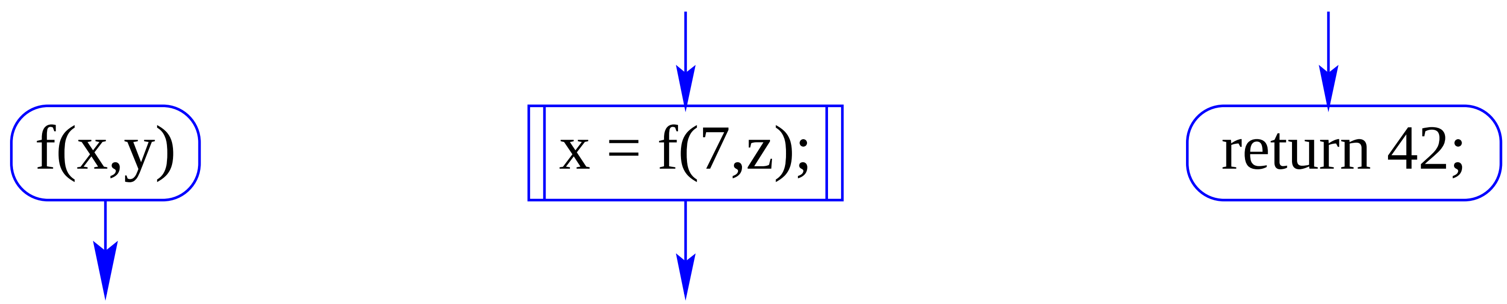
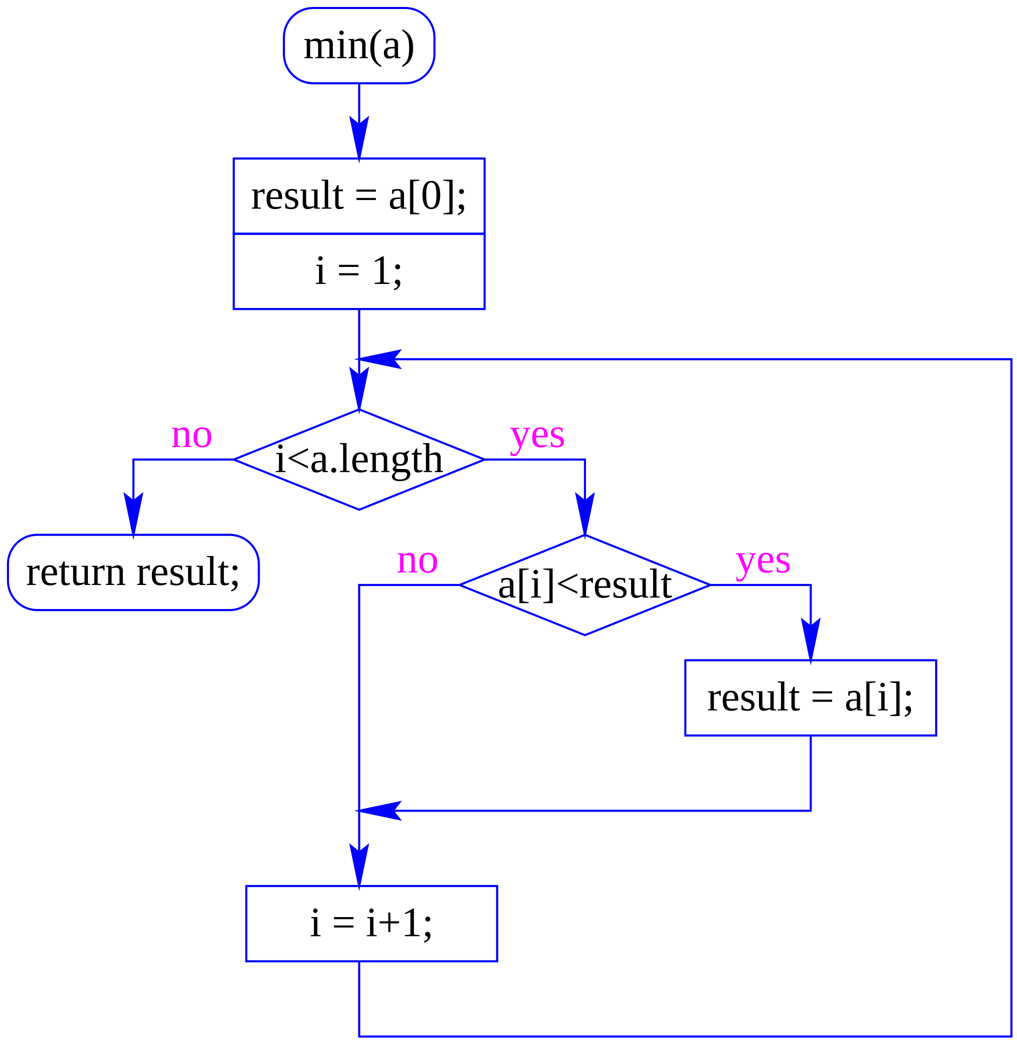
Um die Arbeitsweise von Funktionen zu veranschaulichen, erweitern/modifizieren wir die Kontrollfluss-Diagramme:



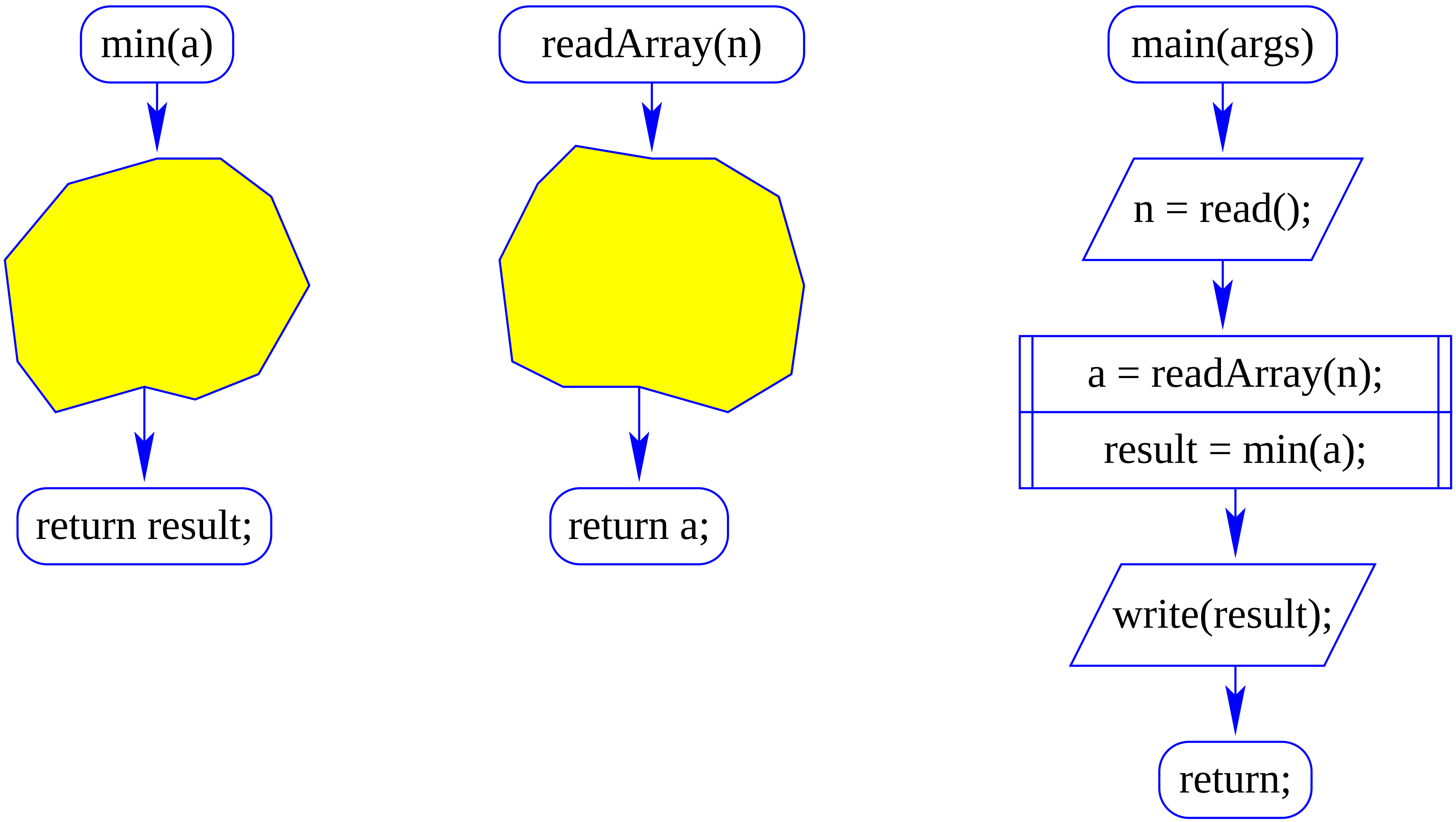
Startknoten der Funktion f — Funktionsaufruf — Endknoten

