... offenbar ist das Ergebnis enttäuschend :-(

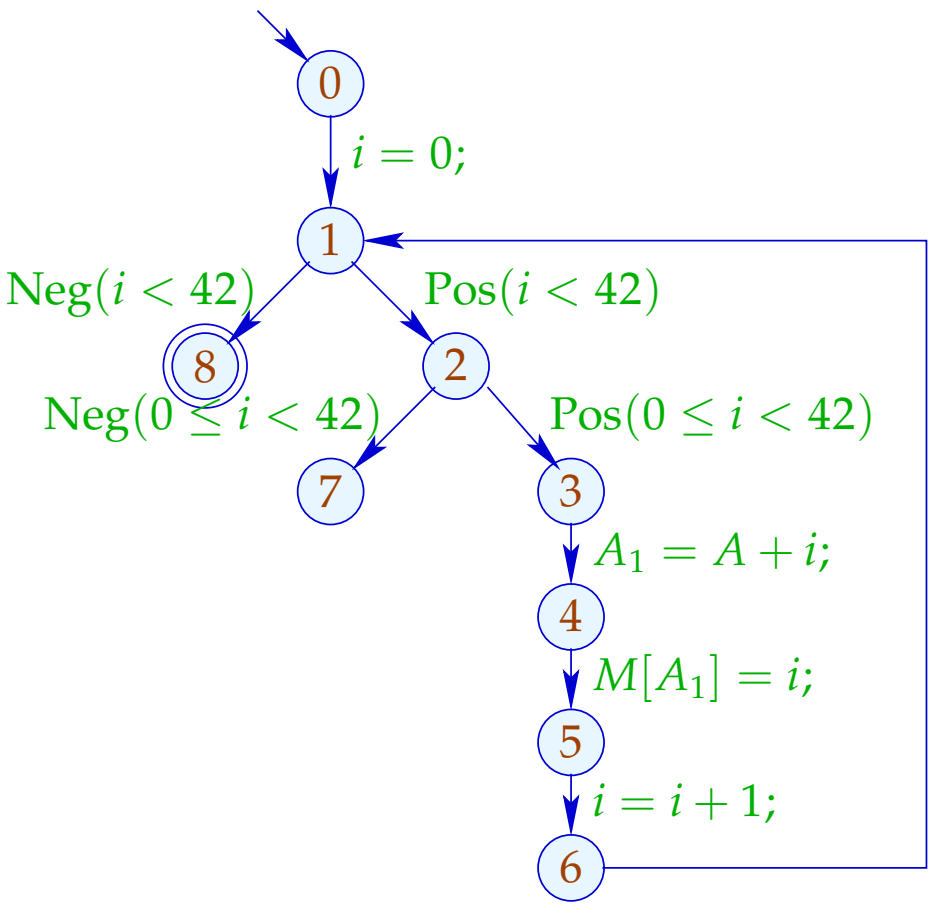
Idee 2:

Eigentlich reicht es, die Beschleunigung mittels $\sqcup$ nur an genügend vielen Stellen anzuwenden!

Eine Menge I heißt Loop Separator (Kreis-Trenner), falls jeder Kreis mindestens einen Punkt aus I enthält :-)

Wenden wir Widening nur an den Punkten aus einer solchen Menge I, terminiert RR-Iteration immer noch !!!

In unserem Beispiel:

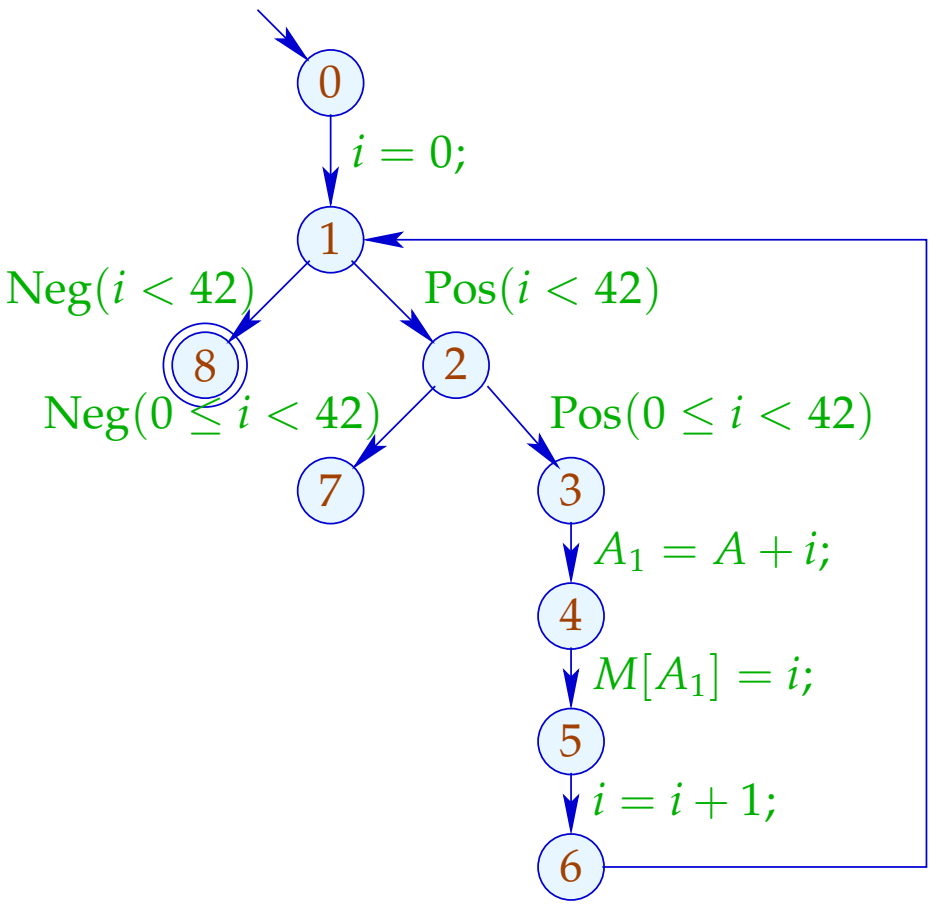


$I_1 = \{1\}$ oder auch:

$I_2 = \{2\}$ oder auch:

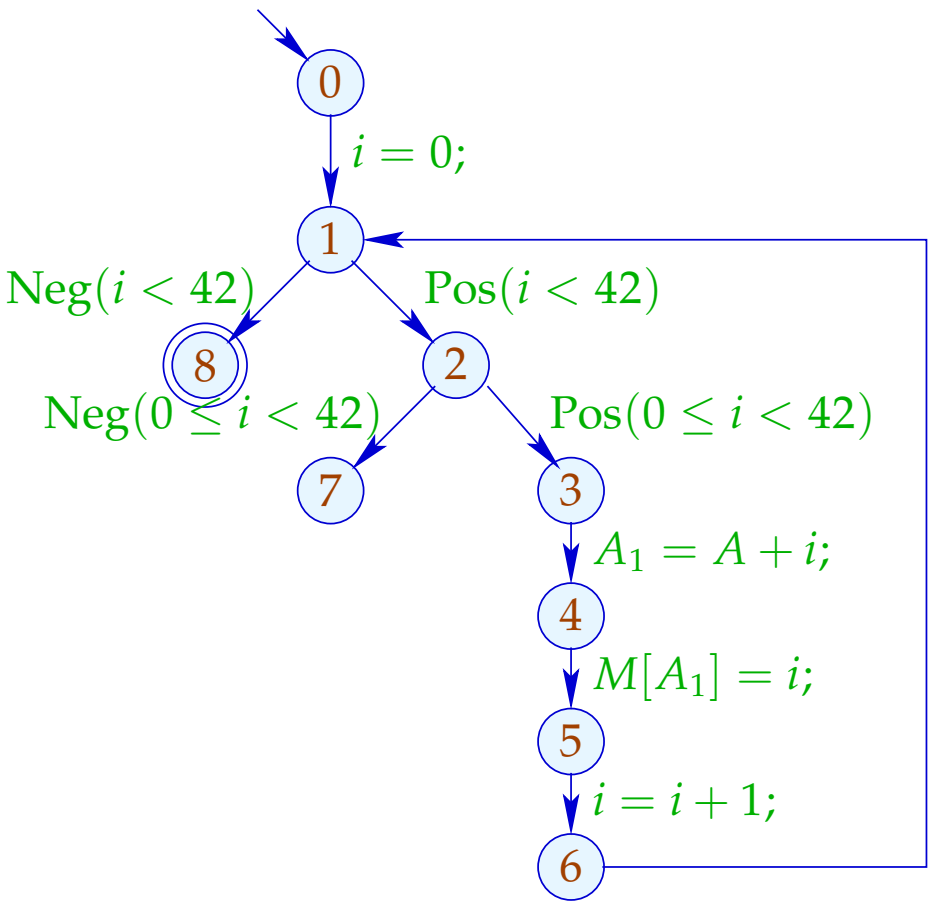
$I_3 = \{3\}$

Die Analyse mit $I = \{1\}$:



	1		2		3	
	l	u	l	u	l	u
0	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$		
1	0	0	0	$+\infty$		
2	0	0	0	41		
3	0	0	0	41		
4	0	0	0	41	dito	
5	0	0	0	41		
6	1	1	1	42		
7	$\perp$		$\perp$			
8	$\perp$		42	$+\infty$		

Die Analyse mit $I = \{2\}$:



	1		2		3	
	l	u	l	u	l	u
0	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$		
1	0	0	0	42		
2	0	0	0	$+\infty$		
3	0	0	0	41		
4	0	0	0	41	dito	
5	0	0	0	41		
6	1	1	1	42		
7	$\perp$		42	$+\infty$		
8	$\perp$		42	42		

Diskussion:

- Beide Analysen-Läufe berechnen interessante Informationen :-)
- Der Lauf mit $I = \{2\}$ belegt, dass nach Verlassen der Schleife stets $i = 42$ gilt.
- Nur der Lauf mit $I = \{1\}$ belegt aber, dass der äußere Test den inneren überflüssig macht :-(

Wie findet man einen geeigneten Loop Separator I ???

