

(2) Für $f V = V \oplus \{e \mapsto a\}$ gilt:

$$\begin{aligned}
 f(V_1 \sqcup V_2) e' &= ((V_1 \sqcup V_2) \oplus \{e \mapsto a\}) e' \\
 &= (V_1 \sqcup V_2) e' \\
 &= (f V_1 \sqcup f V_2) e' \quad \text{sofern } e \neq e'
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f(V_1 \sqcup V_2) e &= ((V_1 \sqcup V_2) \oplus \{e \mapsto a\}) e \\
 &= a \\
 &= ((V_1 \oplus \{e \mapsto a\}) e) \cap ((V_2 \oplus \{e \mapsto a\}) e) \\
 &= (f V_1 \sqcup f V_2) e \quad \text{: -)
 \end{aligned}$$

(3) Für $f V e = (y \in V e) ? (V e \cup \{x\}) : ((V e) \setminus \{x\})$ gilt:

$$\begin{aligned}
 f(V_1 \sqcup V_2) e &= (((V_1 \sqcup V_2) e) \setminus \{x\}) \cup (y \in (V_1 \sqcup V_2) e) ? \{x\} : \emptyset \\
 &= ((V_1 e \cap V_2 e) \setminus \{x\}) \cup (y \in (V_1 e \cap V_2 e)) ? \{x\} : \emptyset \\
 &= ((V_1 e \cap V_2 e) \setminus \{x\}) \cup \\
 &\quad ((y \in V_1 e) ? \{x\} : \emptyset) \cap ((y \in V_2 e) ? \{x\} : \emptyset) \\
 &= (((V_1 e) \setminus \{x\}) \cup (y \in V_1 e) ? \{x\} : \emptyset) \cap \\
 &\quad (((V_2 e) \setminus \{x\}) \cup (y \in V_2 e) ? \{x\} : \emptyset) \\
 &= (f V_1 \sqcup f V_2) e \quad \text{:-)
 \end{aligned}$$

Wir schließen:

→ Lösen des Constraint-Systems liefert die MOP-Lösung :-)

→ Sei \mathcal{V} diese Lösung.

Gilt $x \in \mathcal{V}[u]e$, enthält x an u den Wert von e —
welchen wir in T_e abgespeichert haben

⇒

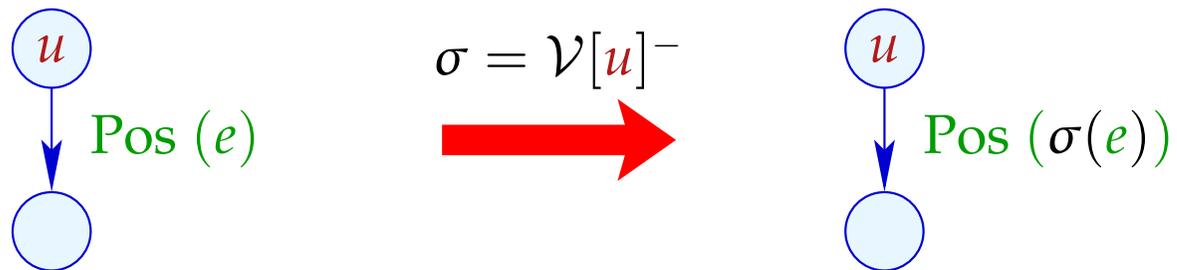
der Zugriff auf x kann durch Zugriff auf T_e ersetzt
werden :-)

Für $V \in \mathbb{V}$ sei V^- die **Variablen-Substitution** mit:

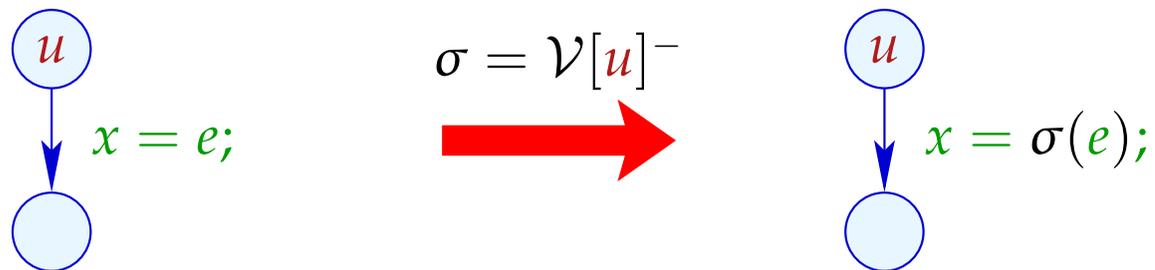
$$V^- x = \begin{cases} T_e & \text{falls } x \in V e \\ x & \text{sonst} \end{cases}$$

falls $V e \cap V e' = \emptyset$ für $e \neq e'$. Andernfalls: $V^- x = x$:-)