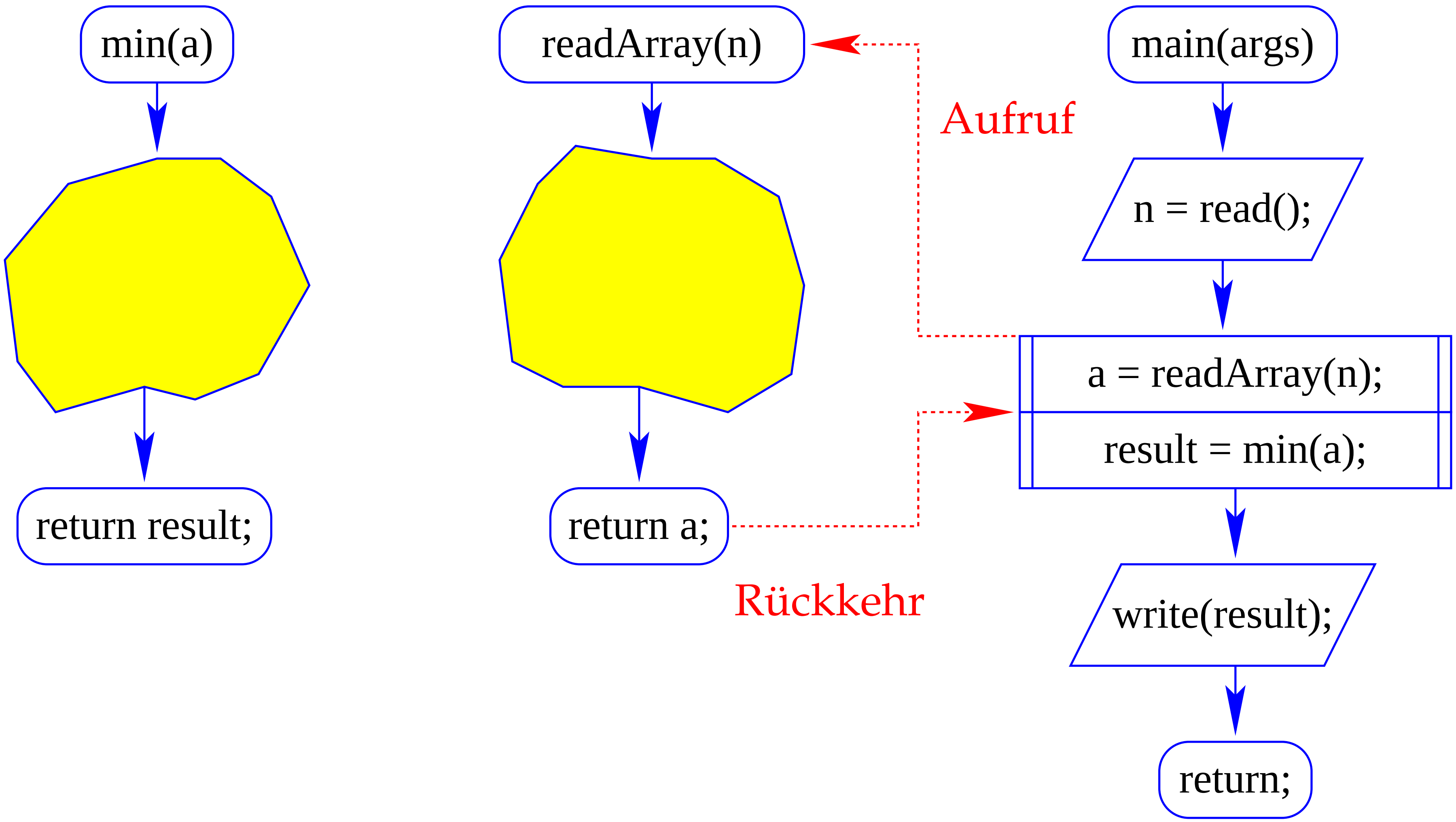
- Für jede Funktion wird ein eigenes Teildiagramm erstellt.
- Ein Aufrufknoten repäsentiert eine Teilberechnung der aufgerufenen Funktion.

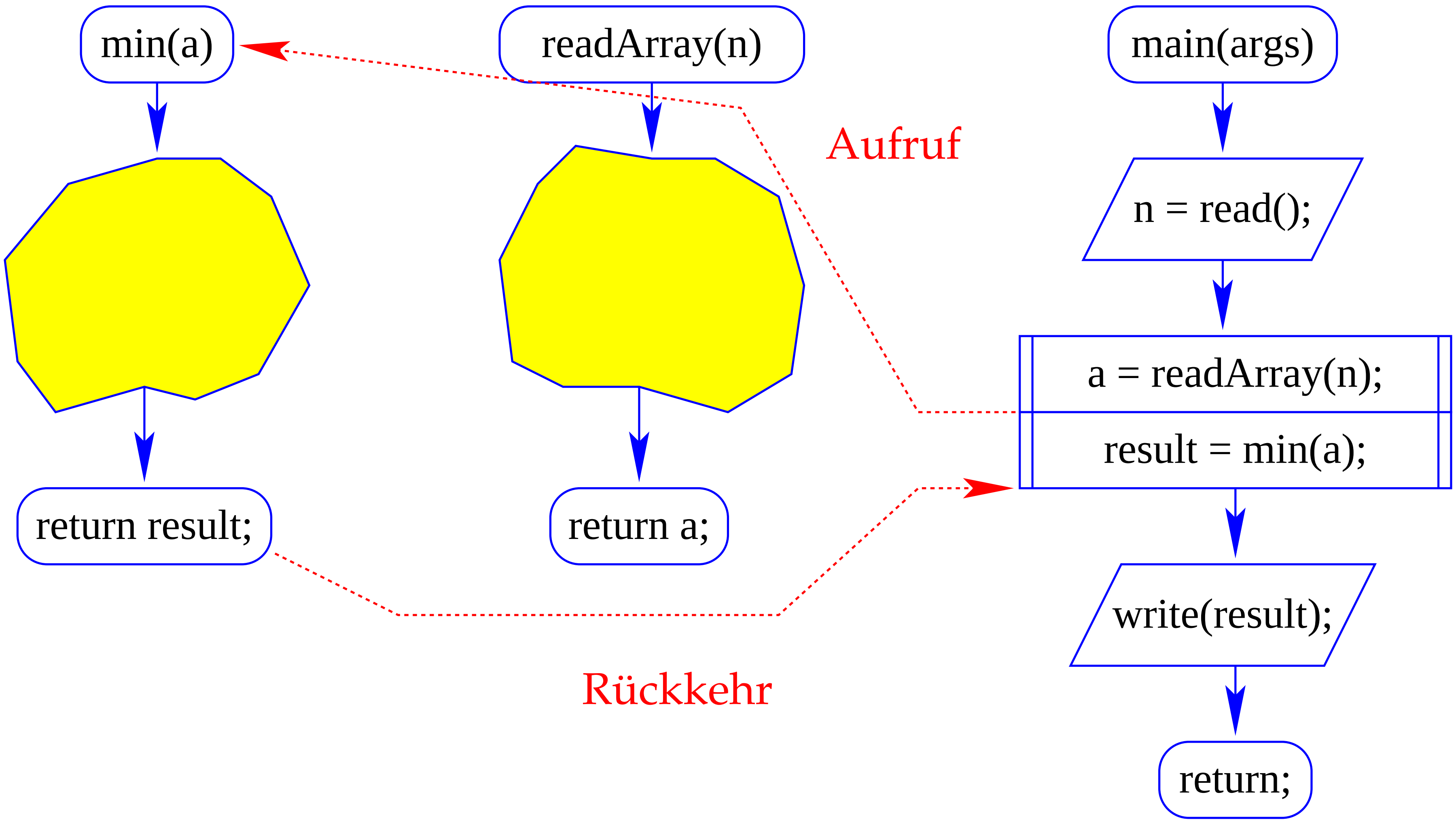
Teildiagramm für die Funktion `min()`:



Insgesamt erhalten wir:




min(a)
return result;
readArray(n)
return a;
Aufruf
Rückkehr
main(args)
n = read();
a = readArray(n);
result = min(a);
write(result);
return;


min(a)
readArray(n)
main(args)
Aufruf
n = read();
a = readArray(n);
result = min(a);
return result;
return a;
write(result);
Rückkehr
return;

6 Eine erste Anwendung: Sortieren

Gegeben: eine Folge von ganzen Zahlen.

Gesucht: die zugehörige aufsteigend sortierte Folge.

6 Eine erste Anwendung: Sortieren

Gegeben: eine Folge von ganzen Zahlen.

Gesucht: die zugehörige aufsteigend sortierte Folge.

