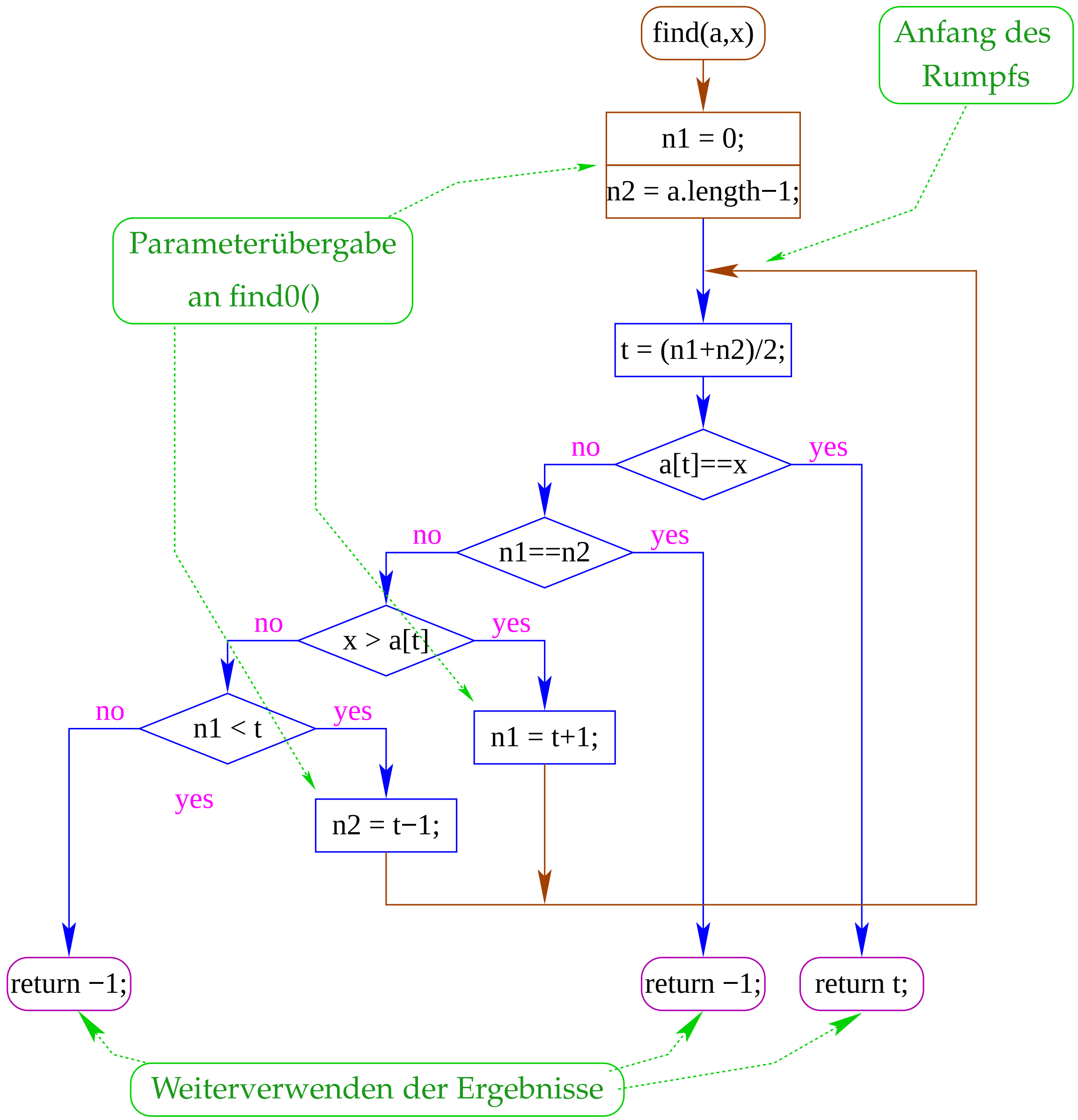
⟹ end-Rekursion kann durch Iteration (d.h. eine normale Schleife) ersetzt werden ...

```
public static int find (int[] a, int x) {
   int n1 = 0;
   int n2 = a.length-1;
   while (true) {
      int t = (n2+n1)/2;
      if (x == a[t]) return t;
      else if (n1 == n2) return -1;
      else if (x > a[t]) n1 = t+1;
      else if (n1 < t) n2 = t-1;
      else return -1;
      }  // end of while
   }     // end of find
```

Das Kontrollfluss-Diagramm:



- Die Schleife wird hier alleine durch die `return`-Anweisungen verlassen.
- Offenbar machen Schleifen mit mehreren Ausgängen Sinn.
- Um eine Schleife zu verlassen, ohne gleich ans Ende der Funktion zu springen, kann man das `break`-Statement benutzen.
- Der Aufruf der end-rekursiven Funktion wird ersetzt durch:
  1. Code zur Parameter-Übergabe;
  2. einen Sprung an den Anfang des Rumpfs.
- Aber Achtung, wenn die Funktion an mehreren Stellen benutzt wird !!!
  (Was ist das Problem ?-)

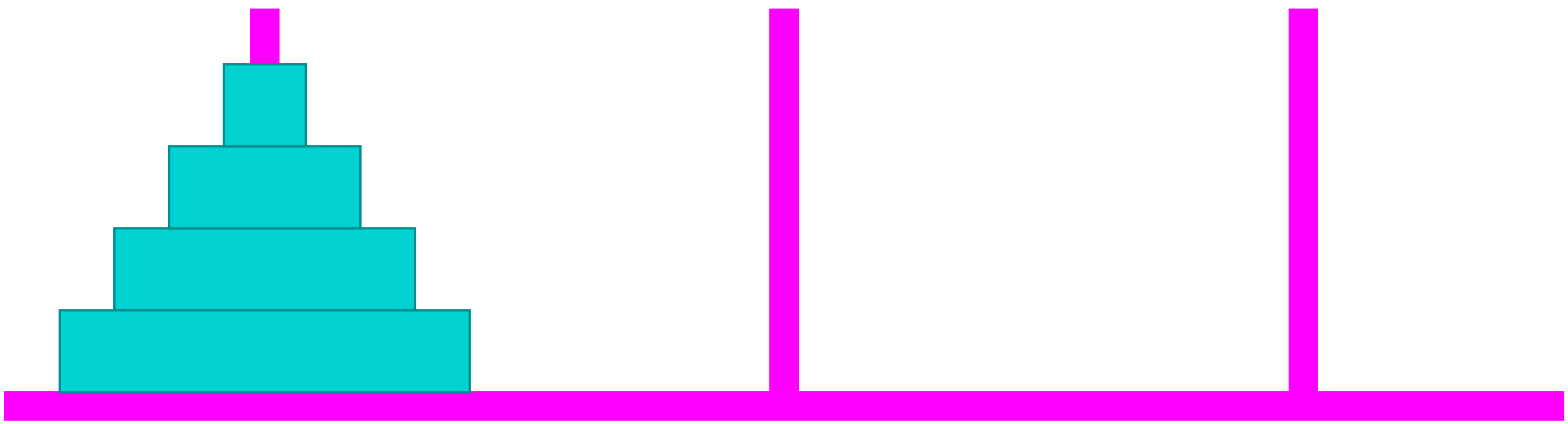

find(a,x)
Anfang des Rumpfs
n1 = 0;
n2 = a.length−1;
Parameterübergabe an find0()
t = (n1+n2)/2;
no
a[t]==x
yes
no
n1==n2
yes
no
x > a[t]
yes
no
n1 < t
yes
n1 = t+1;
yes
n2 = t−1;
return −1;
return −1;
return t;
Weiterverwenden der Ergebnisse