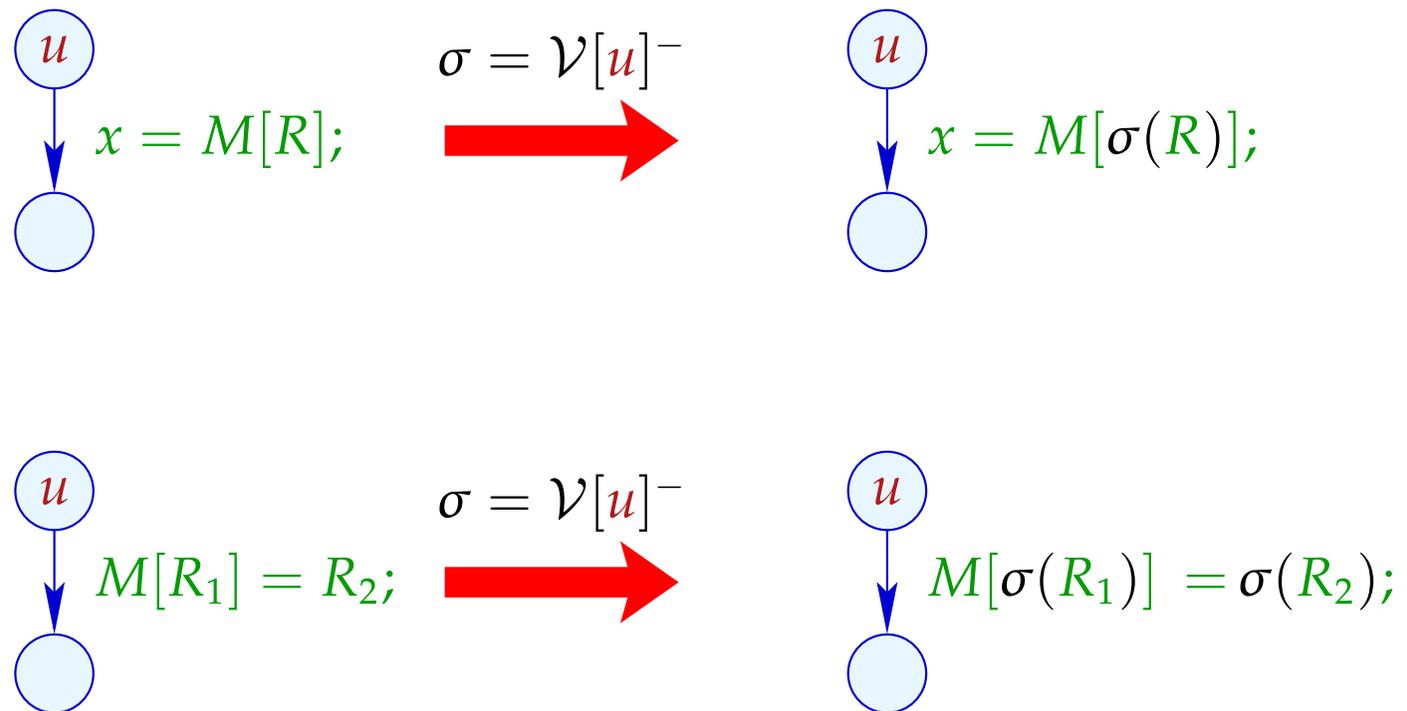
Transformation 4:



... analog für Kanten mit $\text{Neg}(e)$



Transformation 4 (Forts.):



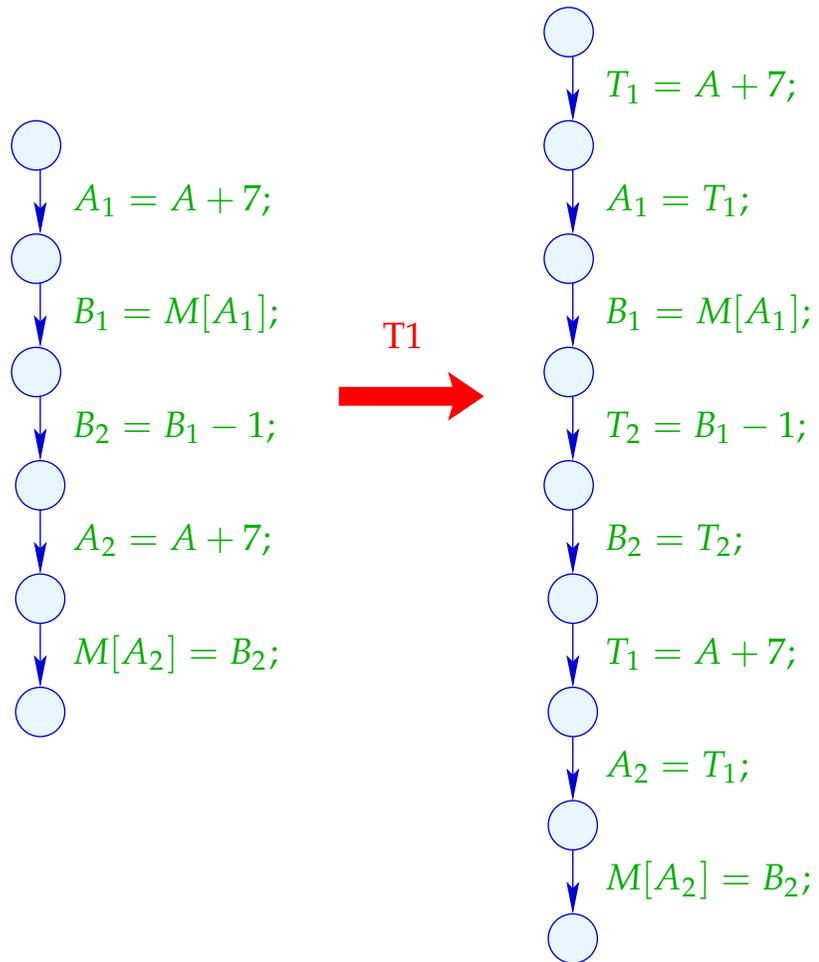
Vorgehen insgesamt:

- (1) Verfügbarkeit von Ausdrücken: T1 + T2
 - + verringert arithmetische Operationen
 - fügt überflüssige Umspeicherungen ein