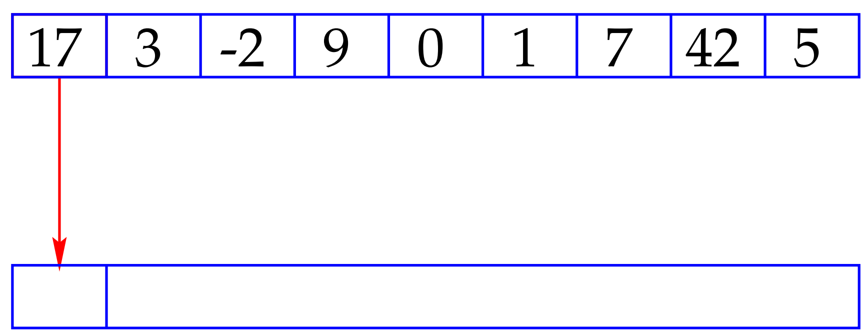
Idee:

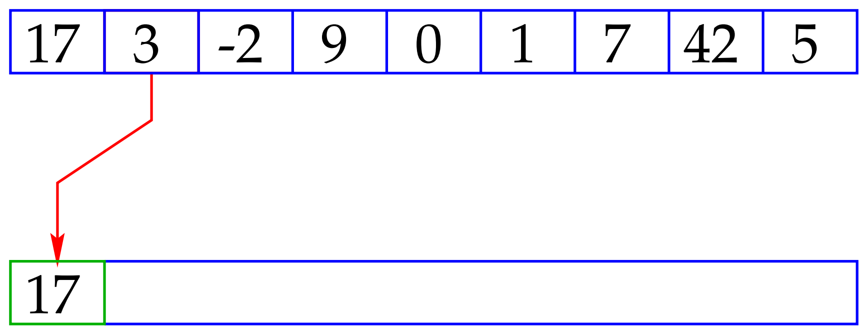
- speichere die Folge in einem Feld ab;
- lege ein weiteres Feld an;
- füge der Reihe nach jedes Element des ersten Felds an der richtigen Stelle in das zweite Feld ein!

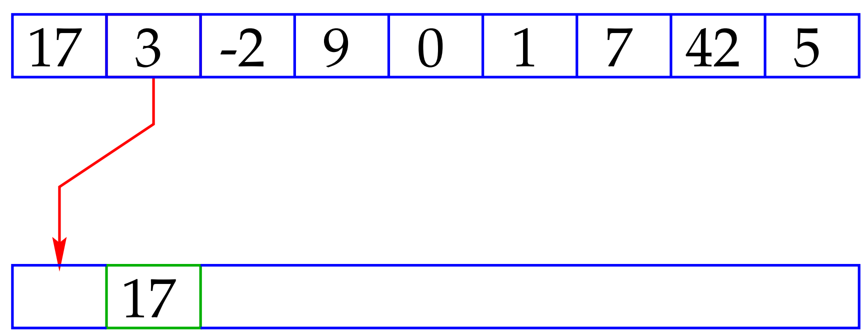
$\Longrightarrow$ Sortieren durch Einfügen ...

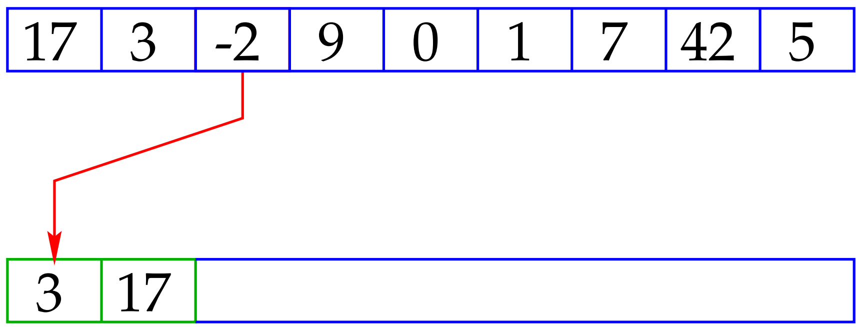
```
public static int[] sort (int[] a) {
    int n = a.length;
    int[] b = new int[n];
    for (int i = 0; i < n; ++i)
        insert (b, a[i], i);
            // b    = Feld, in das eingefügt wird
            // a[i] = einzufügendes Element
            // i    = Anzahl von Elementen in b
    return b;
    } // end of sort ()
```

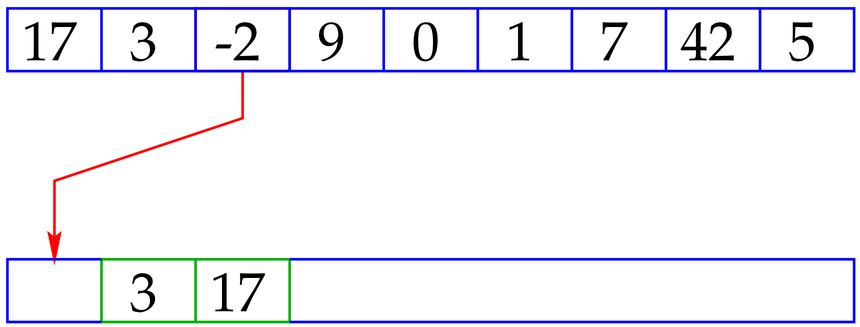
Teilproblem: Wie fügt man ein ???