Bemerkung:

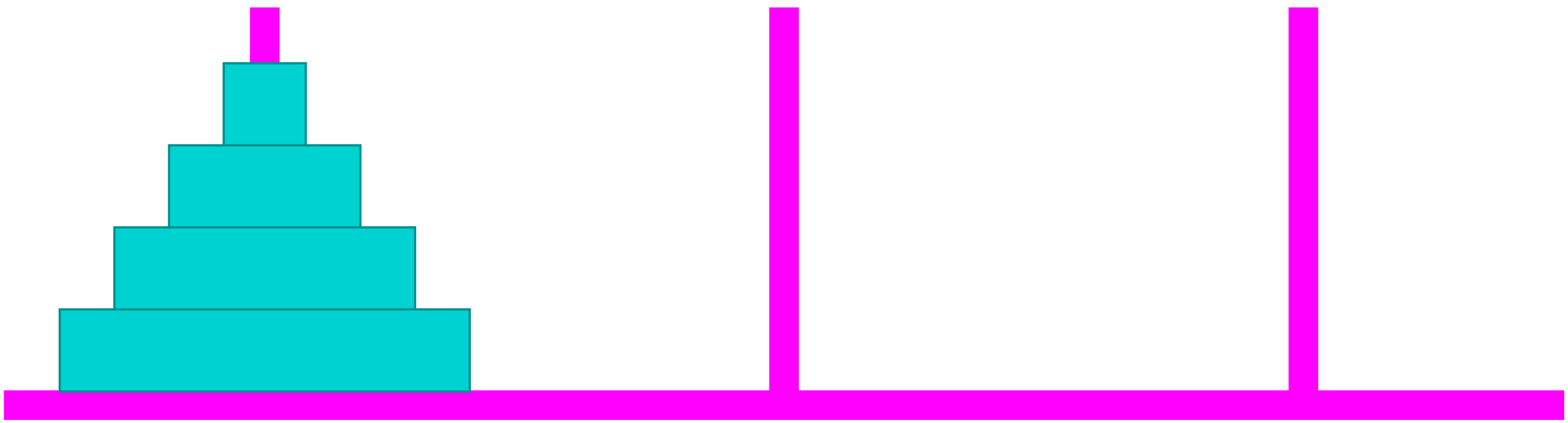
- Jede Rekursion lässt sich beseitigen, indem man den Aufruf-Keller explizit verwaltet.
- Nur im Falle von End-Rekursion kann man auf den Keller verzichten.
- Rekursion ist trotzdem nützlich, weil rekursive Programme oft leichter zu verstehen sind als äquivalente Programme ohne Rekursion ...

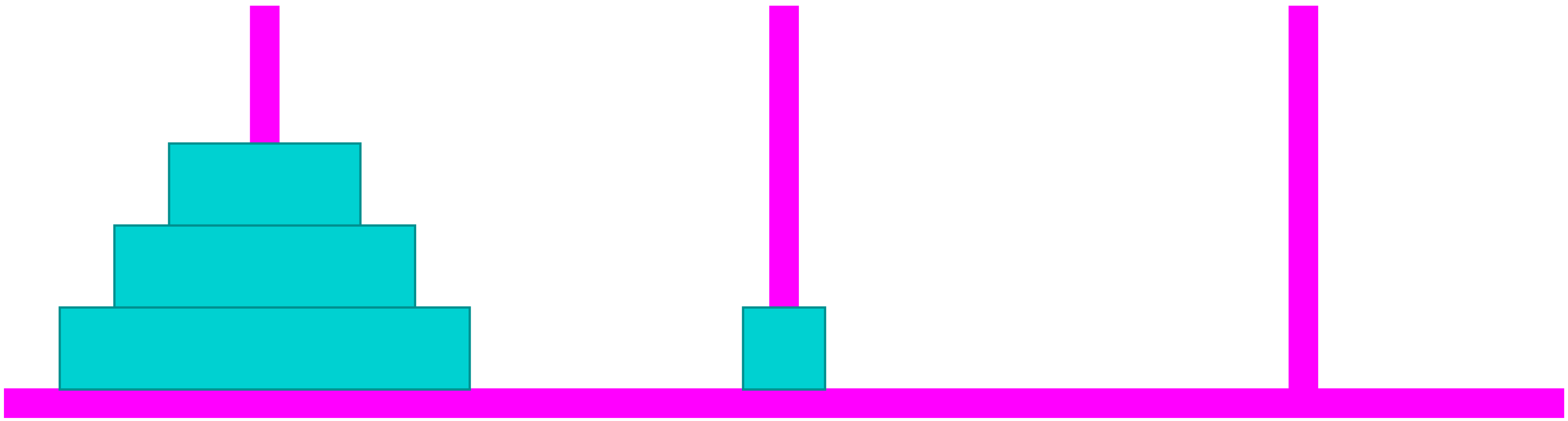
8 Die Türme von Hanoi

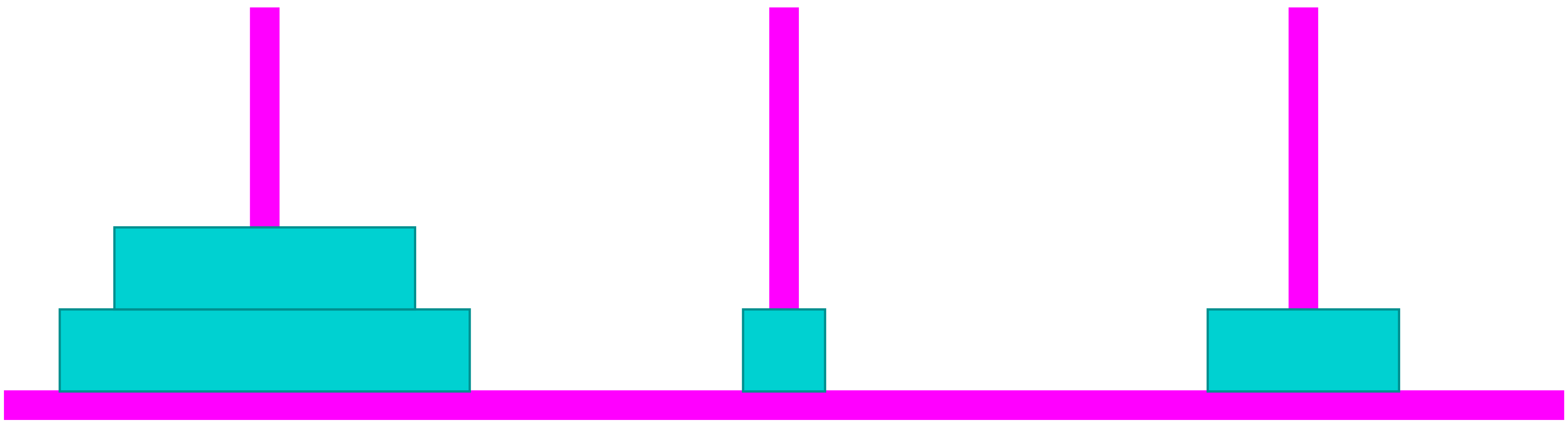
Problem:

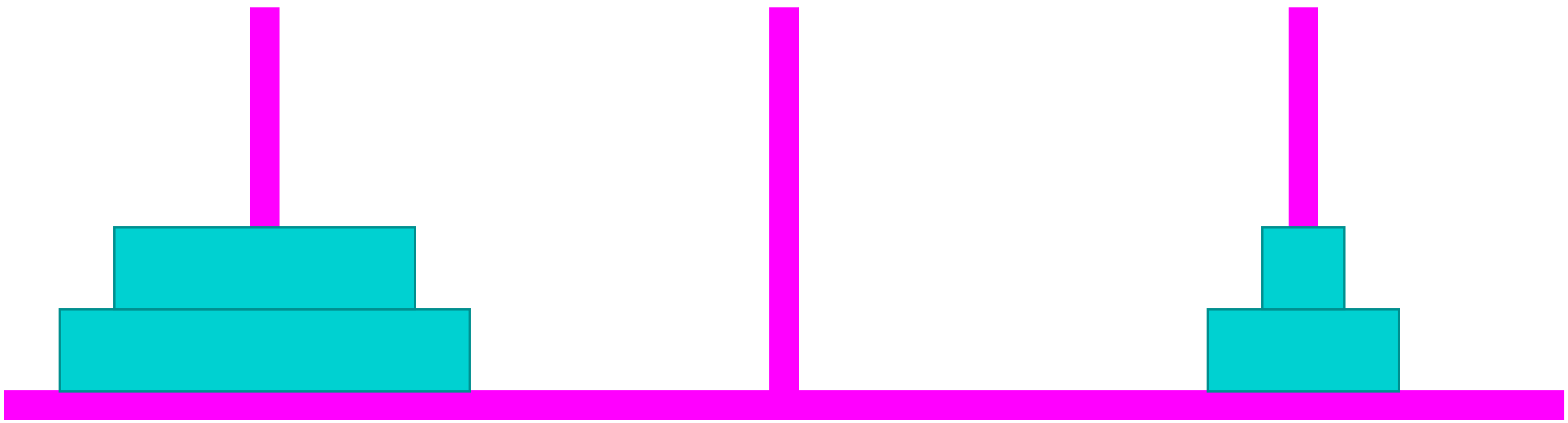


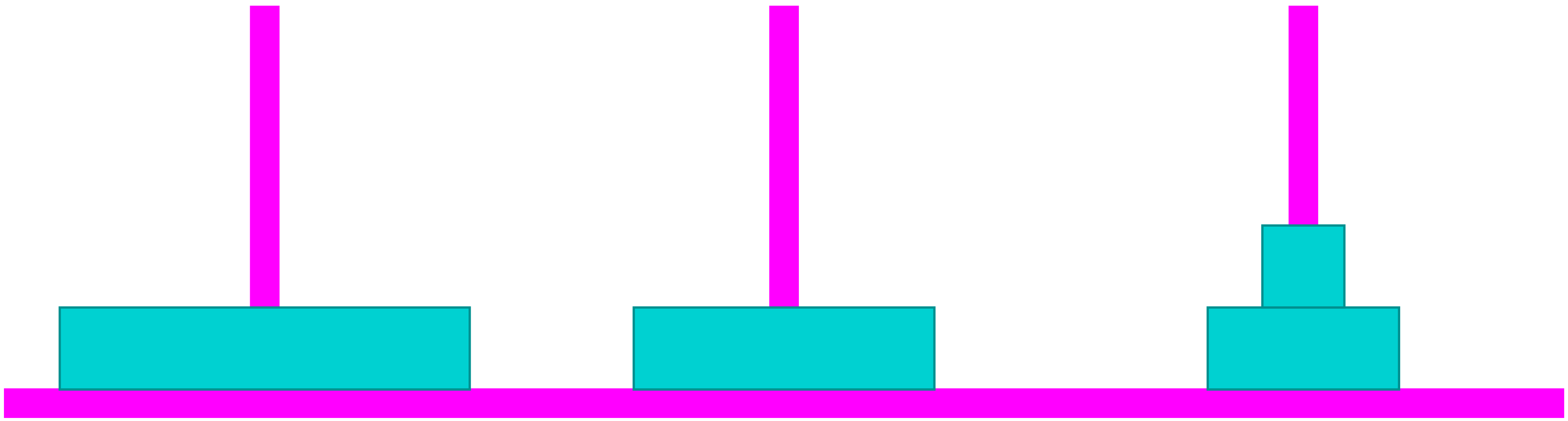
- Bewege den Stapel von links nach rechts!
- In jedem Zug darf genau ein Ring bewegt werden.
- Es darf nie ein größerer Ring auf einen kleineren gelegt werden.