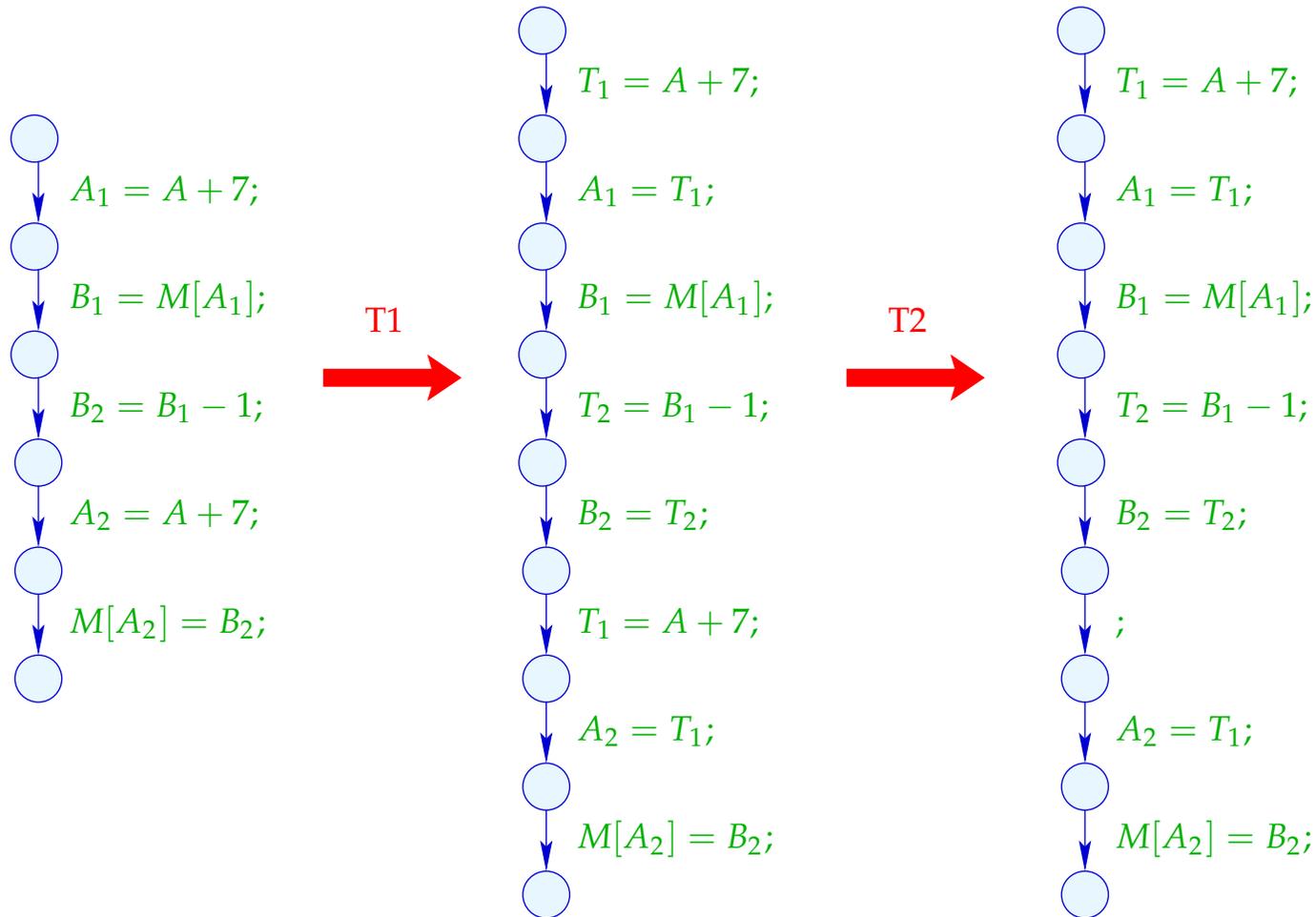
- (2) Werte von Variablen: T4
 - + erzeugt tote Variablen

- (3) (wahre) Lebendigkeit von Variablen: T3
 - + beseitigt Zuweisungen an tote Variablen