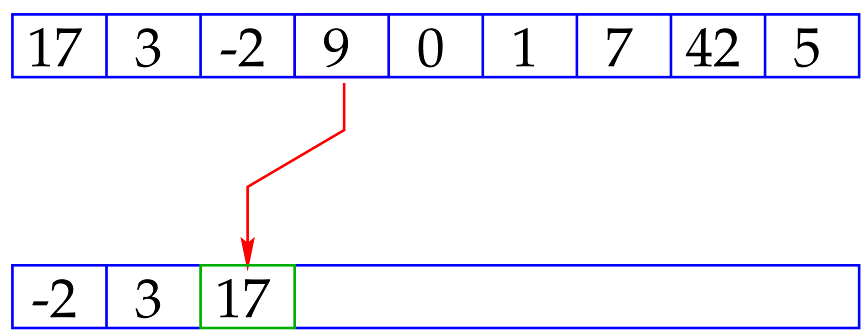

17
3
-2
9
0
1
7
42
5

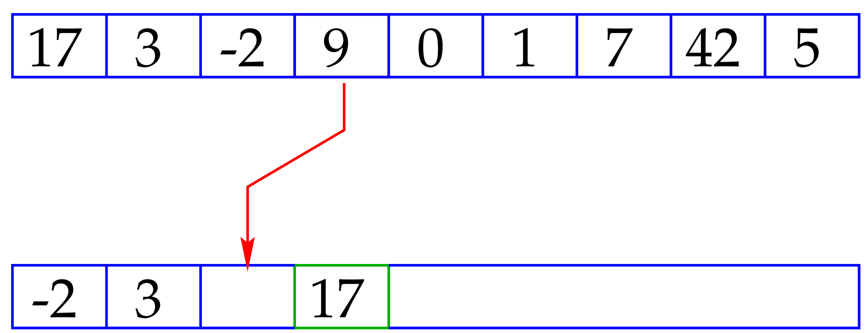

17
3
-2
9
0
1
7
42
5
17

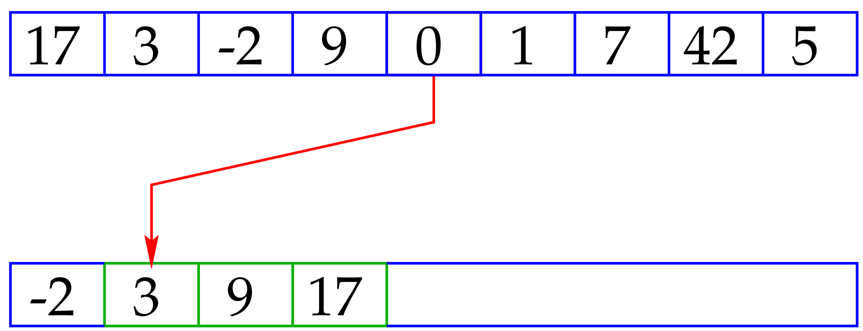

17
3
-2
9
0
1
7
42
5
17

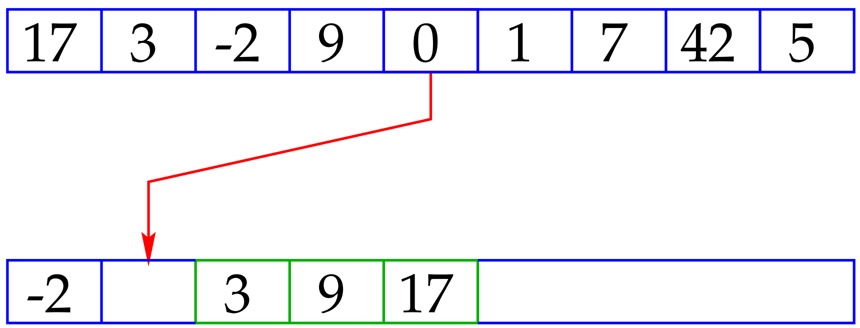

17
3
-2
9
0
1
7
42
5
3
17


17
3
-2
9
0
1
7
42
5
3
17

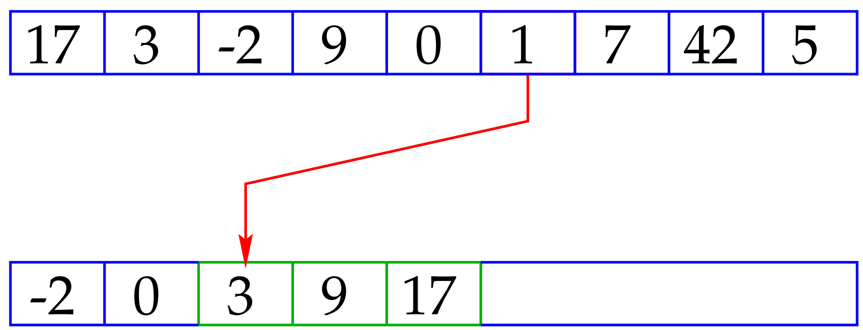

17
3
-2
9
0
1
7
42
5
-2
3
17

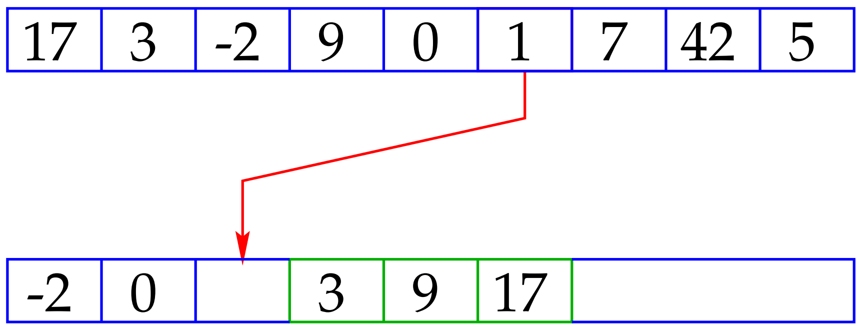

17 3 -2 9 0 1 7 42 5
-2 3 17

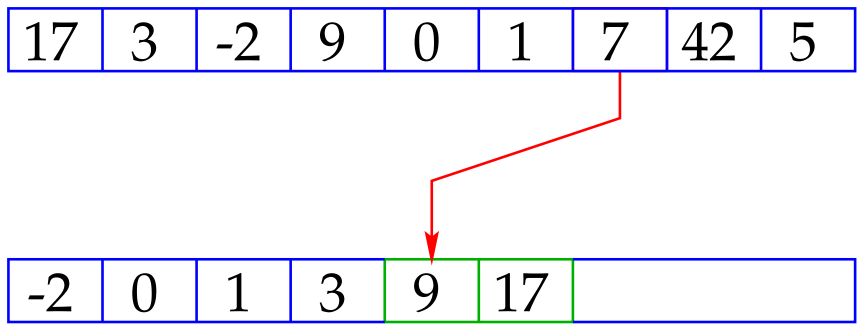

17
3
-2
9
0
1
7
42
5
-2
3
9
17

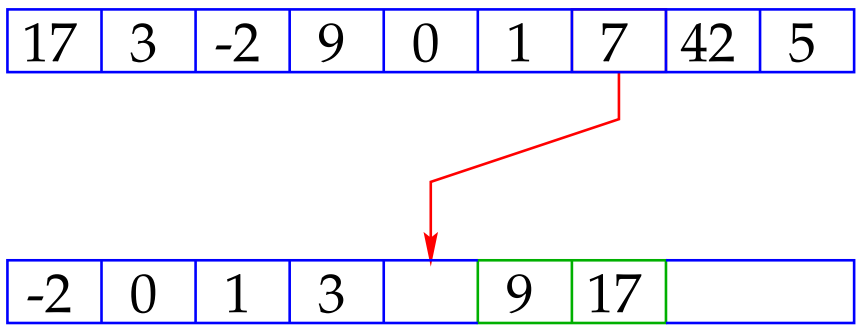


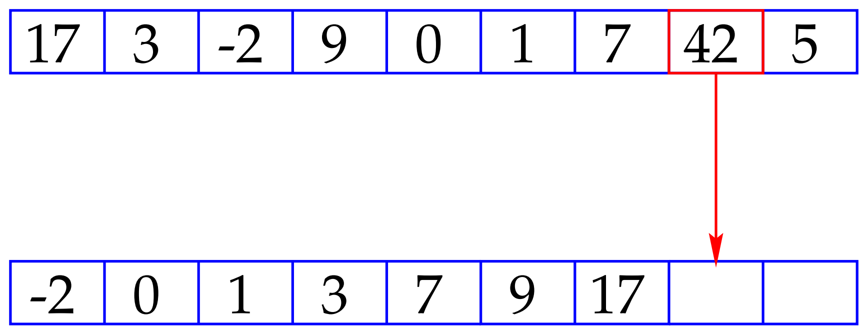
17 3 -2 9 0 1 7 42 5
-2 3 9 17

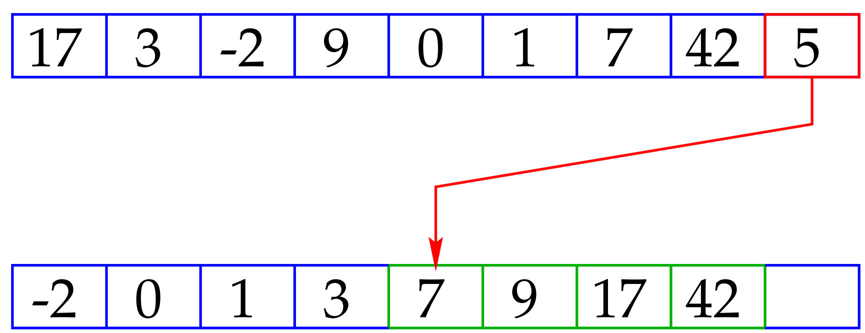

17
3
-2
9
0
1
7
42
5
-2
0
3
9
17

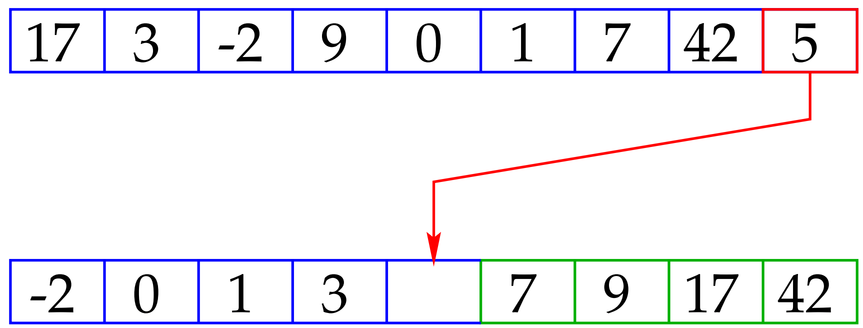

17 3 -2 9 0 1 7 42 5
-2 0 3 9 17


17 3 -2 9 0 1 7 42 5
-2 0 1 3 9 17


17
3
-2
9
0
1
7
42
5
-2
0
1
3
9
17


17
3
-2
9
0
1
7
42
5
-2
0
1
3
7
9
17


17
3
-2
9
0
1
7
42
5
-2
0
1
3
7
9
17
42


17
3
-2
9
0
1
7
42
5
-2
0
1
3
7
9
17
42

17	3	-2	9	0	1	7	42	5

-2	0	1	3	5	7	9	17	42

```
public static void insert (int[] b, int x, int i) {
   int j = locate (b,x,i);
      // findet die Einfügestelle j für x in b
   shift (b,j,i);
      // verschiebt in b die Elemente b[j],...,b[i-1]
      // nach rechts
   b[j] = x;
   }
```

Neue Teilprobleme:

- Wie findet man die Einfügestelle?
- Wie verschiebt man nach rechts?

```
public static int locate (int[] b, int x, int i) {
   int j = 0;
   while (j < i && x > b[j]) ++j;
   return j;
   }

public static void shift (int[] b, int j, int i) {
   for (int k = i-1; k >= j; --k)
       b[k+1] = b[k];
   }
```

- Warum läuft die Iteration in `shift()` von `i-1` abwärts nach `j` ?
- Das zweite Argument des Operators `&&` wird nur ausgewertet, sofern das erste `true` ergibt (Kurzschluss-Auswertung!). Sonst würde hier auf eine uninitialisierte Variable zugegriffen !!!

- Das Feld `b` ist (ursprünglich) eine lokale Variable von `sort()`.
- Lokale Variablen sind nur im eigenen Funktionsrumpf sichtbar, nicht in den aufgerufenen Funktionen !
- Damit die aufgerufenen Hilfsfunktionen auf `b` zugreifen können, muss `b` explizit als Parameter übergeben werden !