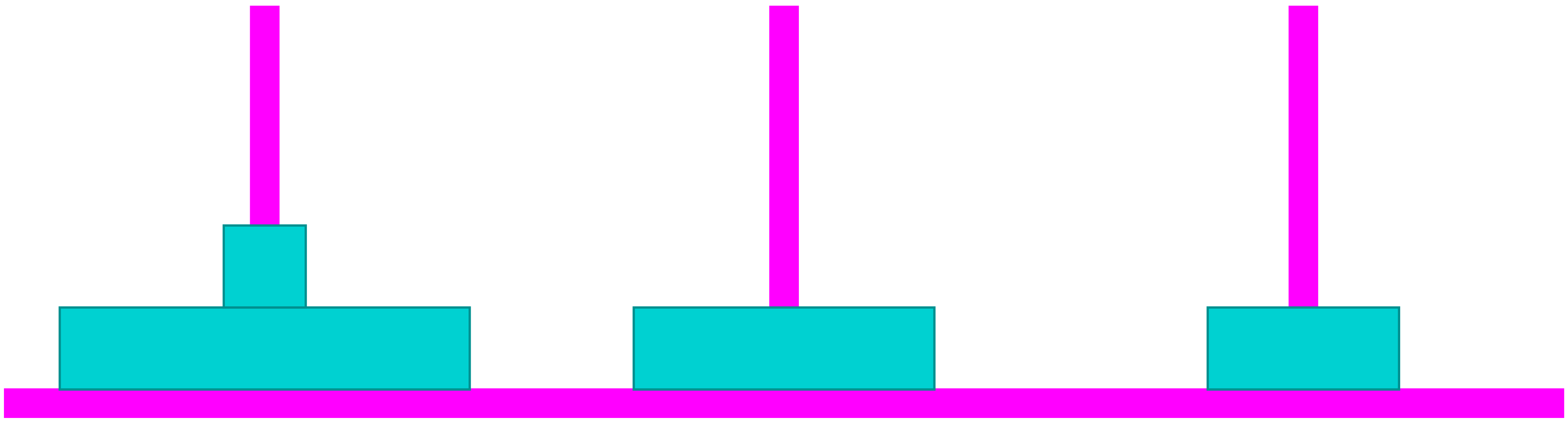


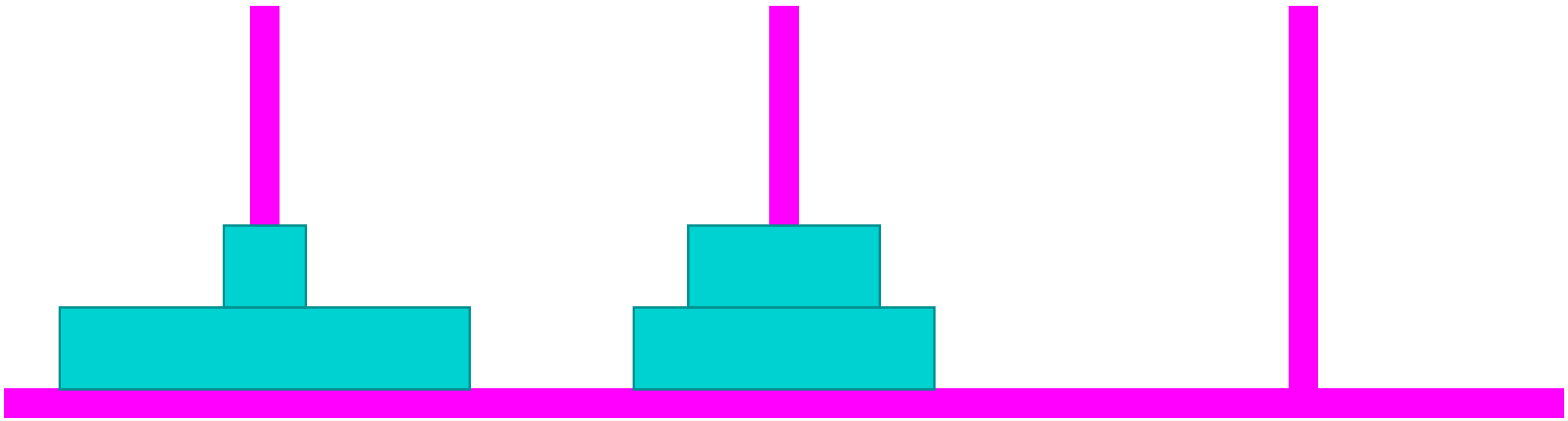


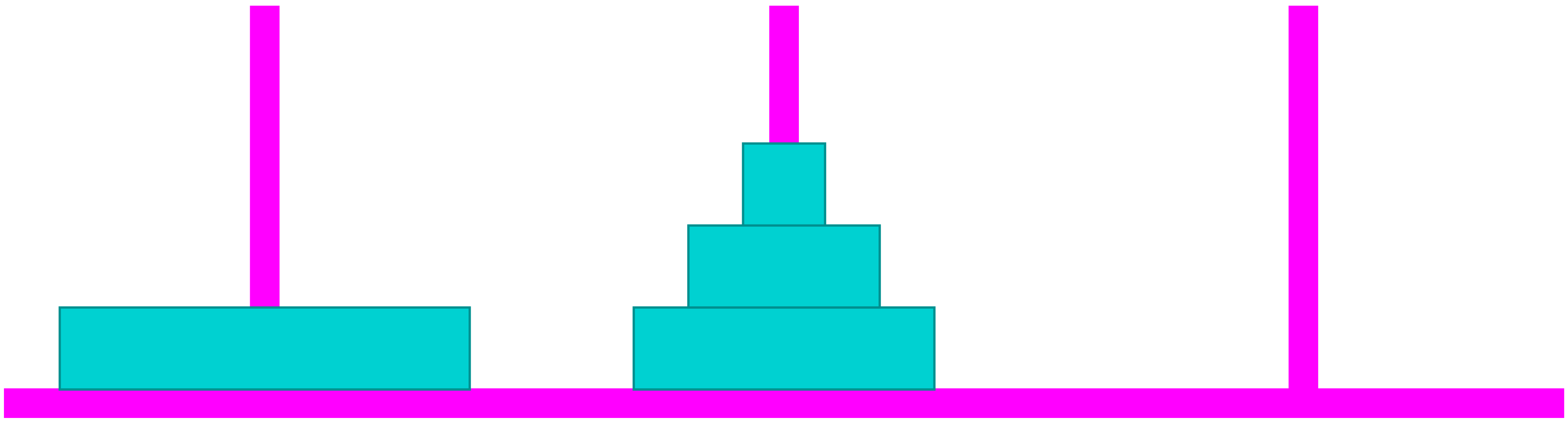


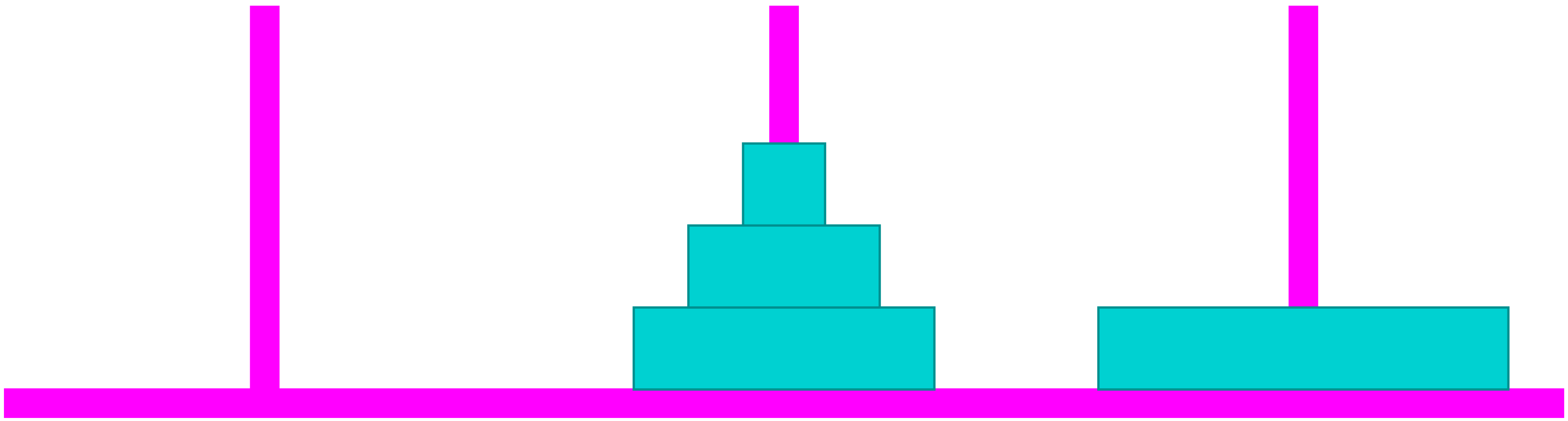


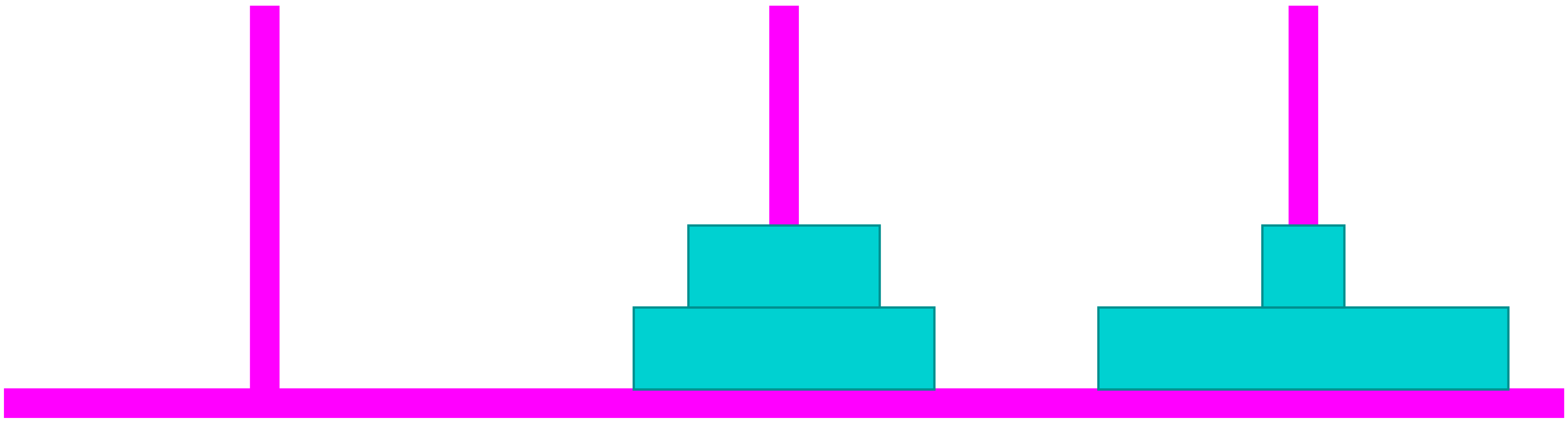


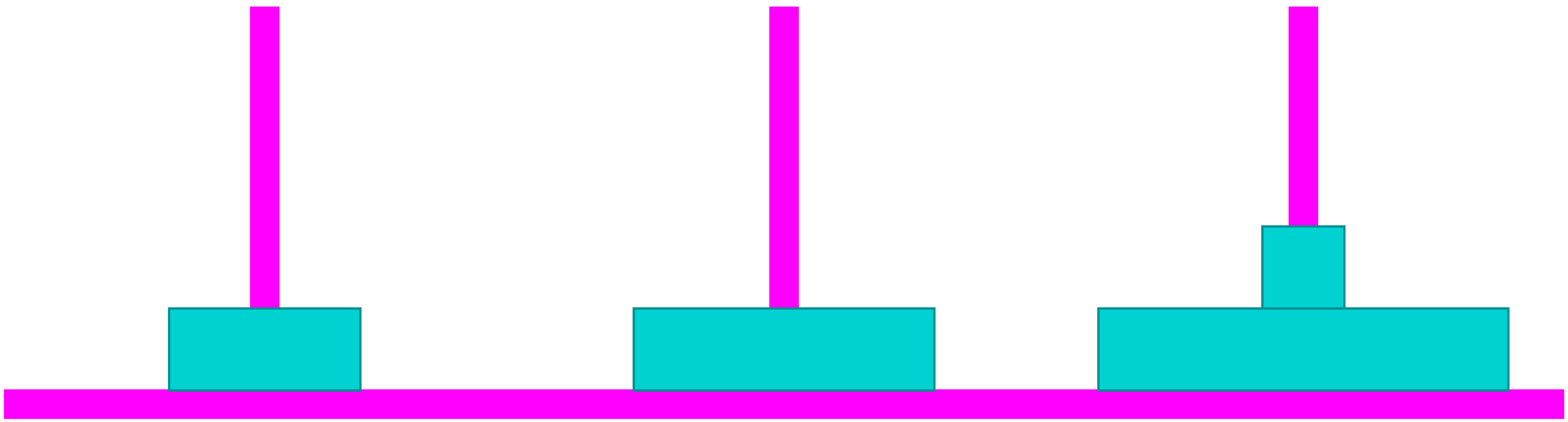


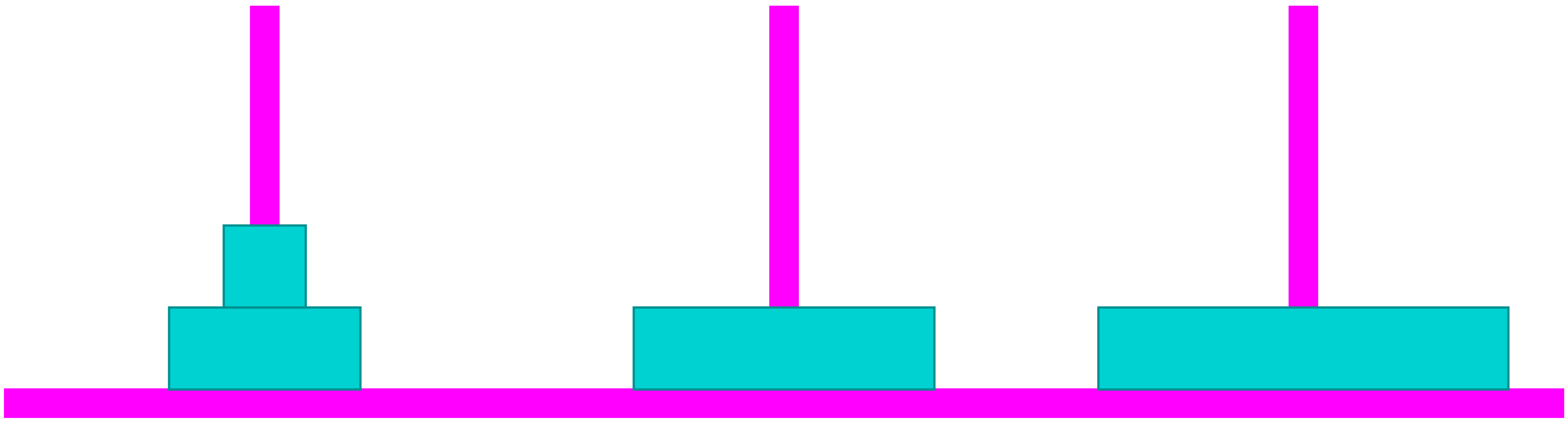


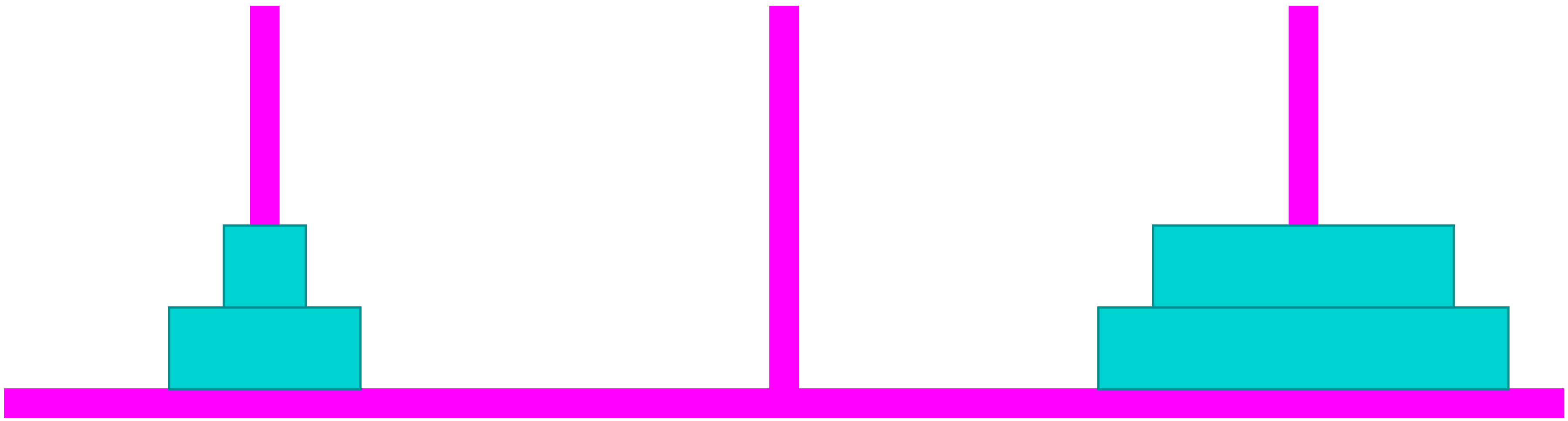


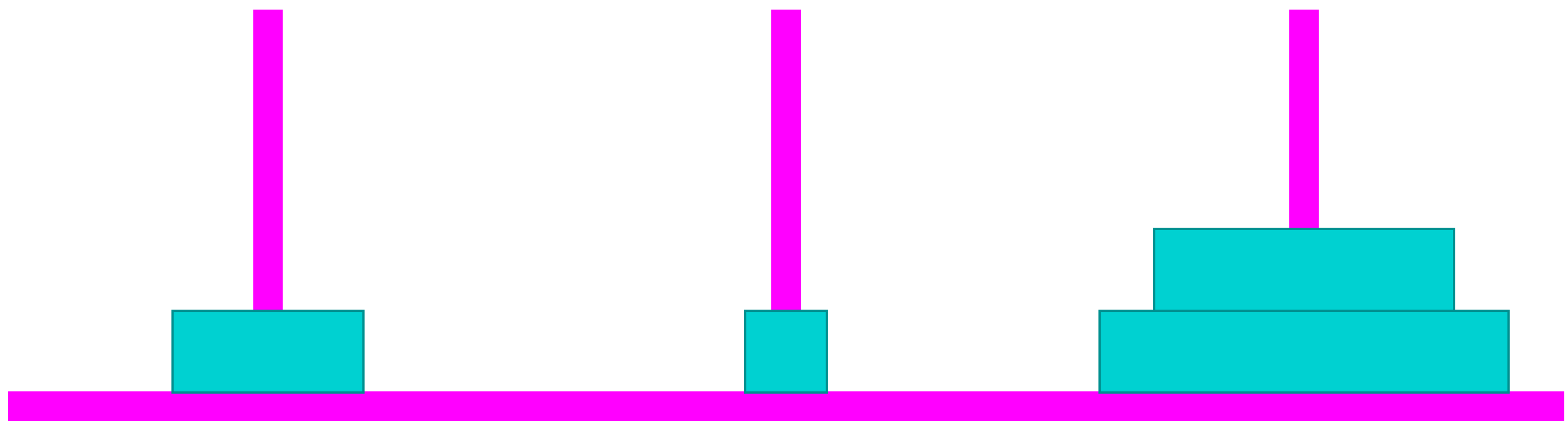


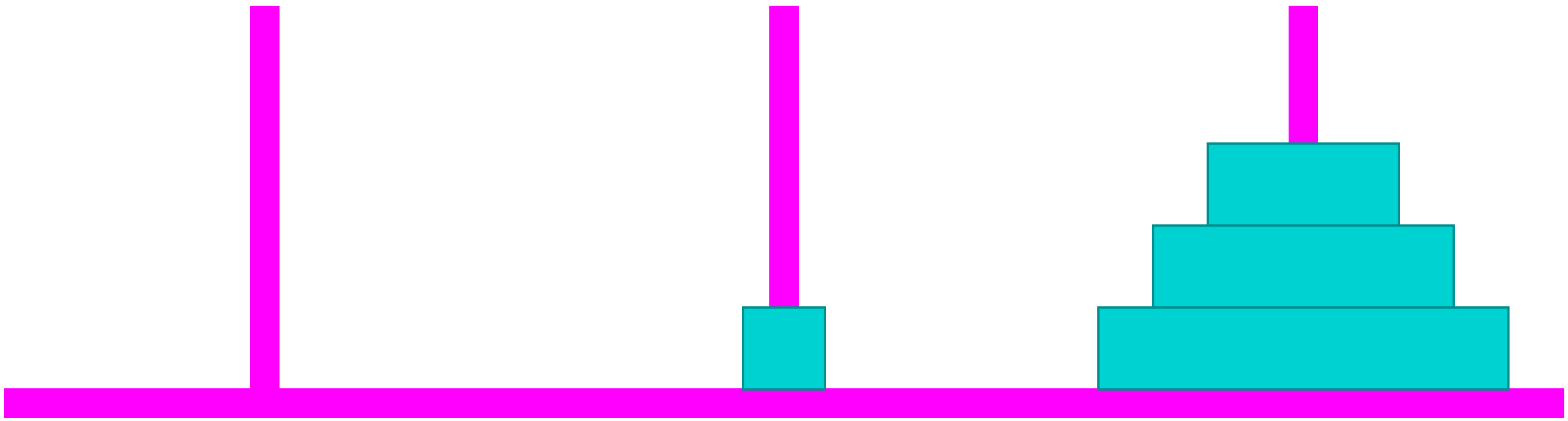


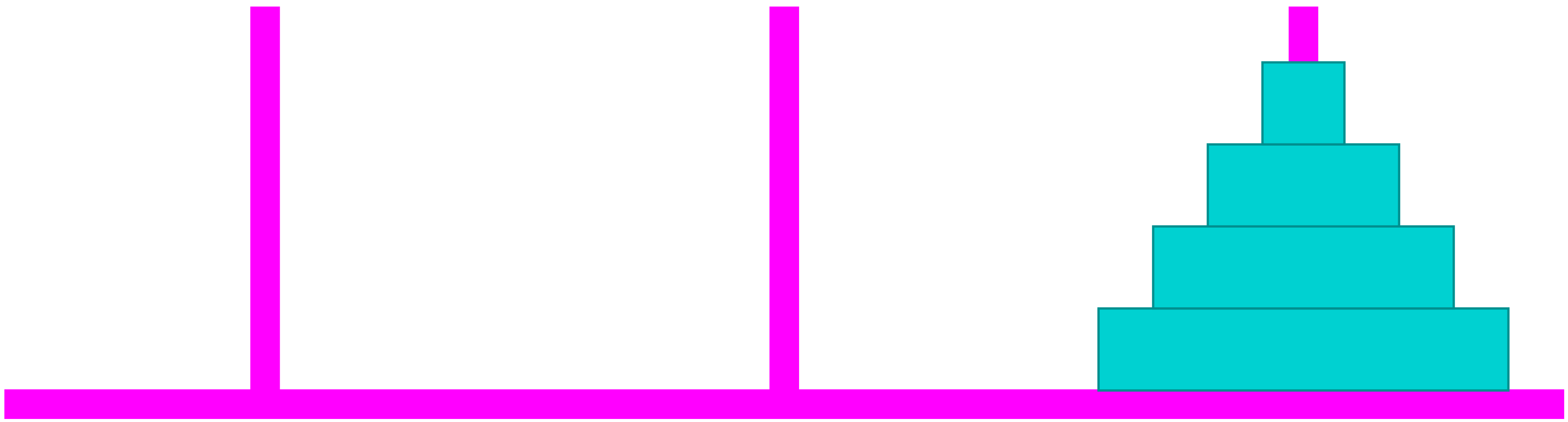












Idee:

- Versetzen eines Turms der Höhe $h = 0$ ist einfach: wir tun nichts.
- Versetzen eines Turms der Höhe $h > 0$ von Position a nach Position b zerlegen wir in drei Teilaufgaben:

  1. Versetzen der oberen $h - 1$ Scheiben auf den freien Platz;
  2. Versetzen der untersten Scheibe auf die Zielposition;