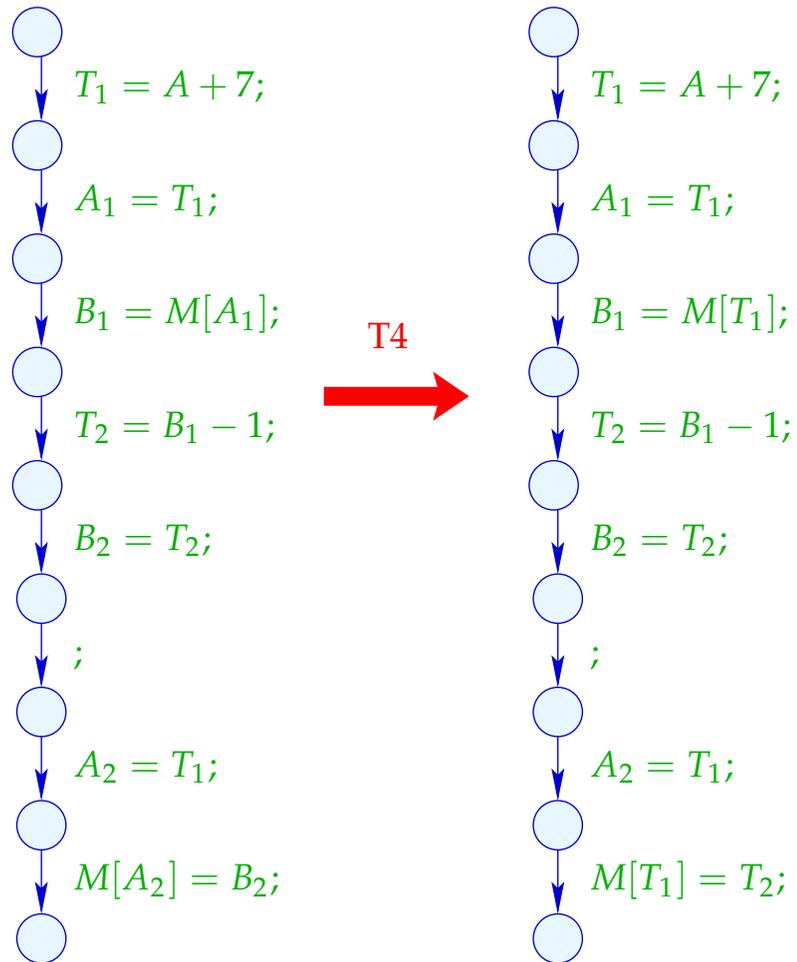
Beispiel: $a[7]--i$



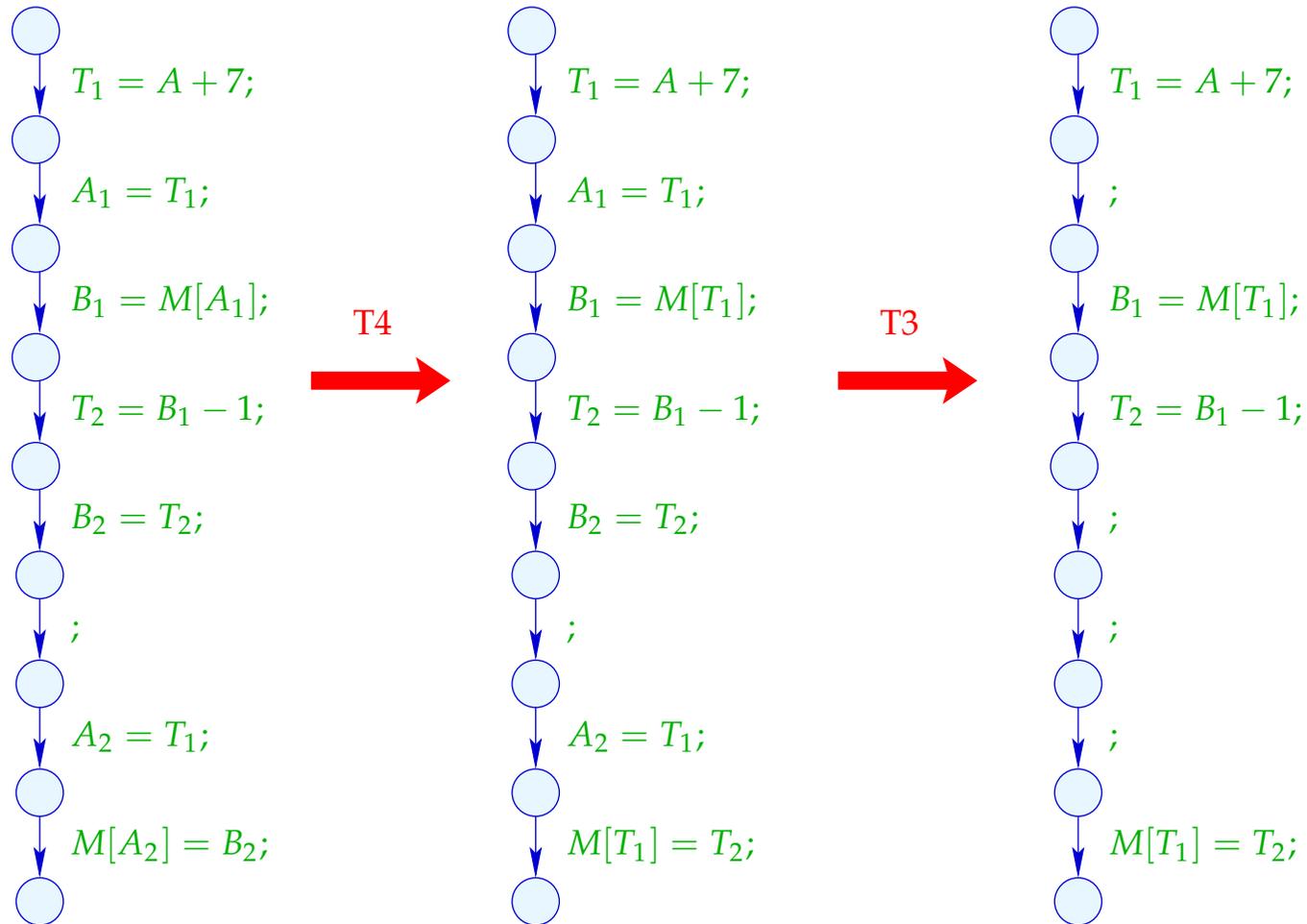
Beispiel: $a[7]--;$



Beispiel (Forts.): $a[7]--;$



Beispiel (Forts.): $a[7]--;$



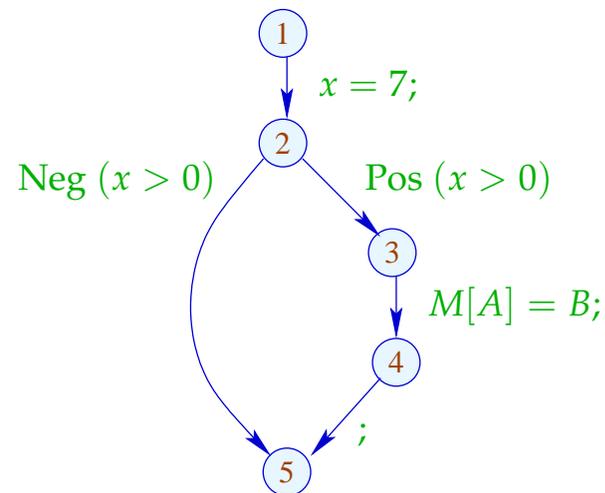
1.4 Konstanten-Propagation

Idee:

Führe möglichst große Teile des Codes bereits zur Compilezeit aus!

Beispiel:

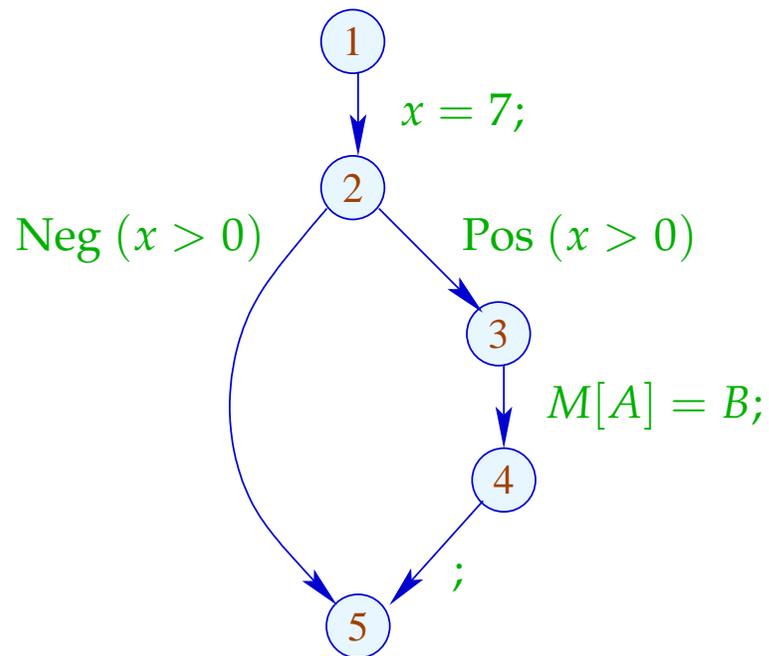
```
x = 7;  
if (x > 0)  
    M[A] = B;
```



Offenbar hat x stets den Wert 7 :-)

Deshalb wird **stets** der Speicherzugriff durchgeführt :-))