  Achtung:

  Das Feld wird nicht kopiert. Das Argument ist der Wert der Variablen `b`, also nur eine Referenz !
- Deshalb benötigen weder `insert()`, noch `shift()` einen separaten Rückgabewert :-)
- Weil das Problem so klein ist, würde eine erfahrene Programmiererin hier keine Unterprogramme benutzen ...

```
public static int[] sort (int[] a) {
   int[] b = new int[a.length];
   for (int i = 0; i < a.length; ++i) {
        // begin of insert
        int j = 0;
        while (j < i && a[i] > b[j]) ++j;
           // end of locate
        for (int k = i-1; k >= j; --k)
           b[k+1] = b[k];
           // end of shift
        b[j] = a[i];
        // end of insert
        }
    return b;
    } // end of sort
```

Diskussion:

- Die Anzahl der ausgeführten Operationen wächst quadratisch in der Größe des Felds `a` :-(
- Gücklicherweise gibt es Sortier-Verfahren, die eine bessere Laufzeit haben (↑Algorithmen und Datenstrukturen).

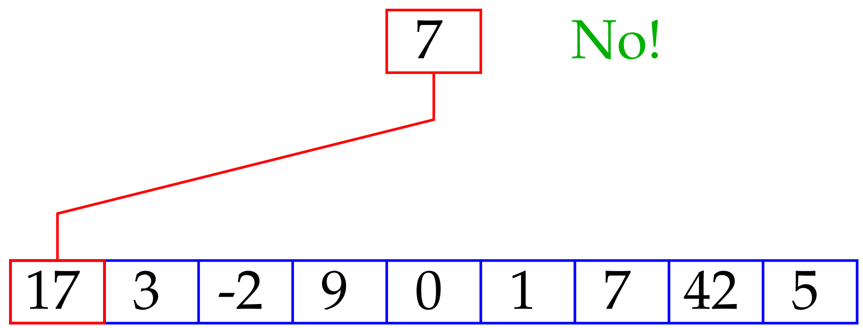
7 Eine zweite Anwendung: Suchen

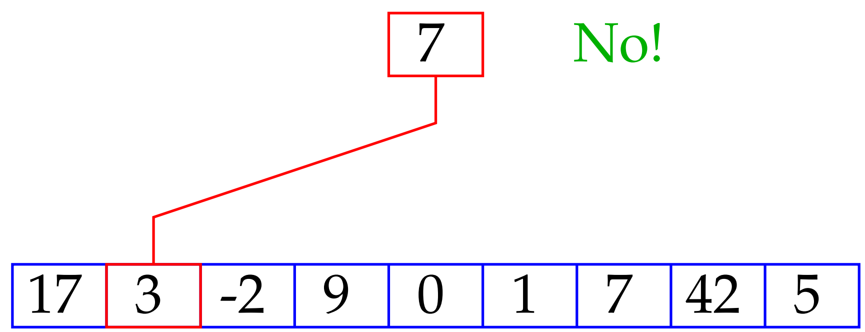
Nehmen wir an, wir wollen herausfinden, ob das Element 7 in unserem Feld `a` enthalten ist.

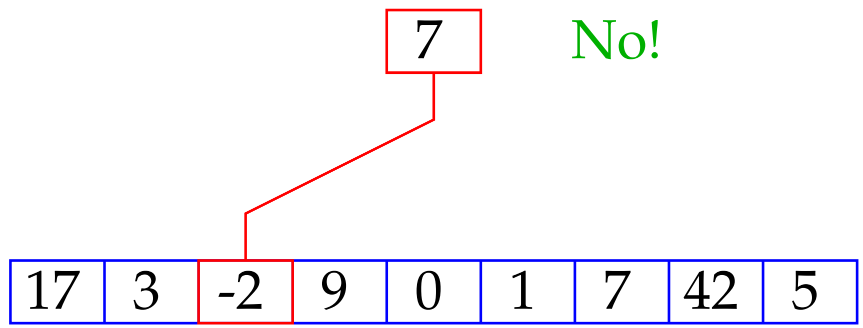
Naives Vorgehen:

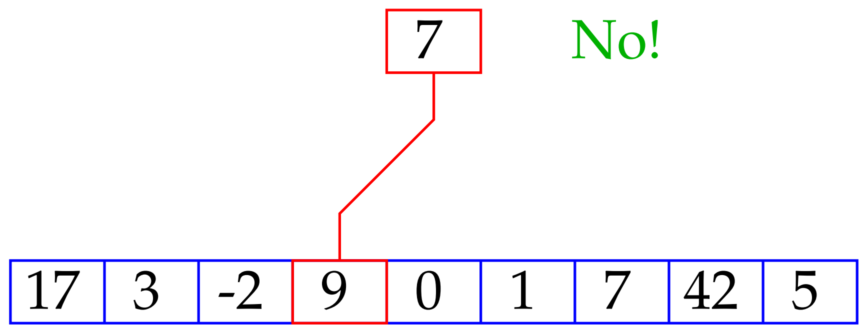
- Wir vergleichen 7 der Reihe nach mit den Elementen `a[0]`, `a[1]`, usw.
- Finden wir ein `i` mit `a[i] == 7`, geben wir `i` aus.
- Andernfalls geben wir `-1` aus: "Sorry, gibt's leider nicht :-("

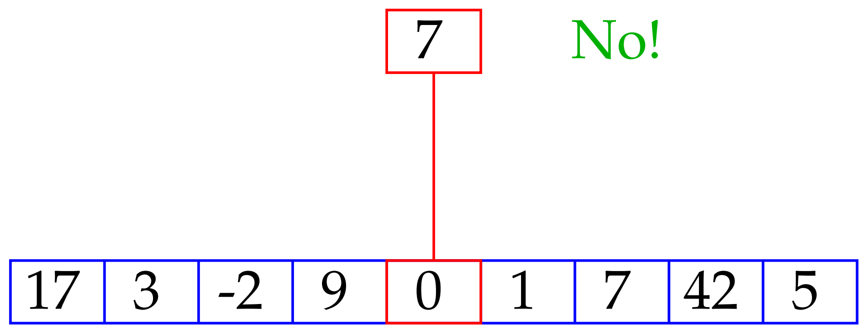
```
public static int find (int[] a, int x) {
   int i = 0;
   while (i < a.length && a[i] != x)
      ++i;
   if (i == a.length)
      return -1;
   else
      return i;
   }
```

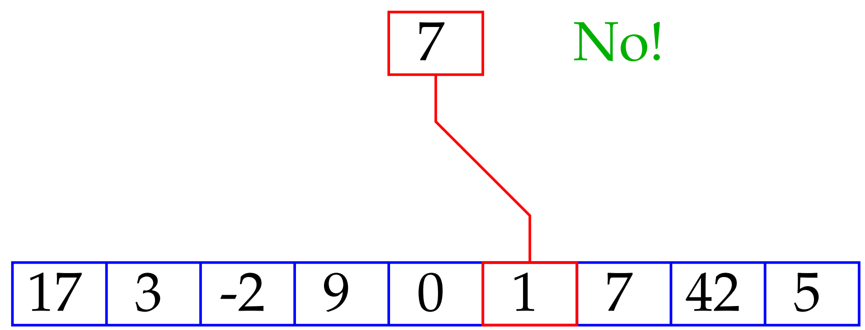

7
No!
17
3
-2
9
0
1
7
42
5

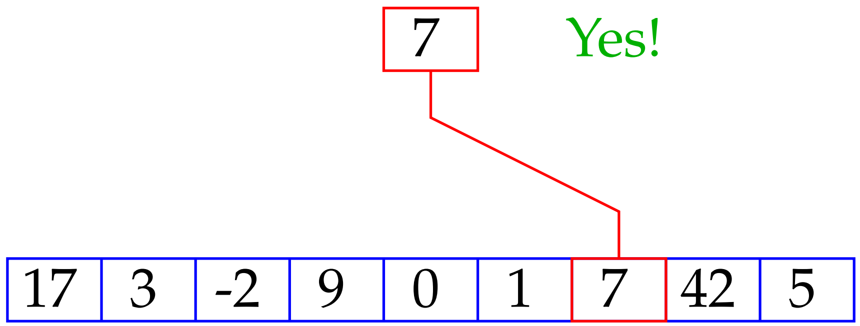

7
No!
17
3
-2
9
0
1
7
42
5


7
No!
17
3
-2
9
0
1
7
42
5


7
No!
17
3
-2
9
0
1
7
42
5


7
No!
17
3
-2
9
0
1
7
42
5


7
No!
17 3 -2 9 0 1 7 42 5


7
Yes!
17
3
-2
9
0
1
7
42
5

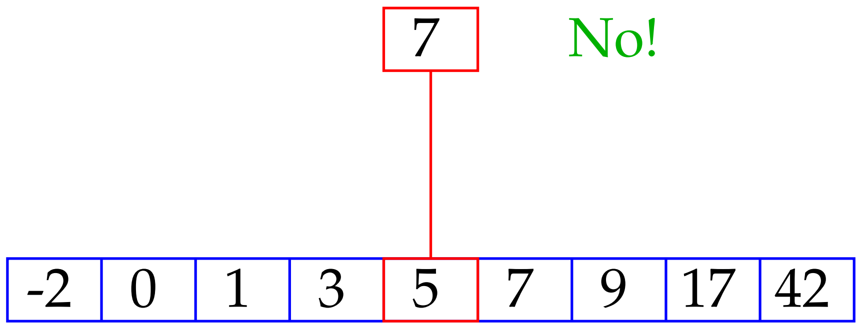
- Im Beispiel benötigen wir 7 Vergleiche.
- Im schlimmsten Fall benötigen wir bei einem Feld der Länge n sogar n Vergleiche :-(
- Kommt 7 tatsächlich im Feld vor, benötigen wir selbst im Durchschnitt $(n+1)/2$ viele Vergleiche :-((