  3. Versetzen der zwischengelagerten Scheiben auf die Zielposition.

- Versetzen eines Turms der Höhe $h > 0$ erfordert also zweimaliges Versetzen eines Turms der Höhe $h - 1$.

```
public static void move (int h, byte a, byte b) {
  if (h > 0) {
     byte c = free (a,b);
     move (h-1,a,c);
     System.out.print ("\tmove "+a+" to "+b+"\n");
     move (h-1,c,b);
     }
  }
```

Bleibt die Ermittlung des freien Platzes ...

	0	1	2
0		2	1
1	2		0
2	1	0	

Offenbar hängt das Ergebnis nur von der Summe der beiden Argumente ab ...

	0	1	2
0		1	2
1	1		3
2	2	3	

Um solche Tabellen leicht implementieren zu können, stellt Java das `switch`-Statement zur Verfügung:

```
public static byte free (byte a, byte b) {
   switch (a+b) {
   case 1:   return 2;
   case 2:   return 1;
   case 3:   return 0;
   default:  return -1;
   }
}
```

Allgemeine Form eines `switch`-Statements:

$$
\begin{array}{l}
\texttt{switch (} \; expr \; \texttt{) \{} \\
\texttt{case} \; const_0 \; \texttt{:} \quad ss_0 \; (\, \texttt{break;} \,)? \\
\texttt{case} \; const_1 \; \texttt{:} \quad ss_1 \; (\, \texttt{break;} \,)? \\
\qquad \texttt{...} \\
\texttt{case} \; const_{k-1} \; \texttt{:} \quad ss_{k-1} \; (\, \texttt{break;} \,)? \\
(\, \texttt{default:} \quad ss_k \,)? \\
\texttt{\}}
\end{array}
$$

- $expr$ sollte eine ganze Zahl (oder ein `char`) sein.
- Die $const_i$ sind ganz-zahlige Konstanten.
- Die ss_i sind die alternativen Statement-Folgen.

- `default` beschreibt den Fall, bei dem keiner der Konstanten zutrifft.
- Fehlt ein `break`-Statement, wird mit der Statement-Folge der nächsten Alternative fortgefahren :-)

- `default` beschreibt den Fall, bei dem keiner der Konstanten zutrifft.