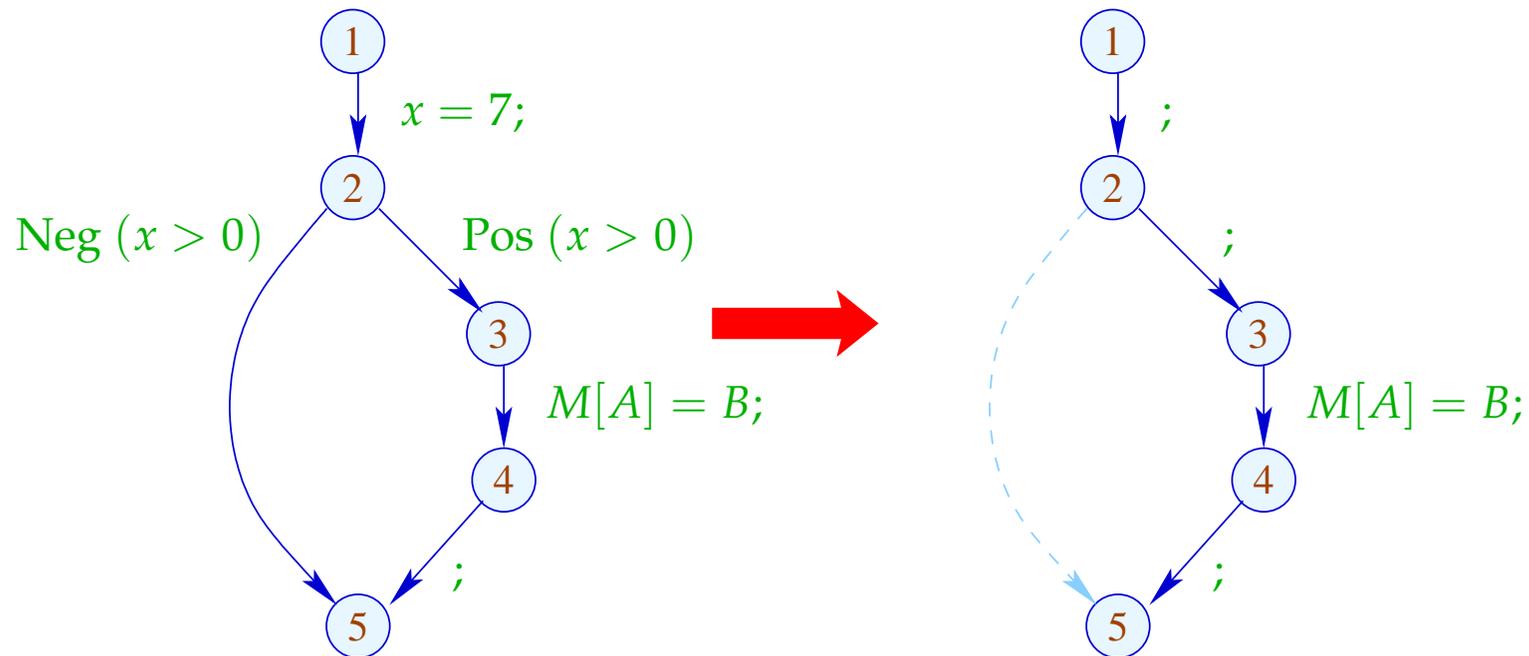
Ziel:



Offenbar hat x stets den Wert 7 :-)

Deshalb wird **stets** der Speicherzugriff durchgeführt :-))

Ziel:



Verallgemeinerung:

Partielle Auswertung



Neil D. Jones, DIKU, Kopenhagen

Idee:

Entwerfe eine Analyse, die für jedes u

- die Werte ermittelt, die Variablen **sicher** haben;
- mitteilt, ob u überhaupt erreichbar ist :-)

Idee:

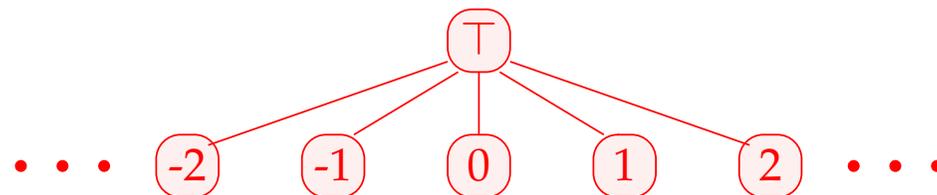
Entwerfe eine Analyse, die für jedes u

- die Werte ermittelt, die Variablen **sicher** haben;
- mitteilt, ob u überhaupt erreichbar ist :-)

Den vollständigen Verband konstruieren wir in zwei Schritten.

(1) Die möglichen **Werte für Variablen**:

$$\mathbb{Z}^\top = \mathbb{Z} \cup \{\top\} \quad \text{mit} \quad x \sqsubseteq y \quad \text{gdw.} \quad y = \top \quad \text{oder} \quad x = y$$



Achtung: \mathbb{Z}^\top ist selbst **kein** vollständiger Verband :-)

$$(2) \quad \mathbb{D} = (\text{Vars} \rightarrow \mathbb{Z}^\top)_\perp = (\text{Vars} \rightarrow \mathbb{Z}^\top) \cup \{\perp\}$$

// \perp heißt: "nicht erreichbar" :-))

mit $D_1 \sqsubseteq D_2$ gdw. $\perp = D_1$ oder

$$D_1 x \sqsubseteq D_2 x \quad (x \in \text{Vars})$$

Bemerkung: \mathbb{D} ist ein vollständiger Verband :-)

Achtung: \mathbb{Z}^\top ist selbst **kein** vollständiger Verband :-)

$$(2) \quad \mathbb{D} = (\text{Vars} \rightarrow \mathbb{Z}^\top)_\perp = (\text{Vars} \rightarrow \mathbb{Z}^\top) \cup \{\perp\}$$

// \perp heißt: "nicht erreichbar" :-))

mit $D_1 \sqsubseteq D_2$ gdw. $\perp = D_1$ oder

$$D_1 x \sqsubseteq D_2 x \quad (x \in \text{Vars})$$

Bemerkung: \mathbb{D} ist ein vollständiger Verband :-)

Betrachte dazu $X \subseteq \mathbb{D}$. O.E. $\perp \notin X$.

Dann $X \subseteq \text{Vars} \rightarrow \mathbb{Z}^\top$.

Ist $X = \emptyset$, dann $\bigsqcup X = \perp \in \mathbb{D}$:-)

Ist $X \neq \emptyset$, dann ist $\bigsqcup X = D$ mit

$$\begin{aligned} D x &= \bigsqcup \{f x \mid f \in X\} \\ &= \begin{cases} z & \text{falls } f x = z \quad (f \in X) \\ \top & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

:-))

Ist $X \neq \emptyset$, dann ist $\sqcup X = D$ mit

$$\begin{aligned} D x &= \sqcup \{f x \mid f \in X\} \\ &= \begin{cases} z & \text{falls } f x = z \quad (f \in X) \\ \top & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

:-))

Zu jeder Kante $k = (_, lab, _)$ konstruieren wir eine Effekt-Funktion $\llbracket k \rrbracket^\# = \llbracket lab \rrbracket^\# : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$, die die konkrete Berechnung simuliert.