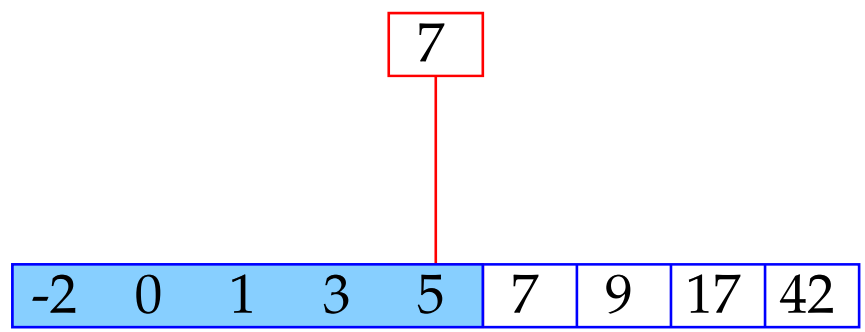
Geht das nicht besser ???

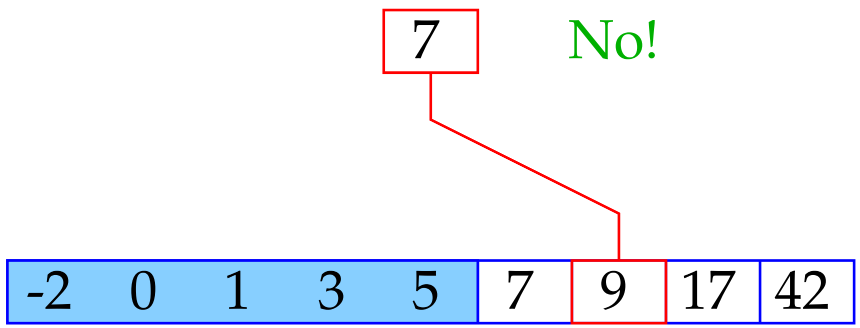
Idee:

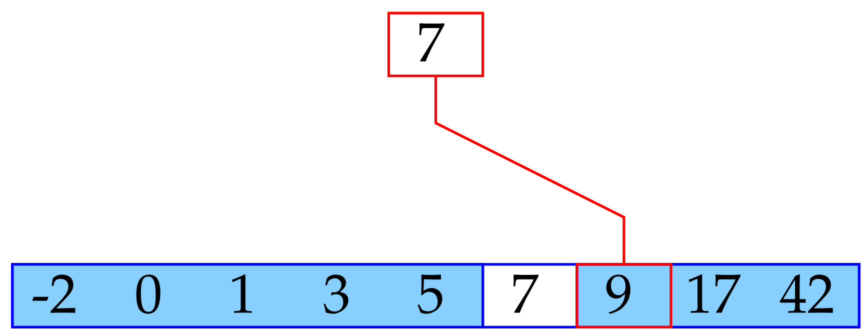
- Sortiere das Feld.
- Vergleiche 7 mit dem Wert, der in der Mitte steht.
- Liegt Gleichheit vor, sind wir fertig.
- Ist 7 kleiner, brauchen wir nur noch links weitersuchen.
- Ist 7 größer, brauchen wir nur noch rechts weiter suchen.

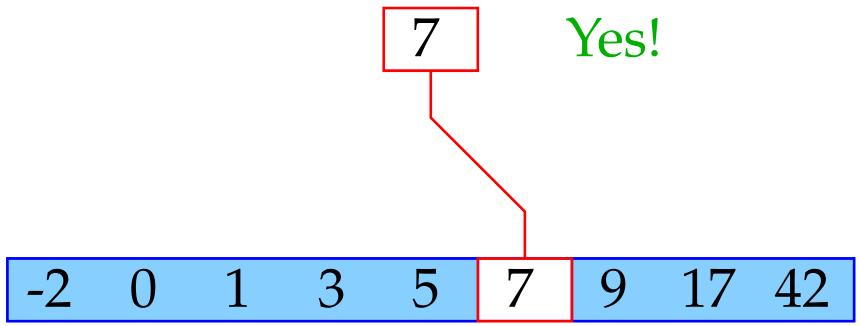
$\Longrightarrow$ binäre Suche ...


7
No!
-2
0
1
3
5
7
9
17
42


7
-2
0
1
3
5
7
9
17
42


7
No!
-2 0 1 3 5 7 9 17 42


7
-2 0 1 3 5 7 9 17 42


7
Yes!
-2 0 1 3 5 7 9 17 42

- D.h. wir benötigen gerade mal drei Vergleiche.
- Hat das sortierte Feld $2^n - 1$ Elemente, benötigen wir maximal n Vergleiche.

Idee:

Wir führen eine Hilfsfunktion

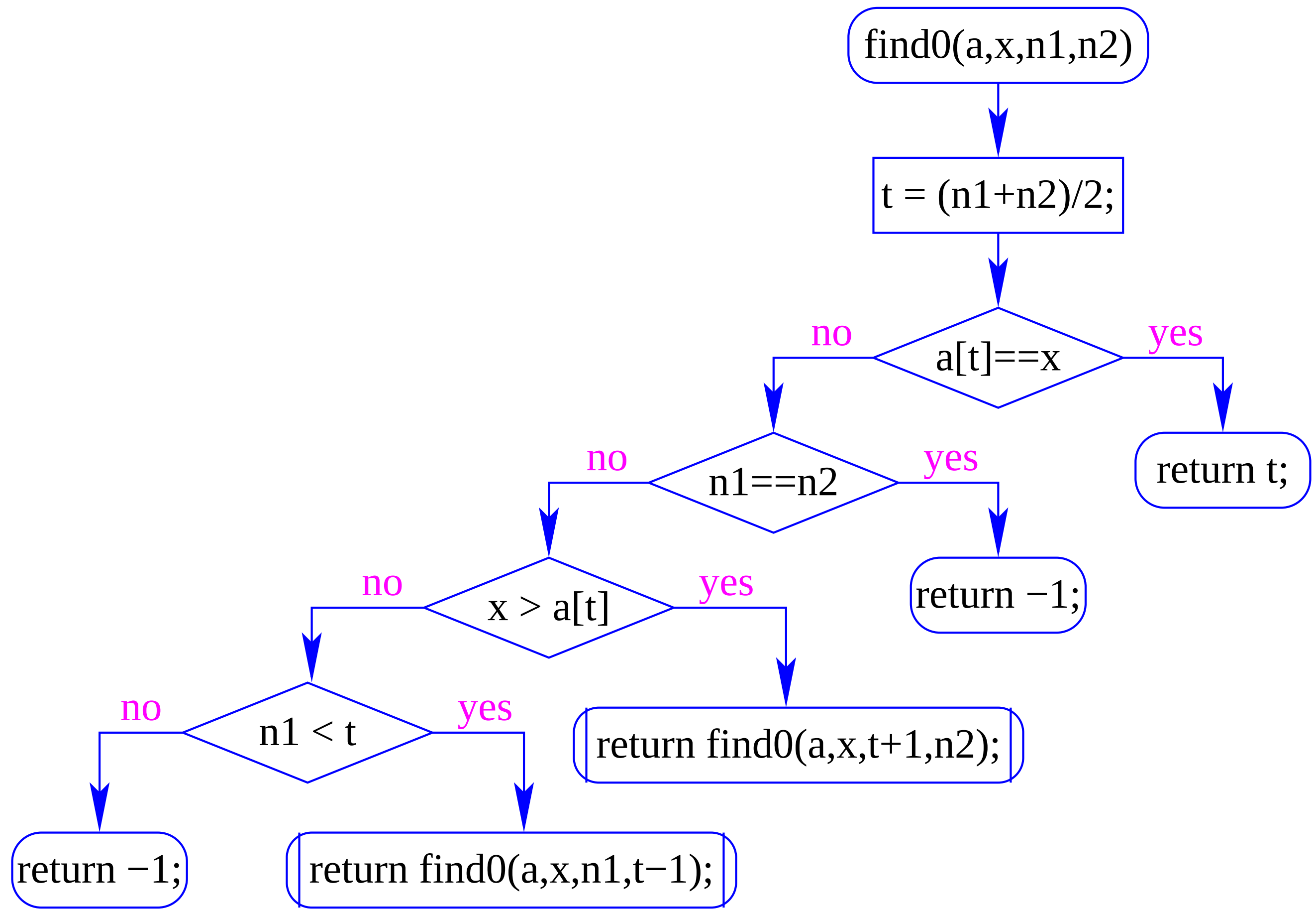
```
public static int find0 (int[] a, int x, int n1, int n2)
```

ein, die im Intervall $[\texttt{n1},\texttt{n2}]$ sucht. Damit:

```
public static int find (int[] a, int x) {
    return find0 (a, x, 0, a.length-1);
    }
```

```
public static int find0 (int[] a, int x, int n1, int n2) {
   int t = (n1+n2)/2;
   if (a[t] == x)
      return t;
   else if (n1 == n2)
      return -1;
   else if (x > a[t])
      return find0 (a,x,t+1,n2);
   else if (n1 < t)
      return find0 (a,x,n1,t-1);
   else return -1;
   }
```