- Fehlt ein `break`-Statement, wird mit der Statement-Folge der nächsten Alternative fortgefahren :-)

Eine einfachere Lösung in unserem Fall ist :

```
public static byte free (byte a, byte b) {
   return (byte) (3-(a+b));
   }
```

Für einen Turm der Höhe $h = 4$ liefert das:

```
move 0 to 1
move 0 to 2
move 1 to 2
move 0 to 1
move 2 to 0
move 2 to 1
move 0 to 1
move 0 to 2
move 1 to 2
move 1 to 0
move 2 to 0
move 1 to 2
move 0 to 1
move 0 to 2
move 1 to 2
```

Bemerkungen:

- `move()` ist rekursiv, aber nicht end-rekursiv.
- Sei $N(h)$ die Anzahl der ausgegebenen Moves für einen Turm der Höhe $h \geq 0$. Dann ist

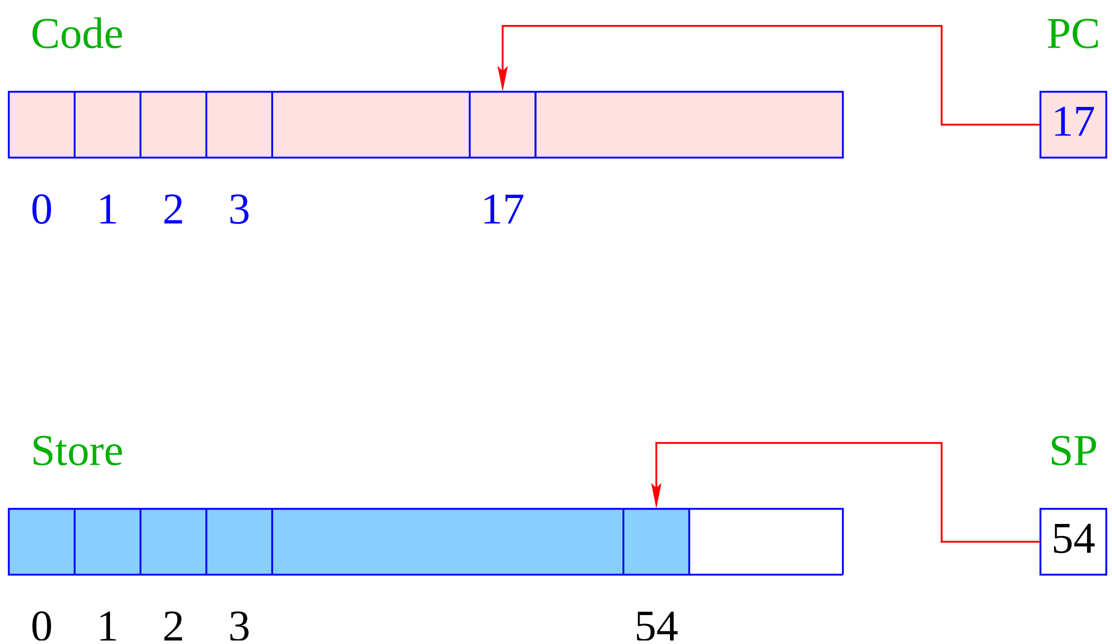
$$
\begin{aligned}
N(0) &= 0 \qquad\qquad \text{und für } h > 0, \\
N(h) &= 1 + 2 \cdot N(h-1)
\end{aligned}
$$

