

(2) Für  $f V = V \oplus \{e \mapsto a\}$  gilt:

$$\begin{aligned}
 f(V_1 \sqcup V_2) e' &= ((V_1 \sqcup V_2) \oplus \{e \mapsto a\}) e' \\
 &= (V_1 \sqcup V_2) e' \\
 &= (f V_1 \sqcup f V_2) e' \quad \text{sofern } e \neq e'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(V_1 \sqcup V_2) e &= ((V_1 \sqcup V_2) \oplus \{e \mapsto a\}) e \\
 &= a \\
 &= ((V_1 \oplus \{e \mapsto a\}) e) \cap ((V_2 \oplus \{e \mapsto a\}) e) \\
 &= (f V_1 \sqcup f V_2) e \quad \text{: -) }
 \end{aligned}$$

(3) Für  $f V e = (y \in V e) ? (V e \cup \{x\}) : ((V e) \setminus \{x\})$  gilt:

$$\begin{aligned}
 f(V_1 \sqcup V_2) e &= (((V_1 \sqcup V_2) e) \setminus \{x\}) \cup (y \in (V_1 \sqcup V_2) e) ? \{x\} : \emptyset \\
 &= ((V_1 e \cap V_2 e) \setminus \{x\}) \cup (y \in (V_1 e \cap V_2 e)) ? \{x\} : \emptyset \\
 &= ((V_1 e \cap V_2 e) \setminus \{x\}) \cup \\
 &\quad ((y \in V_1 e) ? \{x\} : \emptyset) \cap ((y \in V_2 e) ? \{x\} : \emptyset) \\
 &= (((V_1 e) \setminus \{x\}) \cup (y \in V_1 e) ? \{x\} : \emptyset) \cap \\
 &\quad (((V_2 e) \setminus \{x\}) \cup (y \in V_2 e) ? \{x\} : \emptyset) \\
 &= (f V_1 \sqcup f V_2) e \quad \text{:-)
 \end{aligned}$$

## Wir schließen:

→ Lösen des Constraint-Systems liefert die MOP-Lösung :-)

→ Sei  $\mathcal{V}$  diese Lösung.

Gilt  $x \in \mathcal{V}[u]e$ , enthält  $x$  an  $u$  den Wert von  $e$  —  
welchen wir in  $T_e$  abgespeichert haben

⇒

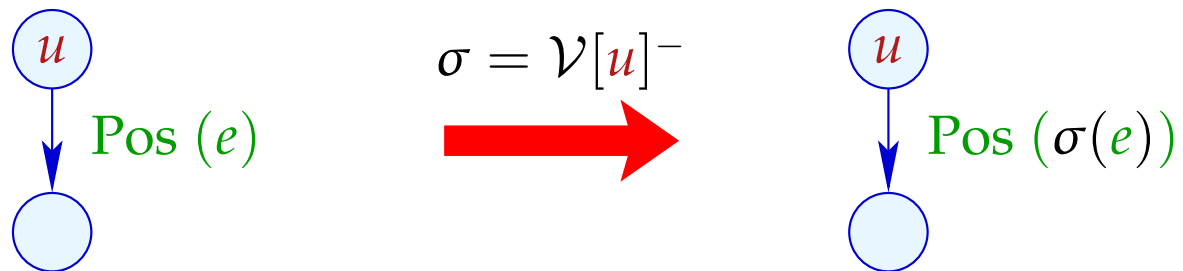
der Zugriff auf  $x$  kann durch Zugriff auf  $T_e$  ersetzt  
werden :-)

Für  $V \in \mathbb{V}$  sei  $V^-$  die **Variablen-Substitution** mit:

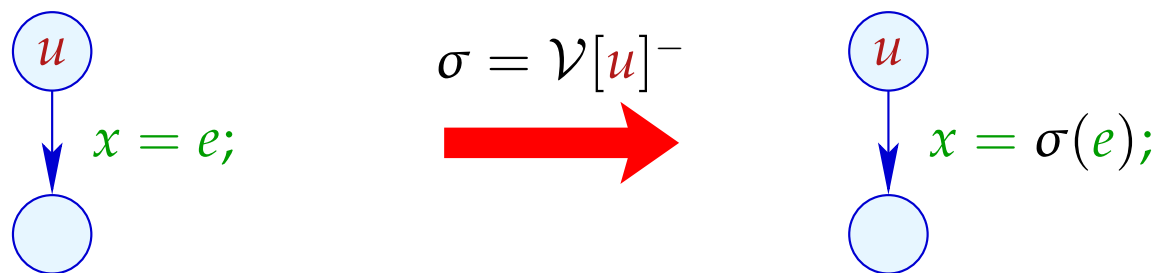
$$V^- x = \begin{cases} T_e & \text{falls } x \in V e \\ x & \text{sonst} \end{cases}$$

falls  $V e \cap V e' = \emptyset$  für  $e \neq e'$ . Andernfalls:  $V^- x = x$  :-)