Das Kontrollfluss-Diagramm für `find0()`:



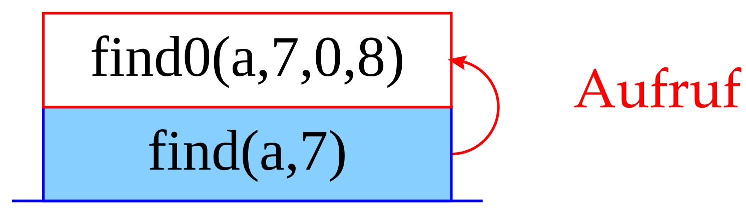
Achtung:

- zwei der `return`-Statements enthalten einen Funktionsaufruf – deshalb die Markierungen an den entsprechenden Knoten.
- (Wir hätten stattdessen auch zwei Knoten und eine Hilfsvariable `result` einführen können :-)
- `find0()` ruft sich selbst auf.
- Funktionen, die sich selbst (evt. mittelbar) aufrufen, heißen rekursiv.

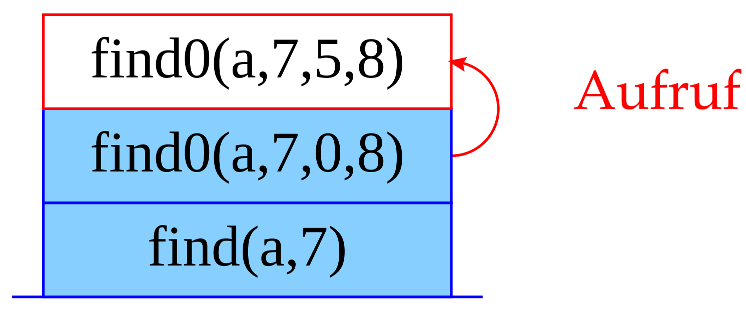
Ausführung:

find(a,7)

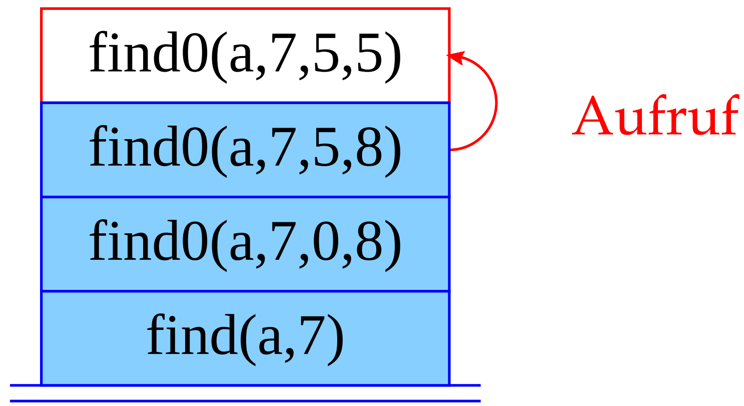
Ausführung:



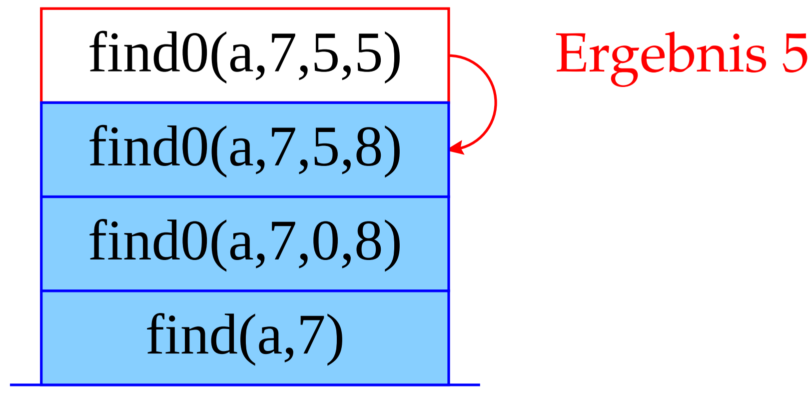
Ausführung:



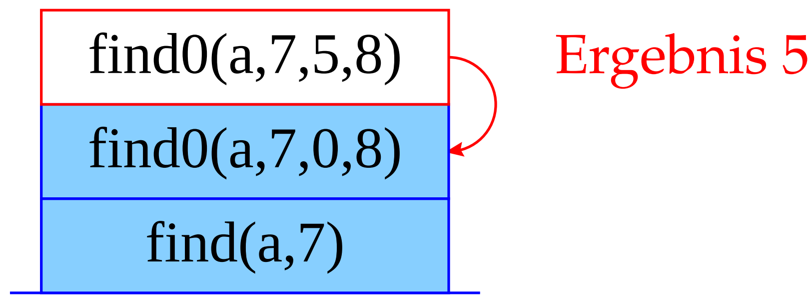
Ausführung:



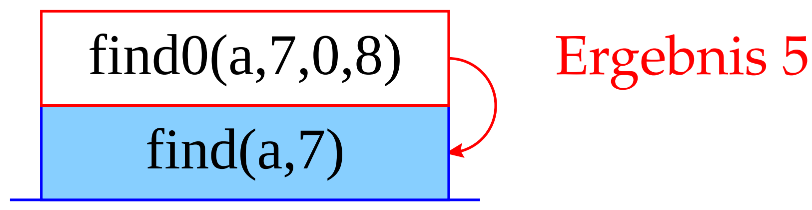
Ausführung:



Ausführung:



Ausführung:



Ausführung:

find(a,7) Ergebnis 5

- Die Verwaltung der Funktionsaufrufe erfolgt nach dem LIFO-Prinzip (Last-In-First-Out).
- Eine Datenstruktur, die nach diesem Stapel-Prinzip verwaltet wird, heißt auch Keller oder Stack.
- Aktiv ist jeweils nur der oberste/letzte Aufruf.
- Achtung: es kann zu einem Zeitpunkt mehrere weitere inaktive Aufrufe der selben Funktion geben !!!

Um zu beweisen, dass `find0()` terminiert, beobachten wir:

1. Wird `find0()` für ein ein-elementiges Intervall `[n,n]` aufgerufen, dann terminiert der Funktionsaufruf direkt.

2. wird `find0()` für ein Intervall `[n1,n2]` aufgerufen mit mehr als einem Element, dann terminiert der Aufruf entweder direkt (weil `x` gefunden wurde), oder `find0()` wird mit einem Intervall aufgerufen, das echt in `[n1,n2]` enthalten ist, genauer: sogar maximal die Hälfte der Elemente von `[n1,n2]` enthält.

$\Longrightarrow$ ähnliche Technik wird auch für andere rekursive Funktionen angewandt.

Beobachtung:

- Das Ergebnis eines Aufrufs von `find0()` liefert direkt das Ergebnis auch für die aufrufende Funktion!
- Solche Rekursion heißt End- oder Tail-Rekursion.
- End-Rekursion kann auch ohne Aufrufkeller implementiert werden ...
- Idee: lege den neuen Aufruf von `find0()` nicht oben auf den Stapel drauf, sondern ersetze den bereits dort liegenden Aufruf !