Idee 3: Narrowing

Sei $\underline{x}$ irgend eine Lösung von (1) , d.h.

$$x_i \sqsupseteq f_i\,\underline{x} \;, \qquad i = 1, \ldots, n$$

Dann gilt für monotone f_i ,

$$\underline{x} \sqsupseteq F\,\underline{x} \sqsupseteq F^2\,\underline{x} \sqsupseteq \ldots \sqsupseteq F^k\,\underline{x} \sqsupseteq \ldots$$

// Narrowing Iteration

Idee 3: Narrowing

Sei $\underline{x}$ irgend eine Lösung von (1), d.h.

$$x_i \sqsupseteq f_i\,\underline{x}\ , \qquad i = 1, \ldots, n$$

Dann gilt für monotone f_i,

$$\underline{x} \sqsupseteq F\,\underline{x} \sqsupseteq F^2\,\underline{x} \sqsupseteq \ldots \sqsupseteq F^k\,\underline{x} \sqsupseteq \ldots$$

// Narrowing Iteration

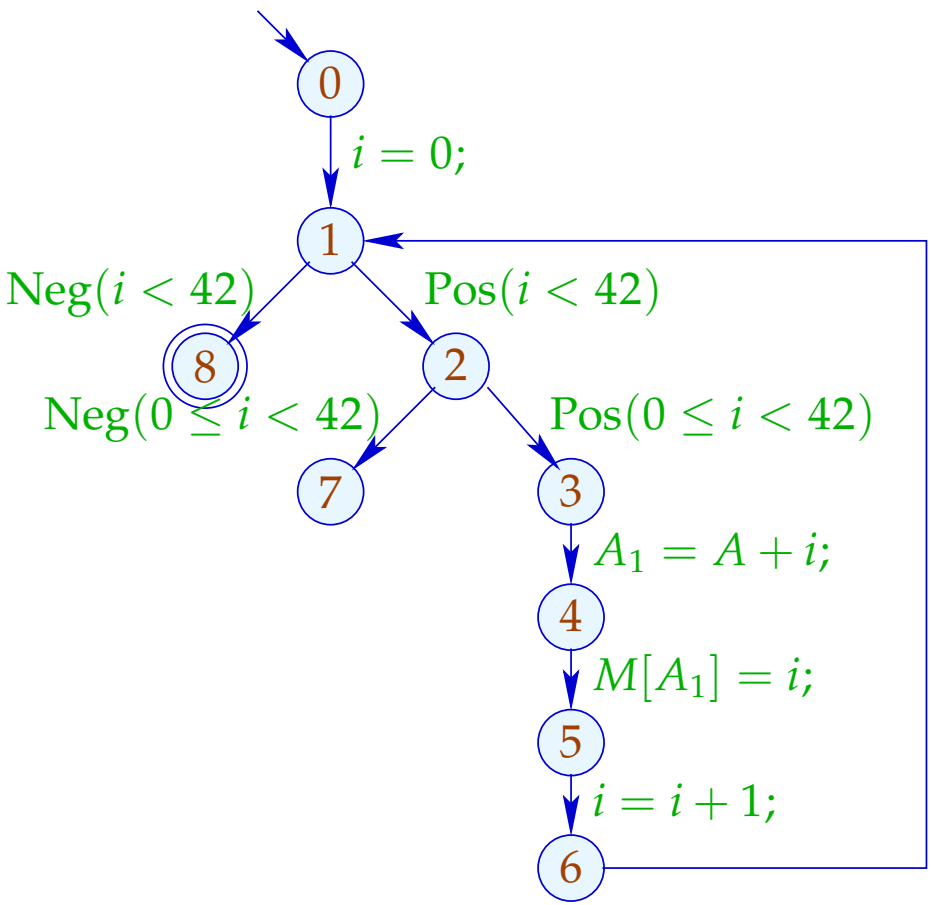
Jeder der Tupel $F^k\,\underline{x}$ ist eine Lösung von (1) :-)

$\Longrightarrow$

Terminierung ist kein Problem mehr:
wir stoppen, wenn wir keine Lust mehr haben :-))

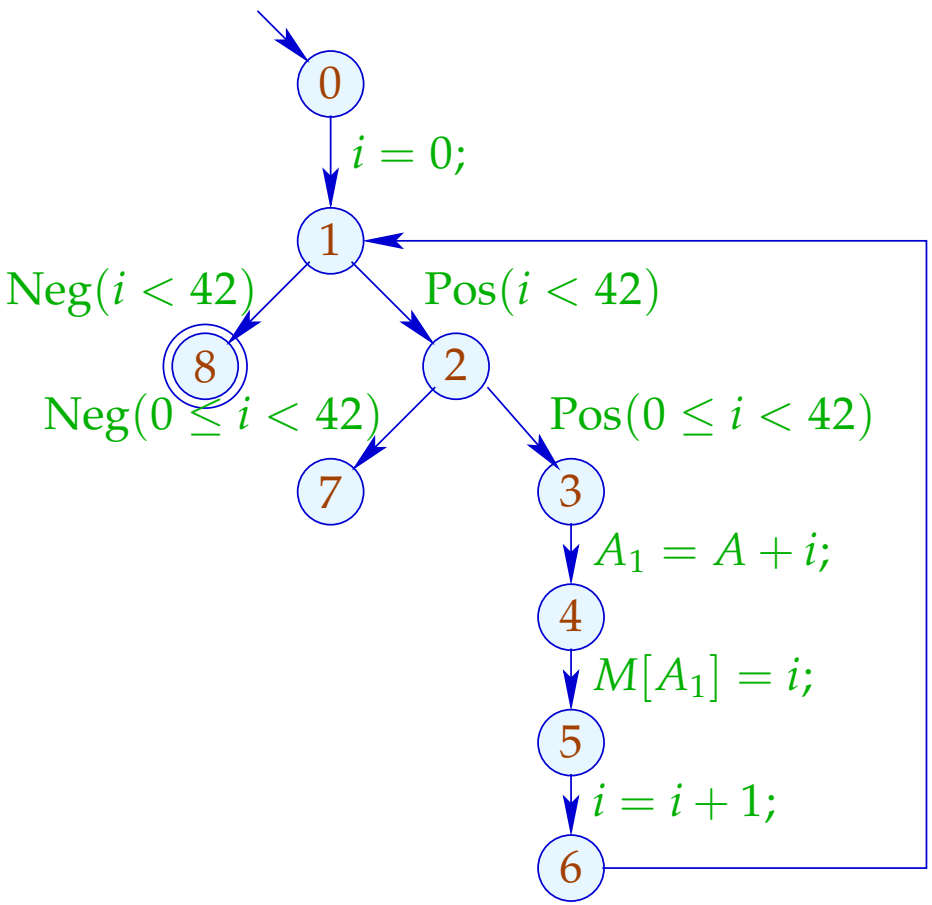
// Analoges gilt für RR-Iteration.