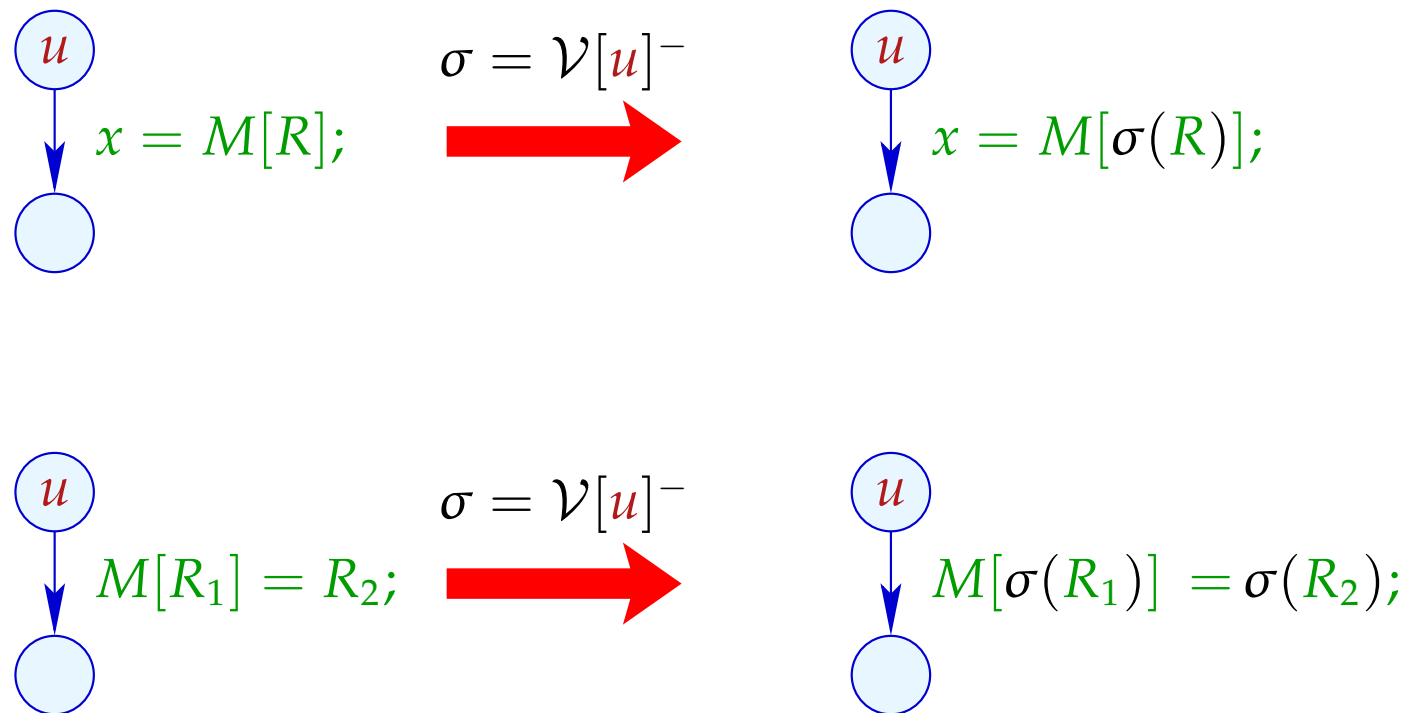
## Transformation 4:



... analog für Kanten mit  $\text{Neg}(e)$



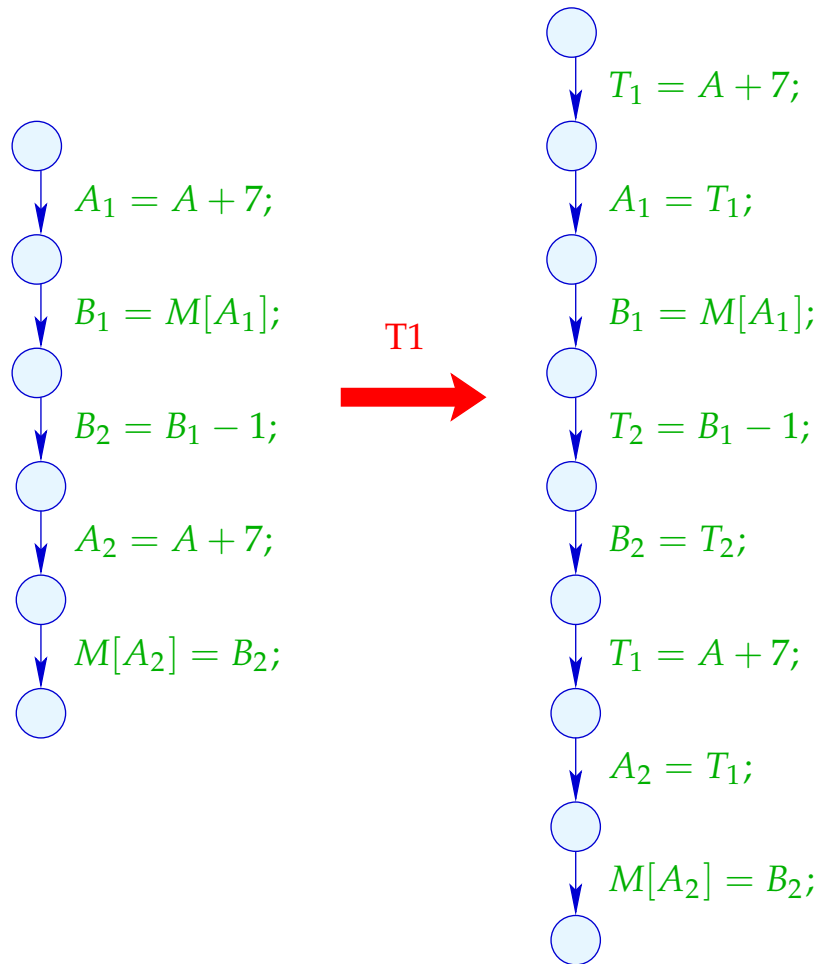
## Transformation 4 (Forts.):



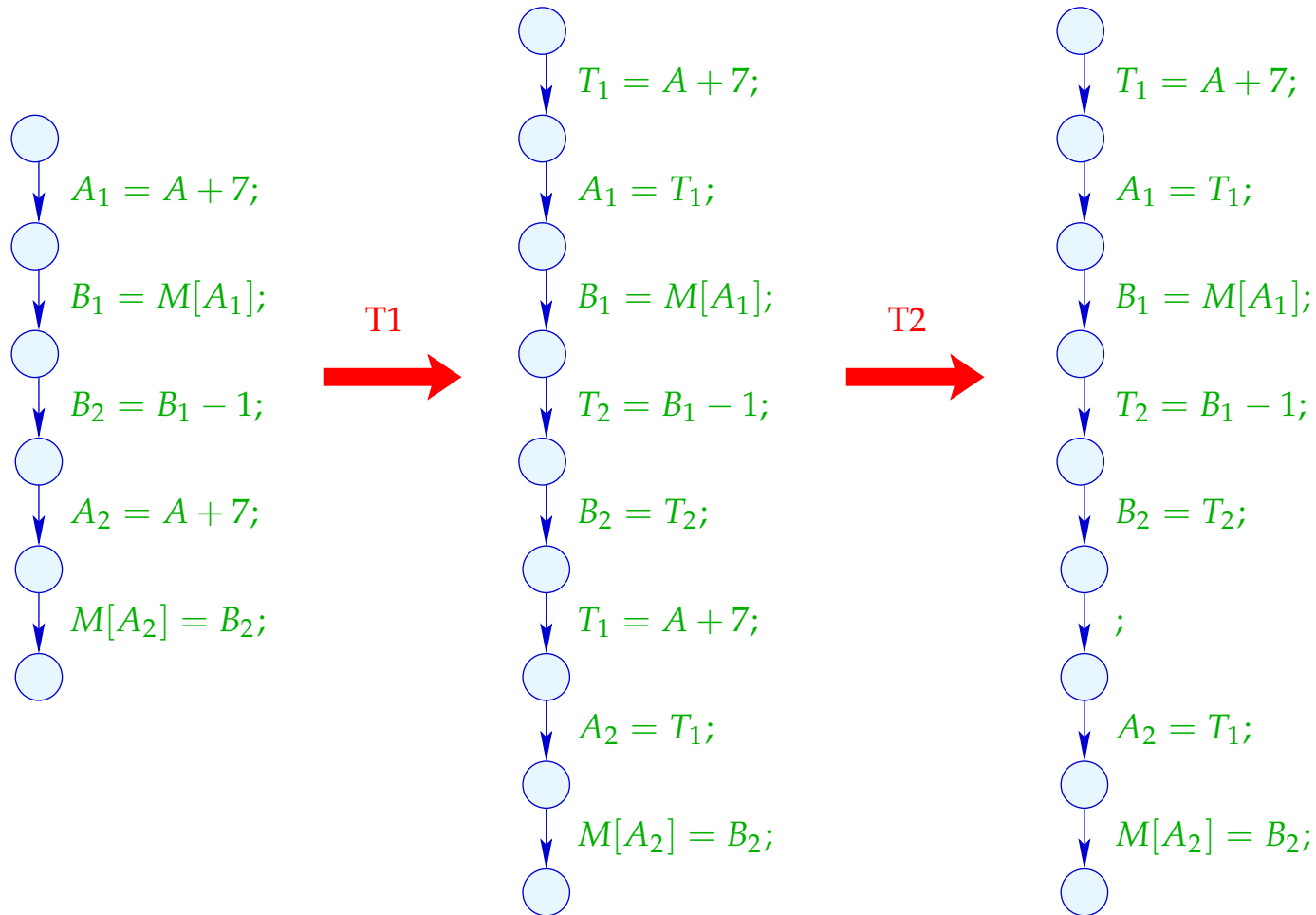
## Vorgehen insgesamt:

- (1) Verfügbarkeit von Ausdrücken: T1 + T2
  - + verringert arithmetische Operationen
  - fügt überflüssige Umspeicherungen ein
  
- (2) Werte von Variablen: T4
  - + erzeugt tote Variablen
  
- (3) (wahre) Lebendigkeit von Variablen: T3
  - + beseitigt Zuweisungen an tote Variablen

Beispiel:  $a[7]--i$

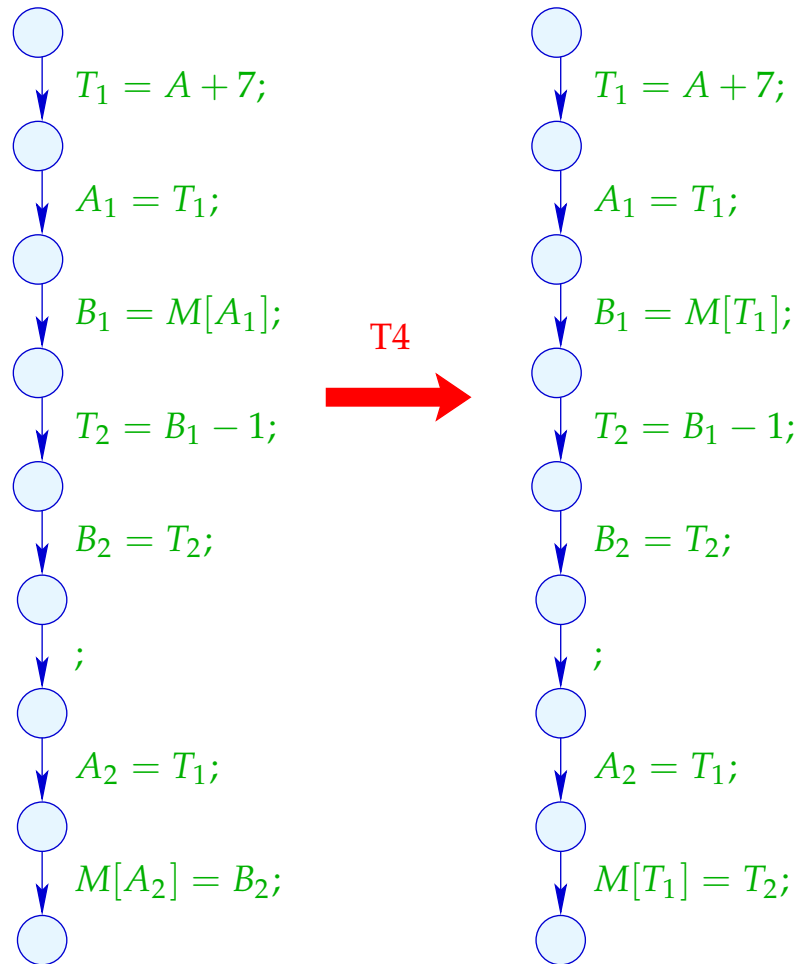


Beispiel:  $a[7]--i$

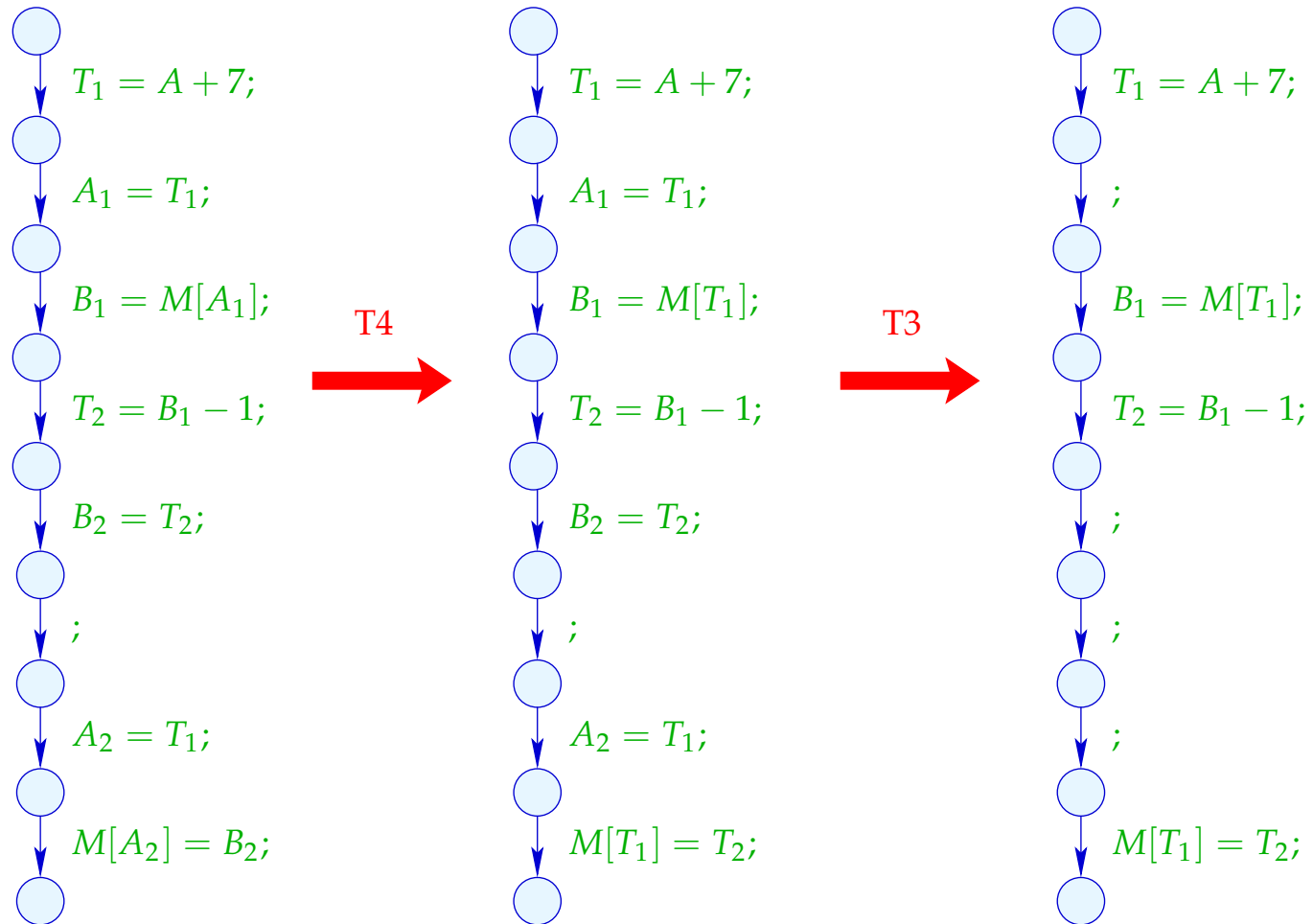