Verbesserte Ausführung:

find(a,7)

Verbesserte Ausführung:

$\boxed{\text{find0(a,7,0,8)}}$

Verbesserte Ausführung:

$\boxed{\text{find0(a,7,5,8)}}$

Verbesserte Ausführung:

$\boxed{\text{find0(a,7,5,5)}}$

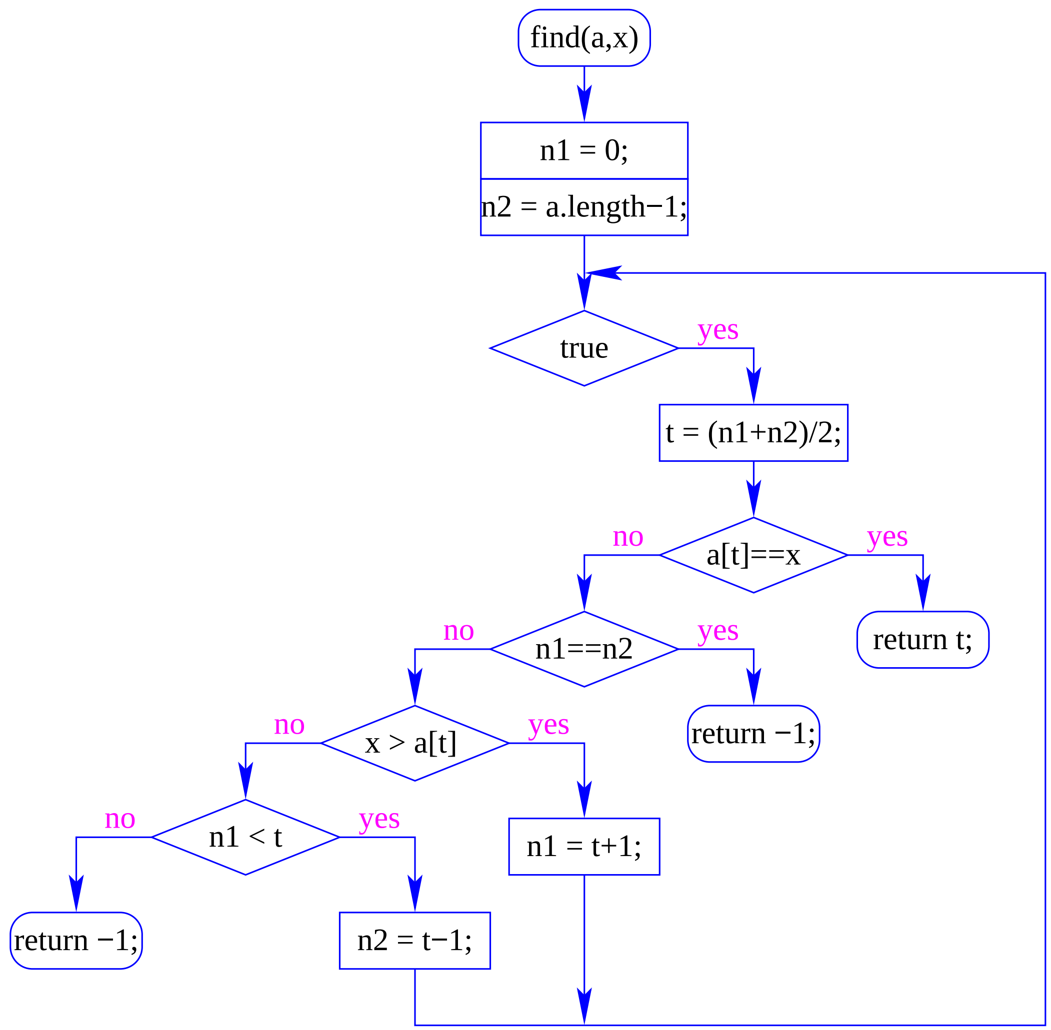
Verbesserte Ausführung:

$\boxed{\text{find0(a,7,5,5)}}$ Ergebnis: 5

$\Longrightarrow$ end-Rekursion kann durch Iteration (d.h. eine normale Schleife) ersetzt werden ...

```
public static int find (int[] a, int x) {
   int n1 = 0;
   int n2 = a.length-1;
   while (true) {
      int t = (n2+n1)/2;
      if (x == a[t]) return t;
      else if (n1 == n2) return -1;
      else if (x > a[t]) n1 = t+1;
      else if (n1 < t) n2 = t-1;
      else return -1;
      }  // end of while
   }     // end of find
```

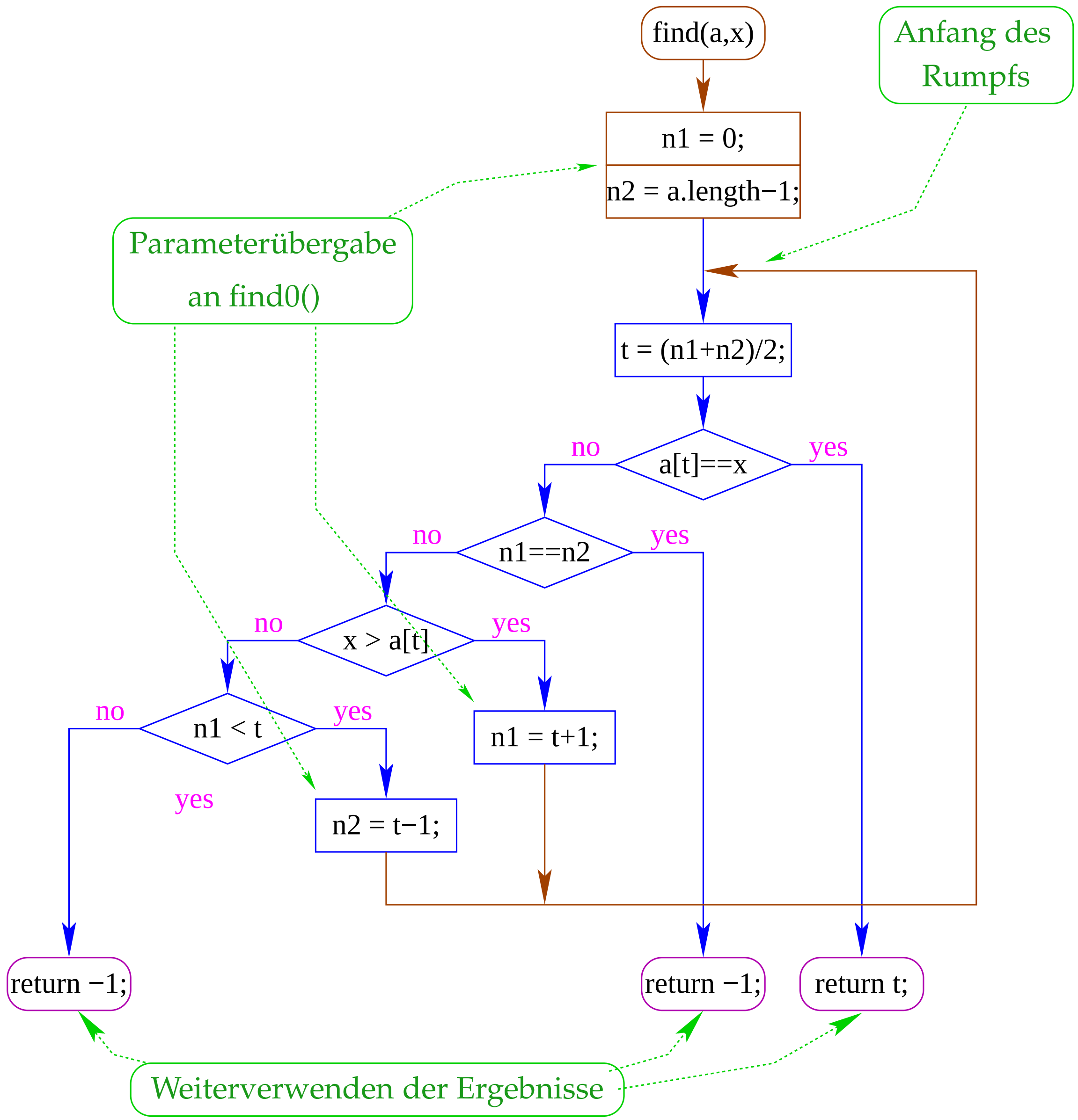
Das Kontrollfluss-Diagramm:



- Die Schleife wird hier alleine durch die `return`-Anweisungen verlassen.
- Offenbar machen Schleifen mit mehreren Ausgängen Sinn.
- Um eine Schleife zu verlassen, ohne gleich ans Ende der Funktion zu springen, kann man das `break`-Statement benutzen.
- Der Aufruf der end-rekursiven Funktion wird ersetzt durch:

  1. Code zur Parameter-Übergabe;
  2. einen Sprung an den Anfang des Rumpfs.

- Aber Achtung, wenn die Funktion an mehreren Stellen benutzt wird !!!
  (Was ist das Problem ?-)


find(a,x)
Anfang des Rumpfs
n1 = 0;
n2 = a.length−1;
Parameterübergabe an find0()
t = (n1+n2)/2;
no
a[t]==x
yes
no
n1==n2
yes
no
x > a[t]
yes
no
n1 < t
yes
n1 = t+1;
yes
n2 = t−1;
return −1;
return −1;
return t;
Weiterverwenden der Ergebnisse

Bemerkung:

- Jede Rekursion lässt sich beseitigen, indem man den Aufruf-Keller explizit verwaltet.
- Nur im Falle von End-Rekursion kann man auf den Keller verzichten.
- Rekursion ist trotzdem nützlich, weil rekursive Programme oft leichter zu verstehen sind als äquivalente Programme ohne Rekursion ...