Narrowing Iteration im Beispiel:



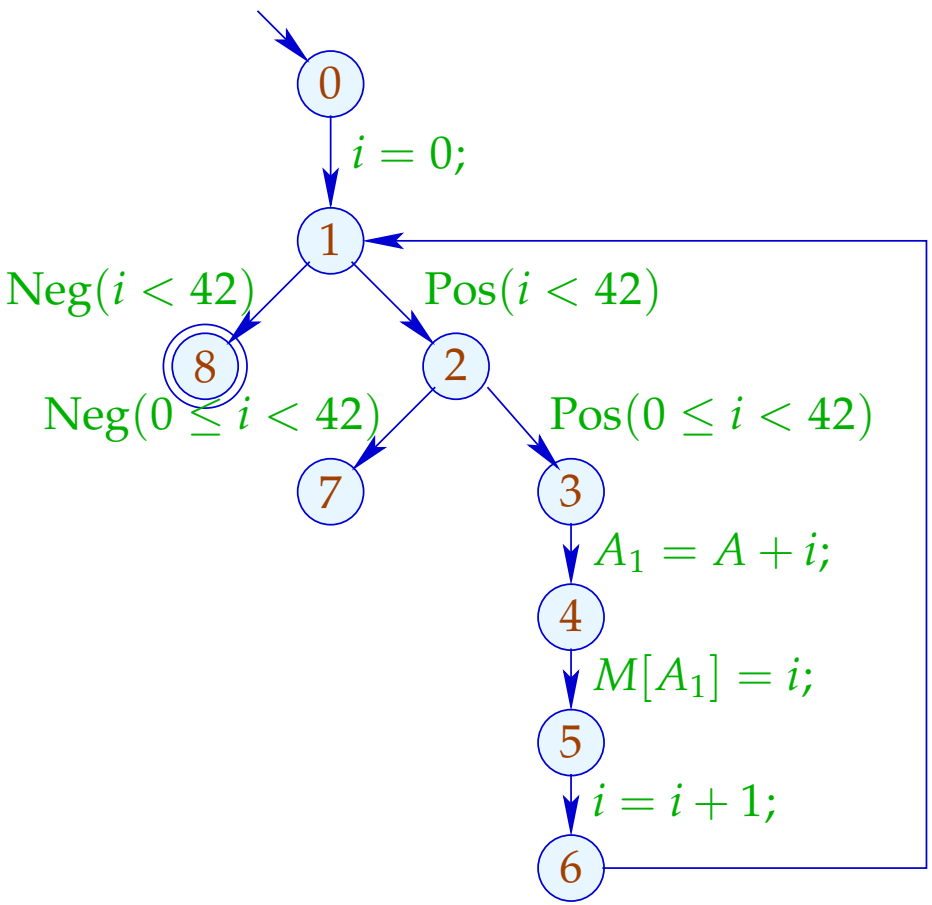
	0	
	l	u
0	$-\infty$	$+\infty$
1	0	$+\infty$
2	0	$+\infty$
3	0	$+\infty$
4	0	$+\infty$
5	0	$+\infty$
6	1	$+\infty$
7	42	$+\infty$
8	42	$+\infty$

Narrowing Iteration im Beispiel:



	0		1	
	l	u	l	u
0	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
1	0	$+\infty$	0	$+\infty$
2	0	$+\infty$	0	41
3	0	$+\infty$	0	41
4	0	$+\infty$	0	41
5	0	$+\infty$	0	41
6	1	$+\infty$	1	42
7	42	$+\infty$	$\perp$	
8	42	$+\infty$	42	$+\infty$

Narrowing Iteration im Beispiel:



	0		1		2	
	l	u	l	u	l	u
0	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
1	0	$+\infty$	0	$+\infty$	0	42
2	0	$+\infty$	0	41	0	41
3	0	$+\infty$	0	41	0	41
4	0	$+\infty$	0	41	0	41
5	0	$+\infty$	0	41	0	41
6	1	$+\infty$	1	42	1	42
7	42	$+\infty$	$\perp$		$\perp$	
8	42	$+\infty$	42	$+\infty$	42	42

Diskussion:

- $\rightarrow$ Wir beginnen mit einer sicheren Approximation.
- $\rightarrow$ Wir finden, dass die innere Abfrage redundant ist :-)
- $\rightarrow$ Wir finden, dass nach der Iteration gilt: $i = 42$:-))
- $\rightarrow$ Dazu war nicht erforderlich, einen optimalen Loop Separator zu berechnen :-)))

Letzte Frage:

Müssen wir hinnehmen, dass Narrowing möglicherweise nicht terminiert ???