Beispiel (Forts.):  $a[7]--;$



# Beispiel (Forts.): $a[7]--;$



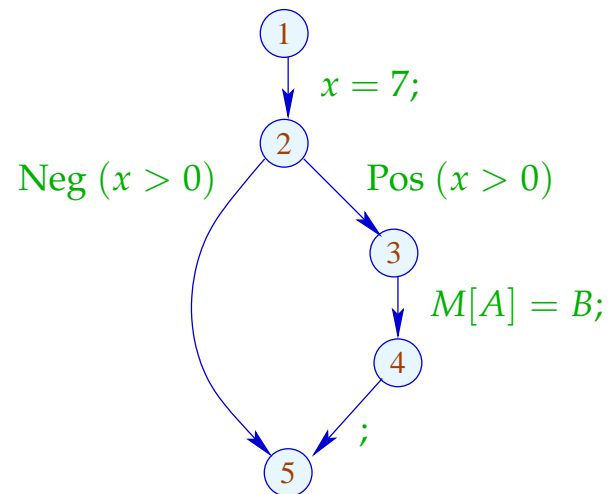
## 1.4 Konstanten-Propagation

Idee:

Führe möglichst große Teile des Codes bereits zur Compilezeit aus!

Beispiel:

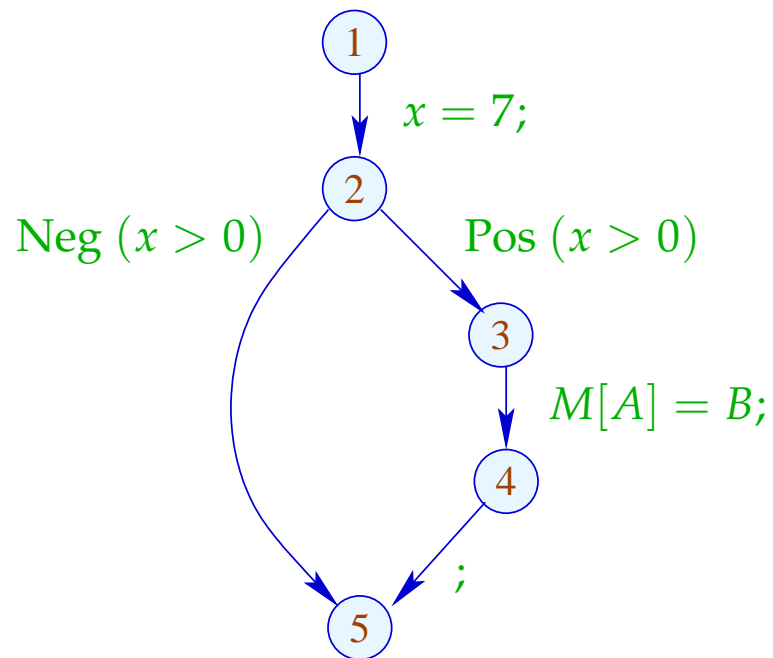
```
x = 7;  
if (x > 0)  
    M[A] = B;
```



Offenbar hat  $x$  stets den Wert 7 :-)

Deshalb wird **stets** der Speicherzugriff durchgeführt :-))