Offenbar ist $\llbracket lab \rrbracket^\# \perp = \perp$ für alle lab :-)

Sei darum nun $\perp \neq D \in Vars \rightarrow \mathbb{Z}^\top$.

Idee:

- Wir benutzen D , um die Werte von Ausdrücken zu ermitteln.

Idee:

- Wir benutzen D , um die Werte von Ausdrücken zu ermitteln.
- Für manche Teilausdrücke erhalten wir \top :-)

Idee:

- Wir benutzen D , um die Werte von Ausdrücken zu ermitteln.
- Für manche Teilausdrücke erhalten wir \top :-)



Wir müssen die konkreten Operatoren \square durch **abstrakte** Operatoren $\square^\#$ ersetzen, die mit \top umgehen können:

$$a \square^\# b = \begin{cases} \top & \text{falls } a = \top \text{ oder } b = \top \\ a \square b & \text{sonst} \end{cases}$$

Idee:

- Wir benutzen D , um die Werte von Ausdrücken zu ermitteln.
- Für manche Teilausdrücke erhalten wir \top :-)



Wir müssen die konkreten Operatoren \square durch **abstrakte** Operatoren $\square^\#$ ersetzen, die mit \top umgehen können:

$$a \square^\# b = \begin{cases} \top & \text{falls } a = \top \text{ oder } b = \top \\ a \square b & \text{sonst} \end{cases}$$

- Mit den abstrakten Operatoren können wir eine **abstrakte** Ausdrucks-Auswertung definieren:

$$\llbracket e \rrbracket^\# : (\text{Vars} \rightarrow \mathbb{Z}^\top) \rightarrow \mathbb{Z}^\top$$

Abstrakte Ausdrucksauswertung ist wie konkrete Ausdrucksauswertung, aber mit abstrakten Werten und Operatoren. Hier:

$$\llbracket c \rrbracket^\# D = c$$

$$\llbracket e_1 \square e_2 \rrbracket^\# D = \llbracket e_1 \rrbracket^\# D \square^\# \llbracket e_2 \rrbracket^\# D$$

... analog für unäre Operatoren :-)

Abstrakte Ausdrucksauswertung ist wie konkrete Ausdrucksauswertung, aber mit abstrakten Werten und Operatoren. Hier:

$$\llbracket c \rrbracket^\# D = c$$

$$\llbracket e_1 \square e_2 \rrbracket^\# D = \llbracket e_1 \rrbracket^\# D \square^\# \llbracket e_2 \rrbracket^\# D$$

... analog für unäre Operatoren :-)

Beispiel:

$$D = \{x \mapsto 2, y \mapsto \top\}$$

$$\llbracket x + 7 \rrbracket^\# D = \llbracket x \rrbracket^\# D +^\# \llbracket 7 \rrbracket^\# D$$

$$= 2 +^\# 7$$

$$= 9$$

$$\llbracket x - y \rrbracket^\# D = 2 -^\# \top$$

$$= \top$$

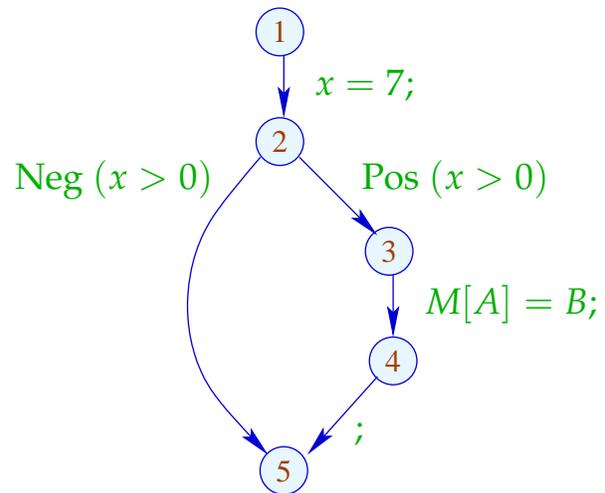
Damit erhalten wir für die Kanten-Effekte $\llbracket lab \rrbracket^\#$:

$$\begin{aligned}
 \llbracket ; \rrbracket^\# D &= D \\
 \llbracket \text{Pos}(e) \rrbracket^\# D &= \begin{cases} \perp & \text{falls } 0 = \llbracket e \rrbracket^\# D \\ D & \text{sonst} \end{cases} \\
 \llbracket \text{Neg}(e) \rrbracket^\# D &= \begin{cases} D & \text{falls } 0 \sqsubseteq \llbracket e \rrbracket^\# D \\ \perp & \text{sonst} \end{cases} \\
 \llbracket x = e; \rrbracket^\# D &= D \oplus \{x \mapsto \llbracket e \rrbracket^\# D\} \\
 \llbracket x = M[R]; \rrbracket^\# D &= D \oplus \{x \mapsto \top\} \\
 \llbracket M[R_1] = R_2; \rrbracket^\# D &= D
 \end{aligned}$$

... sofern $D \neq \perp$:-)

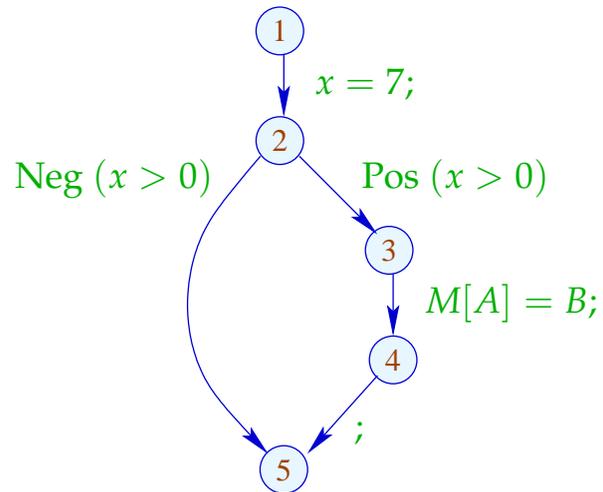
An *start* gilt $D_{\perp} = \{x \mapsto \top \mid x \in Vars\}$.

Beispiel:



An *start* gilt $D_{\perp} = \{x \mapsto \top \mid x \in \text{Vars}\}$.