4. Idee: Beschleunigtes Narrowing

Nehmen wir an, wir hätten eine Lösung $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ des Constraint-Systems:

$$x_i \sqsupseteq f_i\,(x_1, \ldots, x_n)\,, \quad i = 1, \ldots, n \qquad (1)$$

Dann schreiben betrachten wir das Gleichungssystem:

$$x_i \;=\; x_i \sqcap f_i\,(x_1, \ldots, x_n)\,, \quad i = 1, \ldots, n \qquad (4)$$

Offenbar gilt für monotone f_i : $H^k\,\underline{x} \;=\; F^k\,\underline{x}$:-)

wobei $H\,(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)\,, \quad y_i = x_i \sqcap f_i\,(x_1, \ldots, x_n)$.

In (4) ersetzen wir $\sqcap$ durch den neuen Operator $\overline{\sqcap}$ mit:

$$a_1 \sqcap a_2 \;\sqsubseteq\; a_1 \,\overline{\sqcap}\, a_2 \;\sqsubseteq\; a_1$$

... für die Intervall-Analyse:

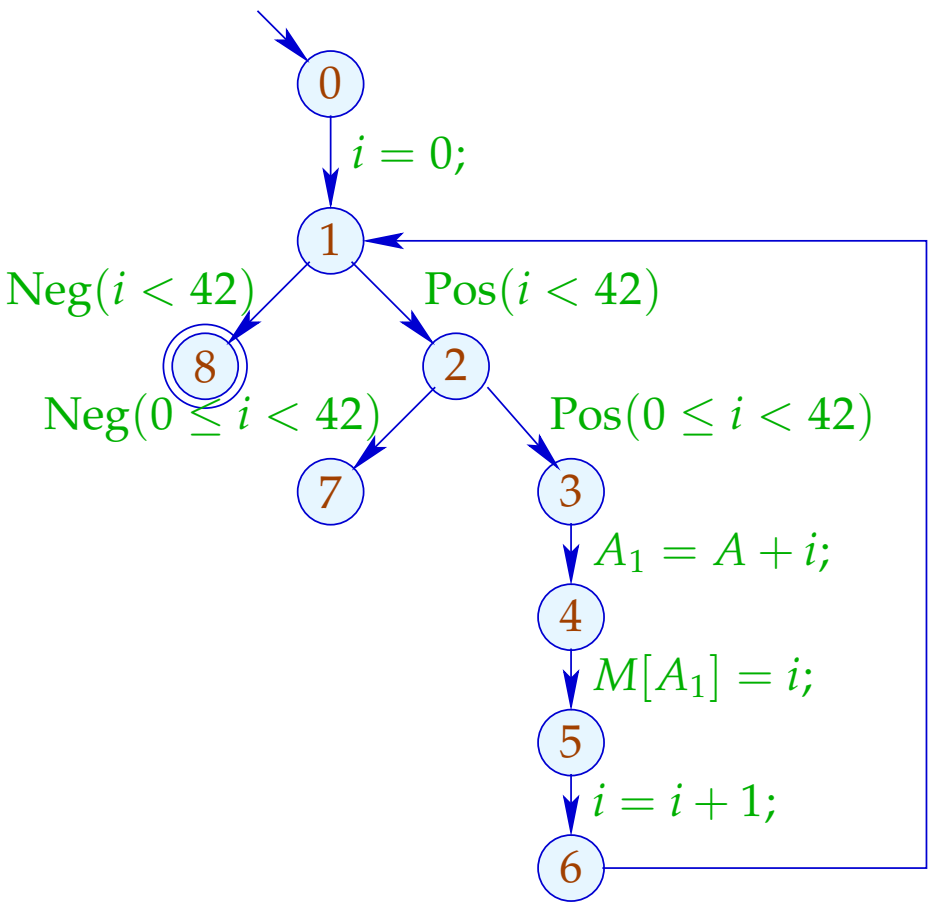
Wir konservieren endliche Intervall-Grenzen :-)

Deshalb $\bot \sqcap D = D \sqcap \bot = \bot$ und für $D_1 \neq \bot \neq D_2$:

$$
\begin{array}{rcl}
(D_1 \sqcap D_2)\, x & = & (D_1\, x) \sqcap (D_2\, x) \qquad \text{wobei} \\
[l_1, u_1] \sqcap [l_2, u_2] & = & [l, u] \qquad \text{mit} \\
l & = & \begin{cases} l_2 & \text{falls} \quad l_1 = -\infty \\ l_1 & \text{sonst} \end{cases} \\
u & = & \begin{cases} u_2 & \text{falls} \quad u_1 = \infty \\ u_1 & \text{sonst} \end{cases}
\end{array}
$$

$\Longrightarrow$ $\sqcap$ ist nicht kommutativ !!!

Beschleunigtes Narrowing im Beispiel:



	0		1		2	
	l	u	l	u	l	u
0	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
1	0	$+\infty$	0	$+\infty$	0	42
2	0	$+\infty$	0	41	0	41
3	0	$+\infty$	0	41	0	41
4	0	$+\infty$	0	41	0	41
5	0	$+\infty$	0	41	0	41
6	1	$+\infty$	1	42	1	42
7	42	$+\infty$	$\perp$		$\perp$	
8	42	$+\infty$	42	$+\infty$	42	42

Diskussion:

→ Achtung: Widening liefert für nicht-monotone f_i eine Lösung. Narrowing liefert dagegen nur für monotone f_i eine Lösung!!