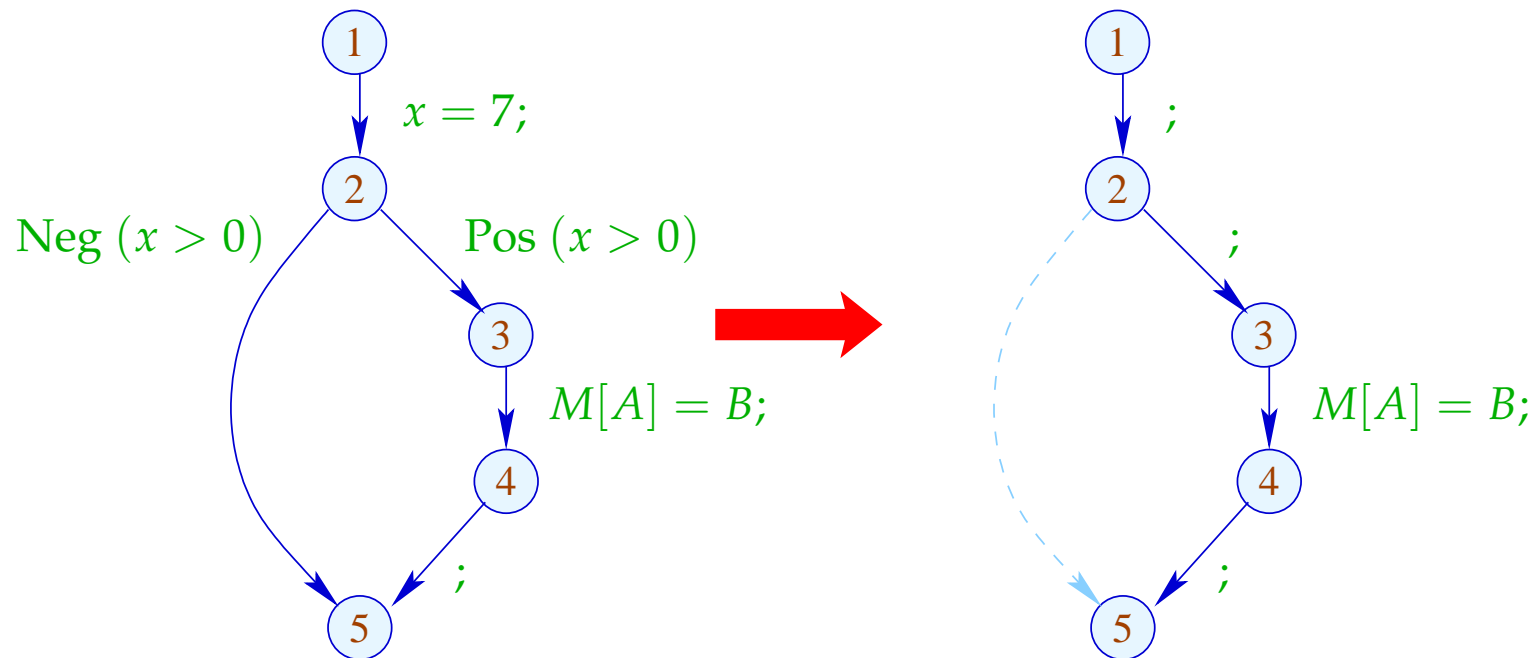
Ziel:



Offenbar hat  $x$  stets den Wert 7 :-)

Deshalb wird **stets** der Speicherzugriff durchgeführt :-))

Ziel:



Verallgemeinerung:

Partielle Auswertung



Neil D. Jones, DIKU, Kopenhagen

## Idee:

Entwerfe eine Analyse, die für jedes  $u$

- die Werte ermittelt, die Variablen **sicher** haben;
- mitteilt, ob  $u$  überhaupt erreichbar ist :-)

## Idee:

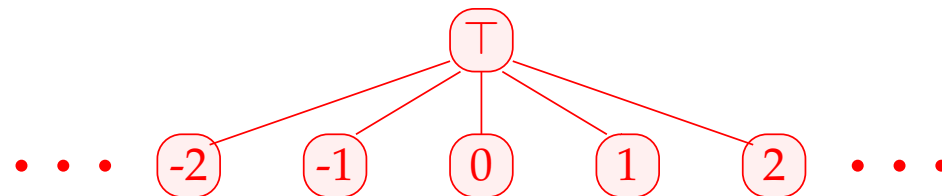
Entwerfe eine Analyse, die für jedes  $u$

- die Werte ermittelt, die Variablen **sicher** haben;
- mitteilt, ob  $u$  überhaupt erreichbar ist :-)

Den vollständigen Verband konstruieren wir in zwei Schritten.

(1) Die möglichen **Werte für Variablen**:

$$\mathbb{Z}^\top = \mathbb{Z} \cup \{\top\} \quad \text{mit} \quad x \sqsubseteq y \quad \text{gdw.} \quad y = \top \quad \text{oder} \quad x = y$$





**Achtung:**  $\mathbb{Z}^\top$  ist selbst **kein** vollständiger Verband :-)

$$(2) \quad \mathbb{D} = (\text{Vars} \rightarrow \mathbb{Z}^\top)_\perp = (\text{Vars} \rightarrow \mathbb{Z}^\top) \cup \{\perp\}$$

//  $\perp$  heißt: "nicht erreichbar" :-))

mit  $D_1 \sqsubseteq D_2$  gdw.  $\perp = D_1$  oder

$$D_1 x \sqsubseteq D_2 x \quad (x \in \text{Vars})$$

**Bemerkung:**  $\mathbb{D}$  ist ein vollständiger Verband :-)

**Achtung:**  $\mathbb{Z}^\top$  ist selbst **kein** vollständiger Verband :-)

$$(2) \quad \mathbb{D} = (\text{Vars} \rightarrow \mathbb{Z}^\top)_\perp = (\text{Vars} \rightarrow \mathbb{Z}^\top) \cup \{\perp\}$$

//  $\perp$  heißt: "nicht erreichbar" :-))

mit  $D_1 \sqsubseteq D_2$  gdw.  $\perp = D_1$  oder

$$D_1 x \sqsubseteq D_2 x \quad (x \in \text{Vars})$$

**Bemerkung:**  $\mathbb{D}$  ist ein vollständiger Verband :-)

Betrachte dazu  $X \subseteq \mathbb{D}$ . O.E.  $\perp \notin X$ .

Dann  $X \subseteq \text{Vars} \rightarrow \mathbb{Z}^\top$ .

Ist  $X = \emptyset$ , dann  $\bigsqcup X = \perp \in \mathbb{D}$  :-)

Ist  $X \neq \emptyset$ , dann ist  $\bigsqcup X = D$  mit

$$\begin{aligned} D x &= \bigsqcup \{f x \mid f \in X\} \\ &= \begin{cases} z & \text{falls } f x = z \quad (f \in X) \\ \top & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

:-))

Ist  $X \neq \emptyset$ , dann ist  $\sqcup X = D$  mit

$$\begin{aligned} D x &= \sqcup \{f x \mid f \in X\} \\ &= \begin{cases} z & \text{falls } f x = z \quad (f \in X) \\ \top & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

:-))

Zu jeder Kante  $k = (\_, lab, \_)$  konstruieren wir eine Effekt-Funktion  $\llbracket k \rrbracket^\# = \llbracket lab \rrbracket^\# : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ , die die konkrete Berechnung simuliert.

Offenbar ist  $\llbracket lab \rrbracket^\# \perp = \perp$  für alle  $lab$  :-)

Sei darum nun  $\perp \neq D \in Vars \rightarrow \mathbb{Z}^\top$ .