- Folglich ist $N(h) = 2^h - 1$.
- Bei genauerer Analyse des Problems lässt sich auch ein nicht ganz so einfacher nicht-rekursiver Algorithmus finden ... (wie könnte der aussehen? :-)

  Hinweis: Offenbar rückt die kleinste Scheibe in jedem zweiten Schritt eine Position weiter ...

9 Von MiniJava zur JVM

Architektur der JVM:

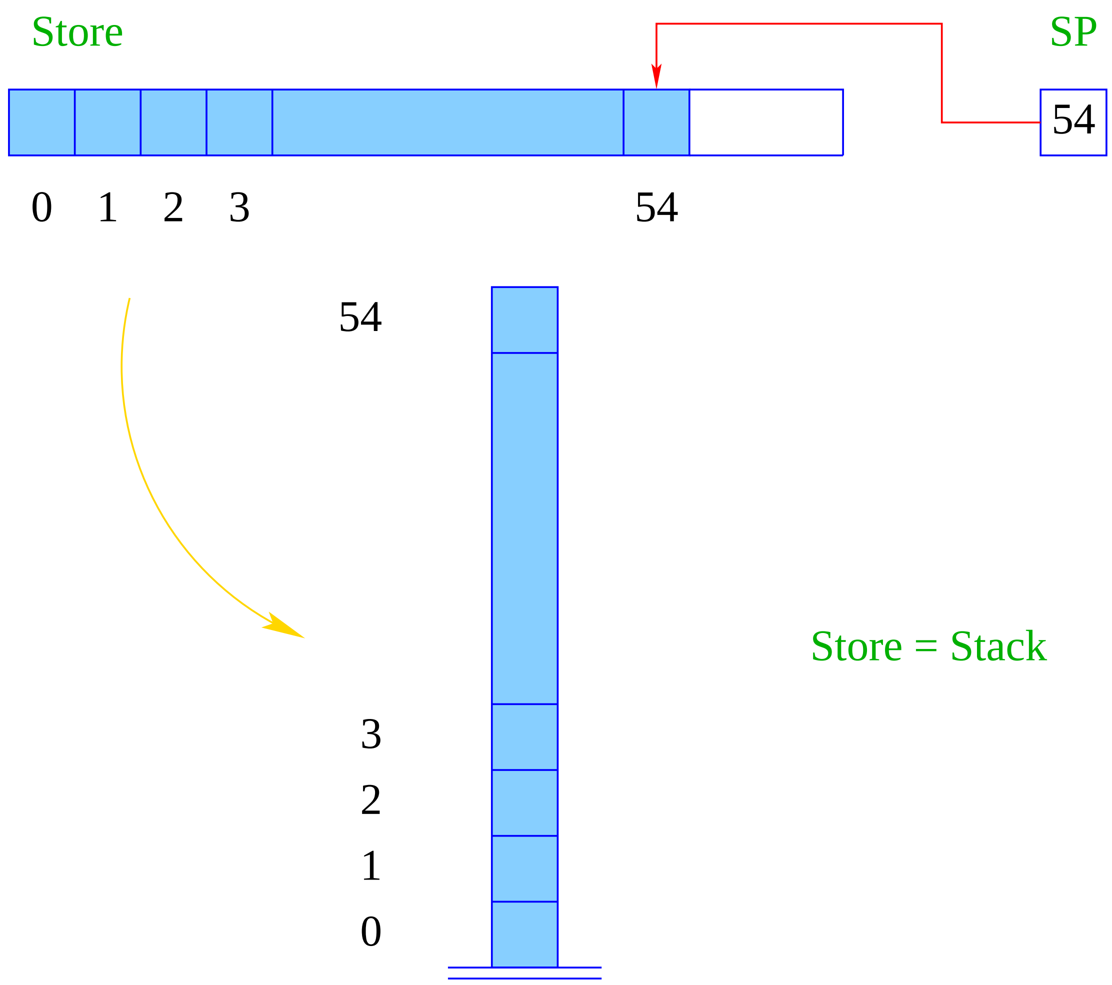


Code	=	enthält JVM-Programm;
		jede Zelle enthält einen Befehl;
PC	=	Program Counter –
		zeigt auf nächsten auszuführenden Befehl;
Store	=	Speicher für Daten;
		jede Zelle kann einen Wert aufnehmen;
SP	=	Stack-Pointer –
		zeigt auf oberste belegte Zelle.

Achtung:

- Programm wie Daten liegen im Speicher – aber in verschiedenen Abschnitten.
- Programm-Ausführung holt nacheinander Befehle aus Code und führt die entsprechenden Operationen auf Store aus.

Konvention:



Befehle der JVM:

`int`-Operatoren:	NEG, ADD, SUB, MUL, DIV, MOD
`boolean`-Operatoren:	NOT, AND, OR
Vergleichs-Operatoren:	LESS, LEQ, EQ, NEQ
Laden von Konstanten:	CONST i, TRUE, FALSE
Speicher-Operationen:	LOAD i, STORE i
Sprung-Befehle:	JUMP i, FJUMP i
IO-Befehle:	READ, WRITE
Reservierung von Speicher:	ALLOC i
Beendung des Programms:	HALT

Ein Beispiel-Programm:

```
    ALLOC 2
    READ
    STORE 0
    READ
    STORE 1
A:  LOAD 0
    LOAD 1
    NEQ
    FJUMP D
    LOAD 0
    LOAD 1
    LESS
    FJUMP B
    LOAD 1
    LOAD 0
    SUB
    STORE 1
    JUMP C
B:  LOAD 0
    LOAD 1
    SUB
    STORE 0
C:  JUMP A
D:  LOAD 1
    WRITE
    HALT
```

- Das Programm berechnet den GGT :-)
- Die Marken (Labels) A, B, C, D bezeichnen symbolisch die Adressen der zugehörigen Befehle:

$$\begin{array}{lcr} A & = & 5 \\ B & = & 18 \\ C & = & 22 \\ D & = & 23 \end{array}$$

- ... können vom Compiler leicht in die entsprechenden Adressen umgesetzt werden (wir benutzen sie aber, um uns besser im Programm zurechtzufinden :-)