→ Das beschleunigte Narrowing liefert (im Beispiel) das richtige Ergebnis :-)

→ Erlaubt der neue Operator $\sqcap$ nur endlich viele Verbesserungen bei jedem Wert, kann Narrowing bis zur Stabilisierung durchgeführt werden.

→ Für die Intervall-Analyse sind das maximal

$$\#\mathit{Punkte} \cdot (1 + 2 \cdot \#\mathit{Vars})$$

1.6 Pointer-Analyse

Fragen:

→ Sind zwei Adressen möglicherweise gleich?

→ Sind zwei Adressen definitiv gleich?

1.6 Pointer-Analyse

Fragen:

$\rightarrow$ Sind zwei Adressen möglicherweise gleich? May Alias

$\rightarrow$ Sind zwei Adressen definitiv gleich? Must Alias

$\Longrightarrow$ Alias-Analyse

Die bisherigen Analysen ohne Alias-Information:

(1) Verfügbare Ausdrücke:

- Erweitere die Menge $Expr$ der Ausdrücke um die vorkommenden Loads $M[R]$.

- Erweitere die Kanten-Effekte:

$$
\begin{array}{lcl}
[\![x = e;]\!]^\sharp\, A & = & (A \cup \{e\}) \backslash Expr_x \\
[\![x = M[R];]\!]^\sharp\, A & = & (A \cup \{M[R]\}) \backslash Expr_x \\
[\![M[R] = x;]\!]^\sharp\, A & = & A \backslash Loads
\end{array}
$$

(2) Werte von Variablen:

- Erweitere die Menge $Expr$ der Ausdrücke um die vorkommenden Loads $M[R]$.

- Erweitere die Kanten-Effekte:

$$
\begin{array}{lcl}
[\![x = M[R];]\!]^\sharp\, V\, e & = & \begin{cases} \{x\} & \text{falls} \quad e = M[R] \\ V\, e \backslash \{x\} & \text{sonst} \end{cases} \\
[\![M[R] = x;]\!]^\sharp\, V & = & V
\end{array}
$$

(3) Konstantenpropagation:

- Erweitere den abstrakten Zustand um einen abstrakten Speicher M

- Führe Speicher-Operationen mit bekannten Adressen aus!

$$
\begin{array}{rcl}
[\![x = M[R];]\!]^\sharp\,(D, M) & = & \begin{cases} (D \oplus \{x \mapsto M\,a\}, M) & \text{falls} \quad D\,R = a \sqsubset \top \\ (D \oplus \{x \mapsto \top\}, M) & \text{sonst} \end{cases} \\
[\![M[R] = x;]\!]^\sharp\,(D, M) & = & \begin{cases} (D, M \oplus \{a \mapsto D\,x\}) & \text{falls} \quad D\,R = a \sqsubset \top \\ (D, \underline{\top}) & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{wobei} \\
\underline{\top}\,a & = & \top \qquad\qquad (a \in \mathbb{N})
\end{array}
$$

Probleme:

- Adressen sind aus $\mathbb{N}$:-(

  Es gibt zwar keine unendliche aufsteigende Ketten, aber ...
- Exakte Adressen sind zur Compilezeit selten bekannt :-(
- Am selben Programmpunkt wird i.a. auf mehrere Adressen zugegriffen ...
- Abspeichern an unbekannter Adresse zerstört alle Information M :-(

$\Longrightarrow$ Konstanten-Propagation versagt :-(

$\Longrightarrow$ Speicherzugriffe/Pointer zerstören Präzision :-(

Vereinfachung:

- Wir betrachten Pointer auf Strukturen mit Komponenten a, b :-)
- Wir verzichten auf Wohl-Getyptheit dieser Komponenten.
- Neue Statements:

$$
\begin{array}{lll}
x = \mathsf{new}(); & // & \text{Allokation eines neuen Paars} \\
x = R \rightarrow a; & // & \text{Laden einer Komponente} \\
R \rightarrow a = x; & // & \text{Setzen einer Komponente}
\end{array}
$$

- Wir verzichten auf Pointer-Arithmetik :-)

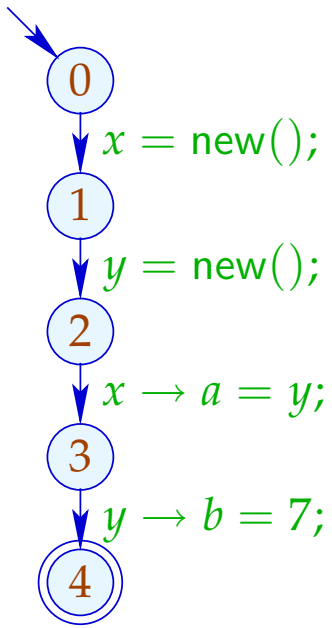
Einfaches Beispiel:

$x = \mathsf{new}();$

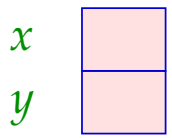
$y = \mathsf{new}();$

$x \rightarrow a = y;$

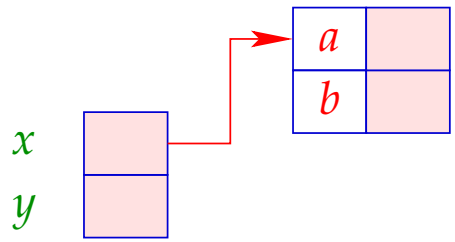
$y \rightarrow b = 7;$



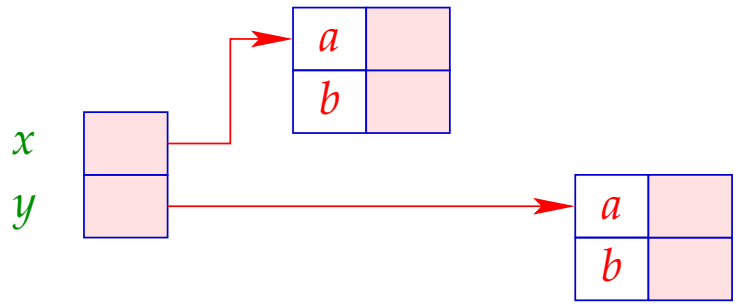
Die Semantik:



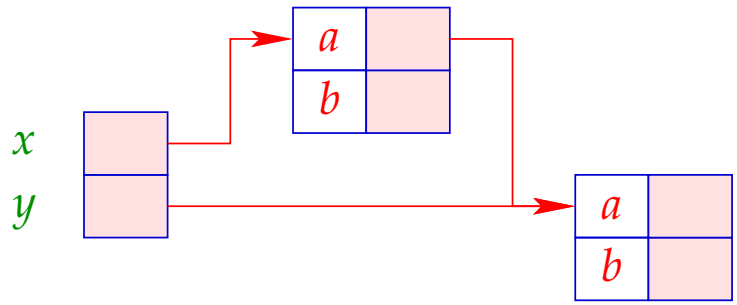
Die Semantik:



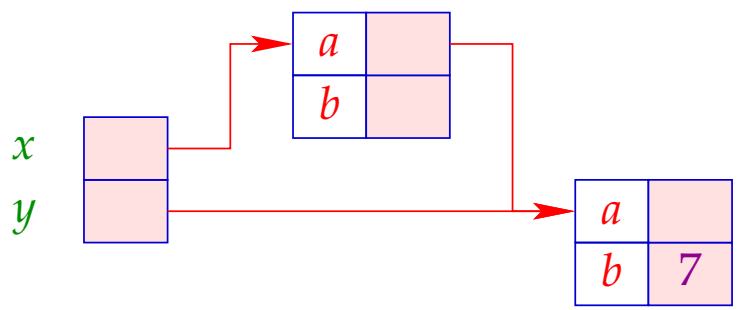
Die Semantik:



Die Semantik:



Die Semantik:



Schwierigeres Beispiel:

$r = \text{Null};$

while $(t \neq \text{Null})$ {

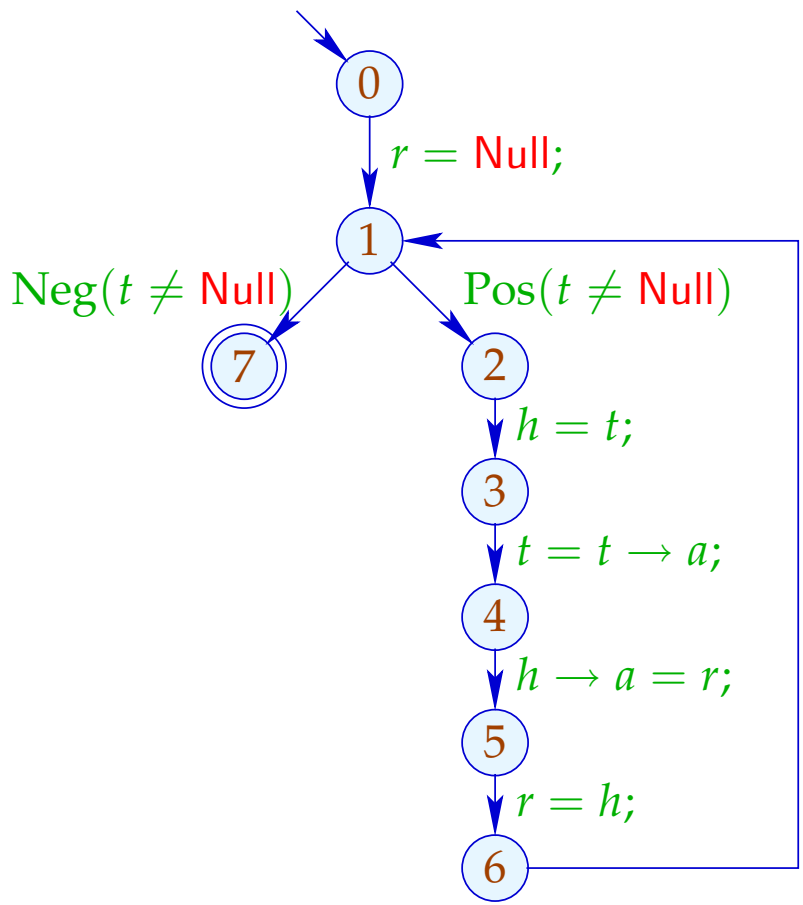
$\quad h = t;$

$\quad t = t \rightarrow a;$

$\quad h \rightarrow a = r;$

$\quad r = h;$

}



Konkrete Semantik:

Ein Speicher ist jetzt eine endliche Ansammlung von Paaren.