## Idee:

- Wir benutzen  $D$ , um die Werte von Ausdrücken zu ermitteln.

## Idee:

- Wir benutzen  $D$ , um die Werte von Ausdrücken zu ermitteln.
- Für manche Teilausdrücke erhalten wir  $\top$  :-)

## Idee:

- Wir benutzen  $D$ , um die Werte von Ausdrücken zu ermitteln.
- Für manche Teilausdrücke erhalten wir  $\top$  :-)



Wir müssen die konkreten Operatoren  $\square$  durch **abstrakte** Operatoren  $\square^\#$  ersetzen, die mit  $\top$  umgehen können:

$$a \square^\# b = \begin{cases} \top & \text{falls } a = \top \text{ oder } b = \top \\ a \square b & \text{sonst} \end{cases}$$

## Idee:

- Wir benutzen  $D$ , um die Werte von Ausdrücken zu ermitteln.
- Für manche Teilausdrücke erhalten wir  $\top$  :-)



Wir müssen die konkreten Operatoren  $\square$  durch **abstrakte** Operatoren  $\square^\#$  ersetzen, die mit  $\top$  umgehen können:

$$a \square^\# b = \begin{cases} \top & \text{falls } a = \top \text{ oder } b = \top \\ a \square b & \text{sonst} \end{cases}$$

- Mit den abstrakten Operatoren können wir eine **abstrakte** Ausdrucks-Auswertung definieren:

$$\llbracket e \rrbracket^\# : (\text{Vars} \rightarrow \mathbb{Z}^\top) \rightarrow \mathbb{Z}^\top$$



Abstrakte Ausdrucksauswertung ist wie konkrete Ausdrucksauswertung, aber mit abstrakten Werten und Operatoren. Hier:

$$\llbracket c \rrbracket^{\#} D = c$$

$$\llbracket e_1 \square e_2 \rrbracket^{\#} D = \llbracket e_1 \rrbracket^{\#} D \square^{\#} \llbracket e_2 \rrbracket^{\#} D$$

... analog für unäre Operatoren :-)

Abstrakte Ausdrucksauswertung ist wie konkrete Ausdrucksauswertung, aber mit abstrakten Werten und Operatoren. Hier:

$$\llbracket c \rrbracket^\# D = c$$

$$\llbracket e_1 \square e_2 \rrbracket^\# D = \llbracket e_1 \rrbracket^\# D \square^\# \llbracket e_2 \rrbracket^\# D$$

... analog für unäre Operatoren :-)

Beispiel:

$$D = \{x \mapsto 2, y \mapsto \top\}$$

$$\llbracket x + 7 \rrbracket^\# D = \llbracket x \rrbracket^\# D +^\# \llbracket 7 \rrbracket^\# D$$

$$= 2 +^\# 7$$

$$= 9$$

$$\llbracket x - y \rrbracket^\# D = 2 -^\# \top$$

$$= \top$$

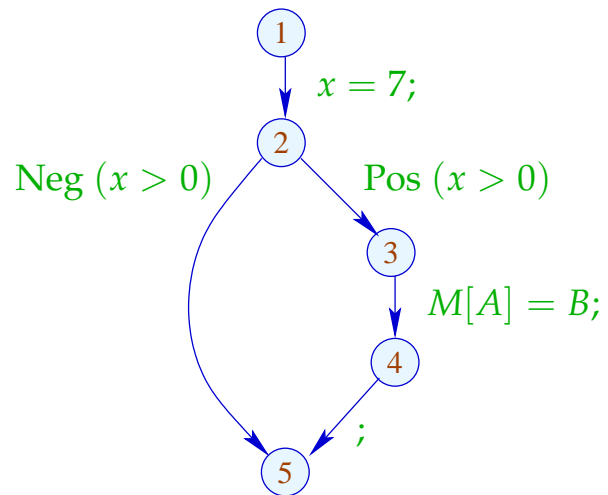
Damit erhalten wir für die Kanten-Effekte  $\llbracket lab \rrbracket^\#$  :

$$\begin{aligned}
 \llbracket ; \rrbracket^\# D &= D \\
 \llbracket \text{Pos}(e) \rrbracket^\# D &= \begin{cases} \perp & \text{falls } 0 = \llbracket e \rrbracket^\# D \\ D & \text{sonst} \end{cases} \\
 \llbracket \text{Neg}(e) \rrbracket^\# D &= \begin{cases} D & \text{falls } 0 \sqsubseteq \llbracket e \rrbracket^\# D \\ \perp & \text{sonst} \end{cases} \\
 \llbracket x = e; \rrbracket^\# D &= D \oplus \{x \mapsto \llbracket e \rrbracket^\# D\} \\
 \llbracket x = M[R]; \rrbracket^\# D &= D \oplus \{x \mapsto \top\} \\
 \llbracket M[R_1] = R_2; \rrbracket^\# D &= D
 \end{aligned}$$

... sofern  $D \neq \perp$  :-)

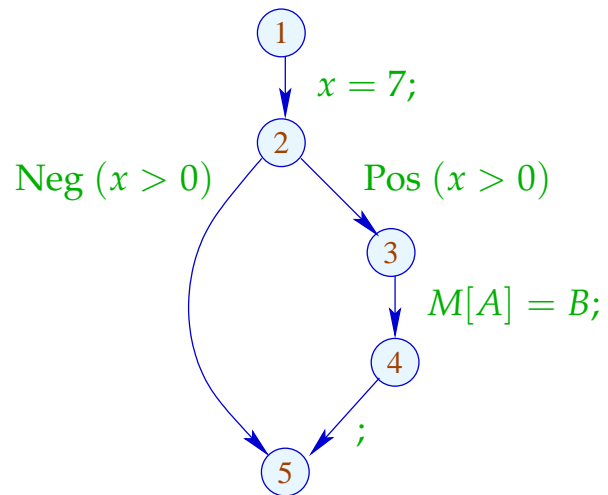
An *start* gilt  $D_{\perp} = \{x \mapsto \top \mid x \in Vars\}$ .

Beispiel:



An *start* gilt  $D_{\perp} = \{x \mapsto \top \mid x \in \text{Vars}\}$ .