Beispiel:



1	$\{x \mapsto \top\}$
2	$\{x \mapsto 7\}$
3	$\{x \mapsto 7\}$
4	$\{x \mapsto 7\}$
5	$\perp \sqcup \{x \mapsto 7\} = \{x \mapsto 7\}$

Die abstrakten Kanten-Effekte $\llbracket k \rrbracket^\#$ setzen wir wieder zu den Effekten von Pfaden $\pi = k_1 \dots k_r$ zusammen durch:

$$\llbracket \pi \rrbracket^\# = \llbracket k_r \rrbracket^\# \circ \dots \circ \llbracket k_1 \rrbracket^\# \quad : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$$

Idee zur Korrektheit:

Abstrakte Interpretation

Cousot, Cousot 1977



Patrick Cousot, ENS, Paris

Die abstrakten Kanten-Effekte $\llbracket k \rrbracket^\sharp$ setzen wir wieder zu den Effekten von Pfaden $\pi = k_1 \dots k_r$ zusammen durch:

$$\llbracket \pi \rrbracket^\sharp = \llbracket k_r \rrbracket^\sharp \circ \dots \circ \llbracket k_1 \rrbracket^\sharp \quad : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$$

Idee zur Korrektheit:

Abstrakte Interpretation

Cousot, Cousot 1977

Aufstellen einer Beschreibungsrelation Δ zwischen **konkreten** Werten und deren Beschreibungen mit:

$$x \Delta a_1 \quad \wedge \quad a_1 \sqsubseteq a_2 \quad \Longrightarrow \quad x \Delta a_2$$

Konkretisierung: $\gamma a = \{x \mid x \Delta a\}$

// liefert Menge der beschriebenen Werte :-)

(1) Werte: $\Delta \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\top$

$$z \Delta a \quad \text{gdw.} \quad z = a \vee a = \top$$

Konkretisierung:

$$\gamma a = \begin{cases} \{a\} & \text{falls } a \sqsubset \top \\ \mathbb{Z} & \text{falls } a = \top \end{cases}$$

(1) **Werte:** $\Delta \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^\top$

$$z \Delta a \text{ gdw. } z = a \vee a = \top$$

Konkretisierung:

$$\gamma a = \begin{cases} \{a\} & \text{falls } a \sqsubset \top \\ \mathbb{Z} & \text{falls } a = \top \end{cases}$$

(2) **Variablenbelegungen:** $\Delta \subseteq (\mathit{Vars} \rightarrow \mathbb{Z}) \times (\mathit{Vars} \rightarrow \mathbb{Z}^\top)_\perp$

$$\rho \Delta D \text{ gdw. } D \neq \perp \wedge \rho x \sqsubseteq D x \quad (x \in \mathit{Vars})$$

Konkretisierung:

$$\gamma D = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } D = \perp \\ \{\rho \mid \forall x : (\rho x) \Delta (D x)\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel: $\{x \mapsto 1, y \mapsto -7\} \Delta \{x \mapsto \top, y \mapsto -7\}$

(3) Zustände:

$$\Delta \subseteq ((\mathit{Vars} \rightarrow \mathbb{Z}) \times (\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z})) \times (\mathit{Vars} \rightarrow \mathbb{Z}^\top)_\perp$$
$$(\rho, \mu) \Delta D \quad \text{gdw.} \quad \rho \Delta D$$

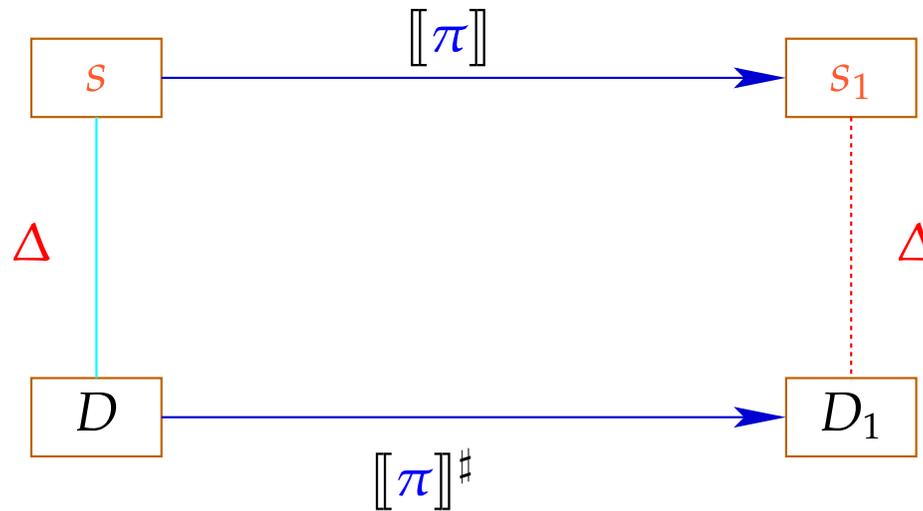
Konkretisierung:

$$\gamma D = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } D = \perp \\ \{(\rho, \mu) \mid \forall x : (\rho x) \Delta (D x)\} & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir zeigen:

(*) Gilt $s \Delta D$ und ist $[[\pi]]s$ definiert, dann gilt auch:

$$([[\pi]] s) \Delta ([[\pi]]^\# D)$$



Die abstrakte Semantik simuliert die konkrete :-)

Insbesondere gilt:

$$[[\pi]] s \in \gamma ([[\pi]]^{\#} D)$$

Die abstrakte Semantik simuliert die konkrete :-)

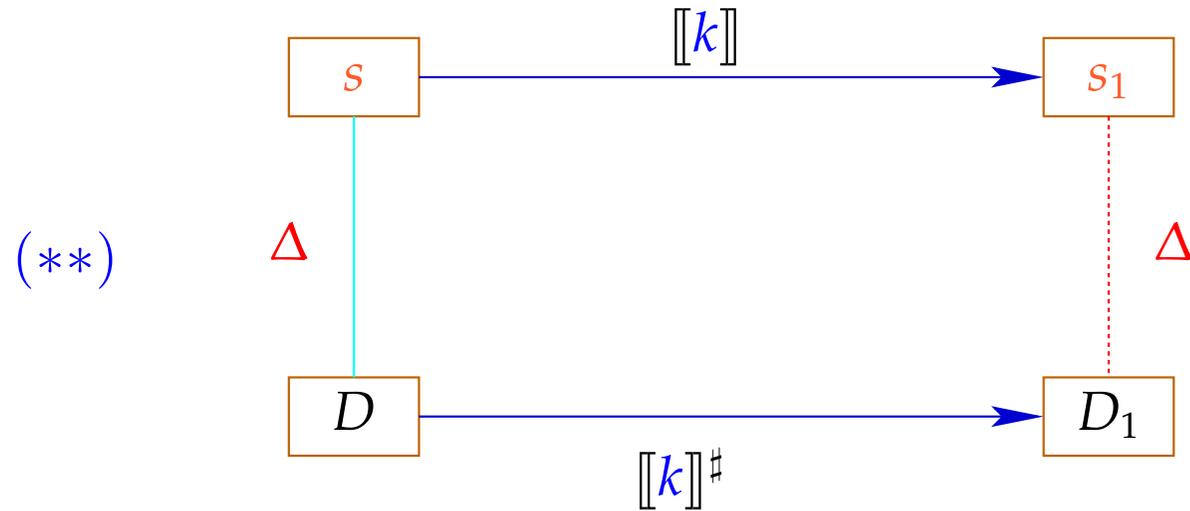
Insbesondere gilt:

$$\llbracket \pi \rrbracket s \in \gamma (\llbracket \pi \rrbracket^\# D)$$

Praktisch heißt das z.B., dass für $D x = -7$ gilt:

$$\begin{aligned} \rho' x &= -7 \text{ für alle } \rho' \in \gamma D \\ \implies \rho_1 x &= -7 \text{ für } (\rho_1, _) = \llbracket \pi \rrbracket s \end{aligned}$$

Zum Beweis von $(*)$ zeigen wir für jede Kante k :



Dann folgt $(*)$ mittels Induktion $:-)$

Zum Beweis von $(**)$ zeigen wir für jeden Ausdruck e :

$(***)$ $(\llbracket e \rrbracket \rho) \Delta (\llbracket e \rrbracket^\# D)$ sofern nur $\rho \Delta D$

Zum Beweis von $(**)$ zeigen wir für jeden Ausdruck e :

$(***)$ $(\llbracket e \rrbracket \rho) \Delta (\llbracket e \rrbracket^\# D)$ sofern nur $\rho \Delta D$

Zum Beweis von $(***)$ zeigen wir für jeden Operator \square :

$(x \square y) \Delta (x^\# \square^\# y^\#)$ sofern $x \Delta x^\# \wedge y \Delta y^\#$

Zum Beweis von $(**)$ zeigen wir für jeden Ausdruck e :

$(***)$ $(\llbracket e \rrbracket \rho) \Delta (\llbracket e \rrbracket^\# D)$ sofern nur $\rho \Delta D$

Zum Beweis von $(***)$ zeigen wir für jeden Operator \square :

$(x \square y) \Delta (x^\# \square^\# y^\#)$ sofern $x \Delta x^\# \wedge y \Delta y^\#$

So hatten wir die Operatoren $\square^\#$ aber gerade definiert :-)

Nun zeigen wir $(**)$ durch Fallunterscheidung nach der Kanten-Beschriftung lab .

Sei $s = (\rho, \mu) \Delta D$. Insbesondere ist $\perp \neq D : Vars \rightarrow \mathbb{Z}^\top$

Fall $x = e;$:

$$\rho_1 = \rho \oplus \{x \mapsto \llbracket e \rrbracket \rho\} \quad \mu_1 = \mu$$

$$D_1 = D \oplus \{x \mapsto \llbracket e \rrbracket^\# D\}$$

$$\implies (\rho_1, \mu_1) \Delta D_1$$

Fall $x = M[R];$:

$$\rho_1 = \rho \oplus \{x \mapsto \mu(\rho R)\} \quad \mu_1 = \mu$$

$$D_1 = D \oplus \{x \mapsto \top\}$$

$$\implies (\rho_1, \mu_1) \Delta D_1$$

Fall $M[R_1] = R_2;$:

$$\rho_1 = \rho \quad \mu_1 = \mu \oplus \{\rho R_1 \mapsto \rho R_2\}$$

$$D_1 = D$$

$$\implies (\rho_1, \mu_1) \Delta D_1$$

Fall $\boxed{\text{Neg}(e)}$:

$(\rho_1, \mu_1) = s$, wobei:

$$0 = \llbracket e \rrbracket \rho$$

$$\Delta \llbracket e \rrbracket^\# D$$

$$\implies 0 \sqsubseteq \llbracket e \rrbracket^\# D$$

$$\implies \perp \neq D_1 = D$$

$$\implies (\rho_1, \mu_1) \Delta D_1$$

Fall $\boxed{\text{Pos}(e)}$: $(\rho_1, \mu_1) = s$, wobei:

$$0 \neq \llbracket e \rrbracket \rho$$

$$\Delta \llbracket e \rrbracket^\# D$$

$$\implies 0 \neq \llbracket e \rrbracket^\# D$$

$$\implies \perp \neq D_1 = D$$

$$\implies (\rho_1, \mu_1) \Delta D_1$$

:-)

Wir schließen: Die Behauptung $(*)$ stimmt $:-)$

Die MOP-Lösung:

$$\mathcal{D}^*[v] = \bigsqcup \{ \llbracket \pi \rrbracket^\# D_0 \mid \pi : \textit{start} \rightarrow^* v \}$$

wobei $D_0 x = \top$ ($x \in \textit{Vars}$).

Wir schließen: Die Behauptung $(*)$ stimmt $(:-))$

Die MOP-Lösung:

$$\mathcal{D}^*[v] = \bigsqcup \{ \llbracket \pi \rrbracket^\# D_0 \mid \pi : \text{start} \rightarrow^* v \}$$

wobei $D_0 x = \top$ ($x \in \text{Vars}$).

Wegen $(*)$ gilt für alle Anfangszustände s und alle Berechnungen π , die v erreichen:

$$(\llbracket \pi \rrbracket s) \Delta (\mathcal{D}^*[v])$$

Wir schließen: Die Behauptung $(*)$ stimmt $:-)$

Die MOP-Lösung:

$$\mathcal{D}^*[v] = \bigsqcup \{ \llbracket \pi \rrbracket^\# D_0 \mid \pi : \text{start} \rightarrow^* v \}$$

wobei $D_0 x = \top$ ($x \in \text{Vars}$).

Wegen $(*)$ gilt für alle Anfangszustände s und alle Berechnungen π , die v erreichen:

$$(\llbracket \pi \rrbracket s) \Delta (\mathcal{D}^*[v])$$

Zur Approximation des MOP benutzen wir unser Constraint-System $:-)$