Nach h new-Operationen haben wir:

$$
\begin{array}{lcll}
Addr_h & = & \{\mathsf{ref}\ a \mid 0 \leq a < h\} & // \quad \text{Adressen} \\
Val_h & = & Addr_h \cup \mathbb{Z} & // \quad \text{Werte} \\
Store_h & = & (Addr_h \times \{a, b\}) \to Val_h & // \quad \text{Speicher} \\
State_h & = & (Vars \to Val_h) \times Store_h & // \quad \text{Zustände}
\end{array}
$$

Der Einfachheit setzen wir: $0 = \mathsf{Null}$

Sei $(\rho, \mu) \in State_h$. Dann erhalten wir für die neuen Kanten:

$$
\begin{array}{lcl}
[\![x = \mathsf{new}();]\!]\,(\rho, \mu) & = & (\rho \oplus \{x \mapsto \mathsf{ref}\, h\}, \\
 & & \quad \mu \oplus \{(\mathsf{ref}\, h).a \mapsto 0, (\mathsf{ref}\, h).b \mapsto 0\}) \\
[\![x = R \to a;]\!]\,(\rho, \mu) & = & (\rho \oplus \{x \mapsto \mu\,((\rho\, R).a)\}, \mu) \\
[\![R \to a = x;]\!]\,(\rho, \mu) & = & (\rho, \mu \oplus \{(\rho\, R).a \mapsto \rho\, x\})
\end{array}
$$

Achtung:

Diese Semantik ist zu detailliert, weil sie mit absoluten Adressen rechnet. Die beiden Programme:

$$x = \mathsf{new}();\qquad\qquad y = \mathsf{new}();$$
$$y = \mathsf{new}();\qquad\qquad x = \mathsf{new}();$$

werden nicht als äquivalent betrachtet !!?

Ausweg:

Definiere Äquivalenz bis auf Permutation von Adressen :-)

Alias-Analyse 1. Idee:

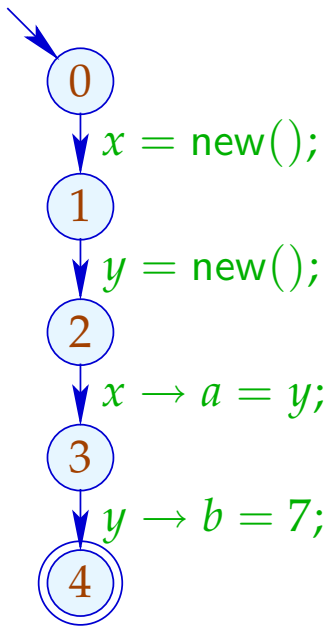
- Unterscheide endlich viele verschiedene Klassen von Objekten im Speicher.
- Benutze Mengen von Adressen als abstrakte Werte!

  $\Longrightarrow$ Points-to-Analyse

$$
\begin{array}{lcll}
Addr^\sharp & = & Edges & // \text{ Erzeugungs-Kanten} \\
Val^\sharp & = & 2^{Addr^\sharp} & // \text{ Abstrakte Werte} \\
Store^\sharp & = & (Addr^\sharp \times \{a, b\}) \to Val^\sharp & // \text{ abstrakter Speicher} \\
State^\sharp & = & (Vars \to Val^\sharp) \times Store^\sharp & // \text{ Zustände}
\end{array}
$$

// vollständiger Verband !!!

... im einfachen Beispiel:



	x	y	$(0,1).a$
0	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
1	$\{(0,1)\}$	$\emptyset$	$\emptyset$
2	$\{(0,1)\}$	$\{(1,2)\}$	$\emptyset$
3	$\{(0,1)\}$	$\{(1,2)\}$	$\{(1,2)\}$
4	$\{(0,1)\}$	$\{(1,2)\}$	$\{(1,2)\}$

Die Kanten-Effekte:

$$
\begin{array}{lcl}
[\![(_, ;, _)]\!]^\sharp\,(D, M) & = & (D, M) \\
[\![(_, \mathrm{Pos}(e), _)]\!]^\sharp\,(D, M) & = & (D, M) \\
[\![(_, x = y;, _)]\!]^\sharp\,(D, M) & = & (D \oplus \{x \mapsto D\,y\}, M) \\
[\![(_, x = e;, _)]\!]^\sharp\,(D, M) & = & (D \oplus \{x \mapsto \emptyset\}, M) \qquad , \qquad e \notin \mathit{Vars} \\
\\
[\![(u, x = \mathsf{new}();, v)]\!]^\sharp\,(D, M) & = & (D \oplus \{x \mapsto \{(u, v)\}\}, M) \\
[\![(_, x = R \to a;, _)]\!]^\sharp\,(D, M) & = & (D \oplus \{x \mapsto \bigcup\{M(f.a) \mid f \in D\,R\}\}, M) \\
[\![(_, R \to a = x;, _)]\!]^\sharp\,(D, M) & = & (D, M \oplus \{f.a \mapsto (M\,(f.a) \cup D\,x) \mid f \in D\,R\}
\end{array}
$$

Achtung:

- Den Wert Null haben wir nicht mit-modelliert. Dereferenzieren von Null kann darum nicht entdeckt werden :-(
- Destruktive Updates sind nur von Variablen möglich, nicht im Speicher!

  $\Longrightarrow$ keine Information, falls Speicher-Objekte nicht vorinitialisiert sind :-((
- Die Kanten-Effekte hängen jetzt von der ganzen Kante ab.

  Die Analyse lässt sich so nicht gegenüber der Referenz-Semantik als korrekt erweisen :-(

  Zur Korrektheit muss die konkrete Semantik mit zusätzlicher Information instrumentiert werden, die vermerkt, an welchem Programmpunkt eine Adresse erzeugt wurde.