Beispiel:



1	$\{x \mapsto \top\}$
2	$\{x \mapsto 7\}$
3	$\{x \mapsto 7\}$
4	$\{x \mapsto 7\}$
5	$\perp \sqcup \{x \mapsto 7\} = \{x \mapsto 7\}$

Die abstrakten Kanten-Effekte  $\llbracket k \rrbracket^\#$  setzen wir wieder zu den Effekten von Pfaden  $\pi = k_1 \dots k_r$  zusammen durch:

$$\llbracket \pi \rrbracket^\# = \llbracket k_r \rrbracket^\# \circ \dots \circ \llbracket k_1 \rrbracket^\# \quad : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$$

Idee zur Korrektheit:

Abstrakte Interpretation

Cousot, Cousot 1977



Patrick Cousot, ENS, Paris

Die abstrakten Kanten-Effekte  $\llbracket k \rrbracket^\#$  setzen wir wieder zu den Effekten von Pfaden  $\pi = k_1 \dots k_r$  zusammen durch:

$$\llbracket \pi \rrbracket^\# = \llbracket k_r \rrbracket^\# \circ \dots \circ \llbracket k_1 \rrbracket^\# \quad : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$$

Idee zur Korrektheit:

Abstrakte Interpretation

Cousot, Cousot 1977

Aufstellen einer Beschreibungsrelation  $\Delta$  zwischen **konkreten** Werten und deren Beschreibungen mit:

$$x \Delta a_1 \quad \wedge \quad a_1 \sqsubseteq a_2 \quad \Longrightarrow \quad x \Delta a_2$$

Konkretisierung:  $\gamma a = \{x \mid x \Delta a\}$

// liefert Menge der beschriebenen Werte :-)



(1) Werte:  $\Delta \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\top$

$$z \Delta a \quad \text{gdw.} \quad z = a \vee a = \top$$

Konkretisierung:

$$\gamma a = \begin{cases} \{a\} & \text{falls } a \sqsubset \top \\ \mathbb{Z} & \text{falls } a = \top \end{cases}$$

(1) Werte:  $\Delta \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\top$

$$z \Delta a \text{ gdw. } z = a \vee a = \top$$

Konkretisierung:

$$\gamma a = \begin{cases} \{a\} & \text{falls } a \sqsubset \top \\ \mathbb{Z} & \text{falls } a = \top \end{cases}$$

(2) Variablenbelegungen:  $\Delta \subseteq (\text{Vars} \rightarrow \mathbb{Z}) \times (\text{Vars} \rightarrow \mathbb{Z}^\top)_\perp$

$$\rho \Delta D \text{ gdw. } D \neq \perp \wedge \rho x \sqsubseteq D x \quad (x \in \text{Vars})$$

Konkretisierung:

$$\gamma D = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } D = \perp \\ \{\rho \mid \forall x : (\rho x) \Delta (D x)\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel:  $\{x \mapsto 1, y \mapsto -7\} \Delta \{x \mapsto \top, y \mapsto -7\}$

(3) Zustände:

$$\Delta \subseteq ((\mathit{Vars} \rightarrow \mathbb{Z}) \times (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z})) \times (\mathit{Vars} \rightarrow \mathbb{Z}^\top)_\perp$$
$$(\rho, \mu) \Delta D \quad \text{gdw.} \quad \rho \Delta D$$

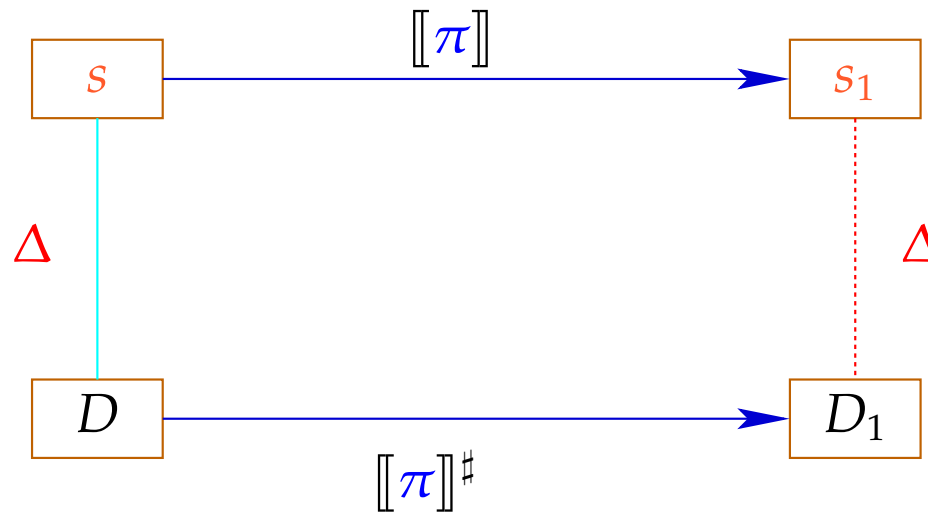
Konkretisierung:

$$\gamma D = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } D = \perp \\ \{(\rho, \mu) \mid \forall x : (\rho x) \Delta (D x)\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir zeigen:

(\*) Gilt  $s \Delta D$  und ist  $[[\pi]]s$  definiert, dann gilt auch:

$$([[ \pi ]] s) \Delta ([[ \pi ]]^\# D)$$



Die abstrakte Semantik simuliert die konkrete :-)

Insbesondere gilt:

$$[[\pi]] s \in \gamma ([[ \pi ]]^{\#} D)$$

Die abstrakte Semantik simuliert die konkrete :-)

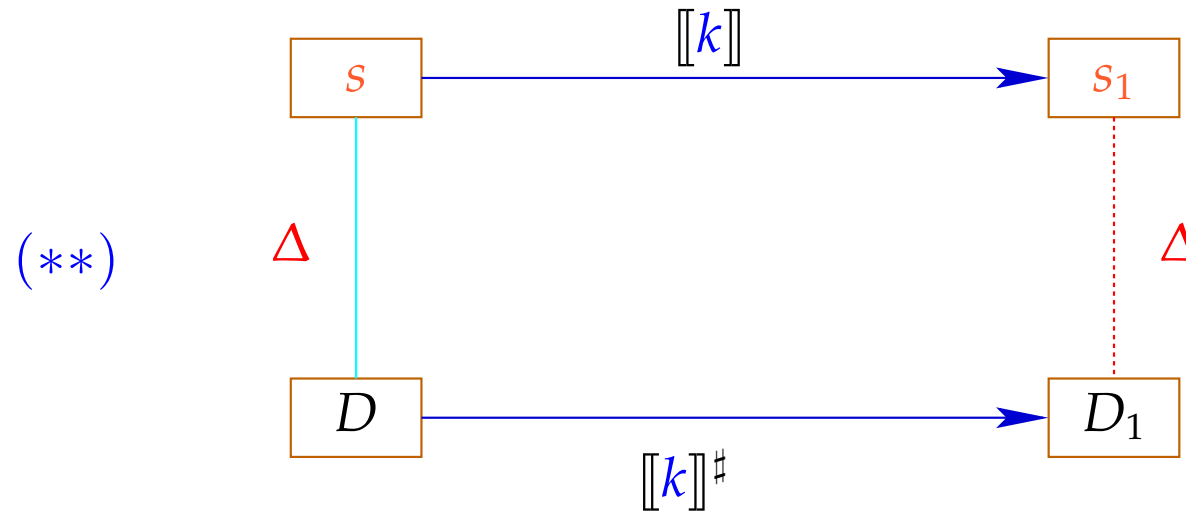
Insbesondere gilt:

$$\llbracket \pi \rrbracket s \in \gamma (\llbracket \pi \rrbracket^\# D)$$

Praktisch heißt das z.B., dass für  $D x = -7$  gilt:

$$\begin{aligned} \rho' x &= -7 \text{ für alle } \rho' \in \gamma D \\ \implies \rho_1 x &= -7 \text{ für } (\rho_1, \_) = \llbracket \pi \rrbracket s \end{aligned}$$

Zum Beweis von  $(*)$  zeigen wir für jede Kante  $k$ :



Dann folgt  $(*)$  mittels Induktion  $:-)$

Zum Beweis von  $(**)$  zeigen wir für jeden Ausdruck  $e$ :

$(***)$   $(\llbracket e \rrbracket \rho) \Delta (\llbracket e \rrbracket^\# D)$  sofern nur  $\rho \Delta D$



Zum Beweis von  $(**)$  zeigen wir für jeden Ausdruck  $e$ :

$(***)$   $(\llbracket e \rrbracket \rho) \Delta (\llbracket e \rrbracket^\# D)$  sofern nur  $\rho \Delta D$

Zum Beweis von  $(***)$  zeigen wir für jeden Operator  $\square$ :

$(x \square y) \Delta (x^\# \square^\# y^\#)$  sofern  $x \Delta x^\# \wedge y \Delta y^\#$

Zum Beweis von  $(**)$  zeigen wir für jeden Ausdruck  $e$ :

$(***)$   $(\llbracket e \rrbracket \rho) \Delta (\llbracket e \rrbracket^\# D)$  sofern nur  $\rho \Delta D$

Zum Beweis von  $(***)$  zeigen wir für jeden Operator  $\square$ :

$(x \square y) \Delta (x^\# \square^\# y^\#)$  sofern  $x \Delta x^\# \wedge y \Delta y^\#$

So hatten wir die Operatoren  $\square^\#$  aber gerade definiert :-)

Nun zeigen wir  $(**)$  durch Fallunterscheidung nach der Kanten-Beschriftung  $lab$ .

Sei  $s = (\rho, \mu) \Delta D$ . Insbesondere ist  $\perp \neq D : Vars \rightarrow \mathbb{Z}^\top$

Fall  $x = e;$ :

$$\rho_1 = \rho \oplus \{x \mapsto \llbracket e \rrbracket \rho\} \quad \mu_1 = \mu$$

$$D_1 = D \oplus \{x \mapsto \llbracket e \rrbracket^\# D\}$$

$$\implies (\rho_1, \mu_1) \Delta D_1$$

Fall  $x = M[R];$ :

$$\rho_1 = \rho \oplus \{x \mapsto \mu(\rho R)\} \quad \mu_1 = \mu$$

$$D_1 = D \oplus \{x \mapsto \top\}$$

$$\implies (\rho_1, \mu_1) \Delta D_1$$

Fall  $M[R_1] = R_2;$ :

$$\rho_1 = \rho \quad \mu_1 = \mu \oplus \{\rho R_1 \mapsto \rho R_2\}$$

$$D_1 = D$$

$$\implies (\rho_1, \mu_1) \Delta D_1$$

Fall  $\boxed{\text{Neg}(e)}$  :

$(\rho_1, \mu_1) = s$ , wobei:

$$0 = \llbracket e \rrbracket \rho$$

$$\Delta \llbracket e \rrbracket^\# D$$

$$\implies 0 \sqsubseteq \llbracket e \rrbracket^\# D$$

$$\implies \perp \neq D_1 = D$$

$$\implies (\rho_1, \mu_1) \Delta D_1$$

Fall  $\boxed{\text{Pos}(e)}$  :  $(\rho_1, \mu_1) = s$ , wobei:

$$0 \neq \llbracket e \rrbracket \rho$$

$$\Delta \llbracket e \rrbracket^\# D$$

$$\implies 0 \neq \llbracket e \rrbracket^\# D$$

$$\implies \perp \neq D_1 = D$$

$$\implies (\rho_1, \mu_1) \Delta D_1$$

:-)

Wir schließen: Die Behauptung  $(*)$  stimmt :-))

Die MOP-Lösung:

$$\mathcal{D}^*[v] = \bigsqcup \{ \llbracket \pi \rrbracket^\# D_0 \mid \pi : \textit{start} \rightarrow^* v \}$$

wobei  $D_0 x = \top$  ( $x \in \textit{Vars}$ ).

Wir schließen: Die Behauptung  $(*)$  stimmt  $(:-))$

Die MOP-Lösung:

$$\mathcal{D}^*[v] = \bigsqcup \{ \llbracket \pi \rrbracket^\# D_0 \mid \pi : \text{start} \rightarrow^* v \}$$

wobei  $D_0 x = \top$  ( $x \in \text{Vars}$ ).

Wegen  $(*)$  gilt für alle Anfangszustände  $s$  und alle Berechnungen  $\pi$ , die  $v$  erreichen:

$$(\llbracket \pi \rrbracket s) \Delta (\mathcal{D}^*[v])$$



Wir schließen: Die Behauptung  $(*)$  stimmt  $:-))$

Die MOP-Lösung:

$$\mathcal{D}^*[v] = \bigsqcup \{ \llbracket \pi \rrbracket^\# D_0 \mid \pi : \text{start} \rightarrow^* v \}$$

wobei  $D_0 x = \top$  ( $x \in \text{Vars}$ ).

Wegen  $(*)$  gilt für alle Anfangszustände  $s$  und alle Berechnungen  $\pi$ , die  $v$  erreichen:

$$(\llbracket \pi \rrbracket s) \Delta (\mathcal{D}^*[v])$$

Zur Approximation des MOP benutzen wir unser Constraint-System  $:-))$