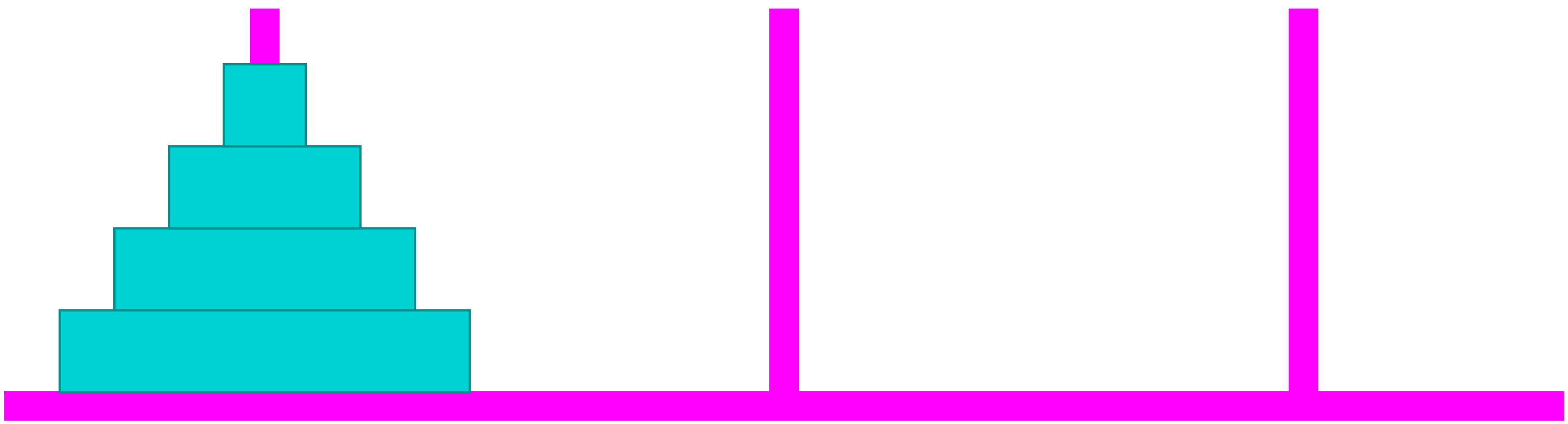
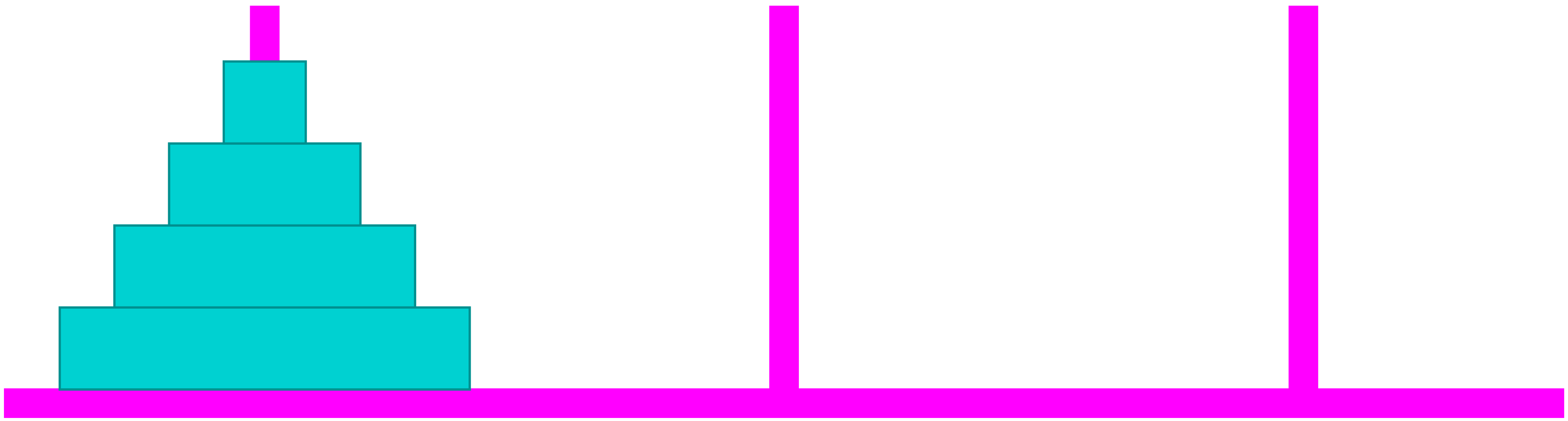
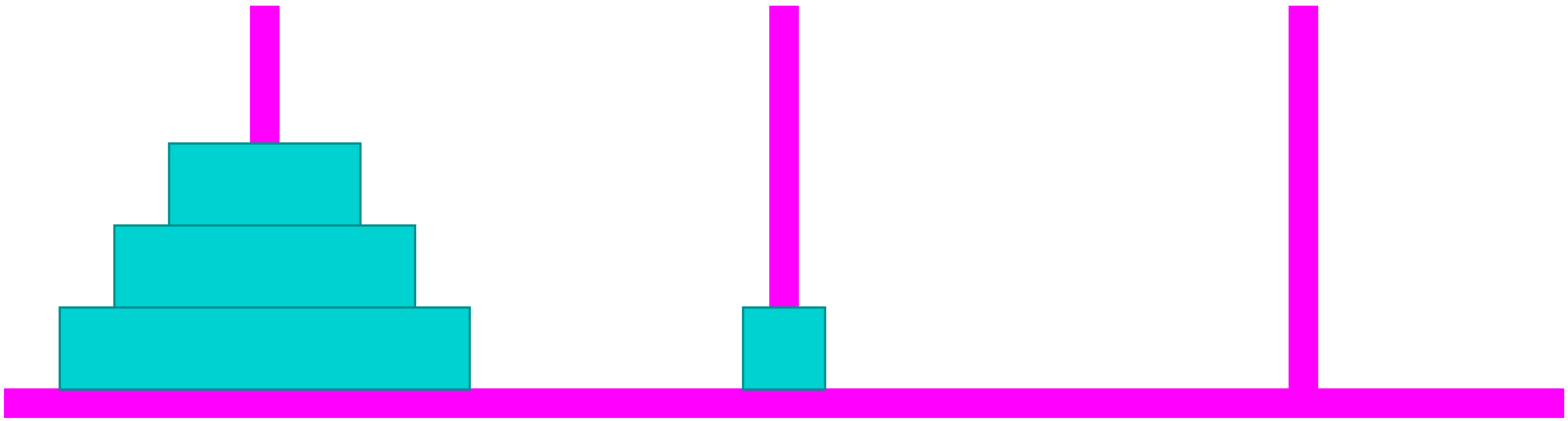
8 Die Türme von Hanoi

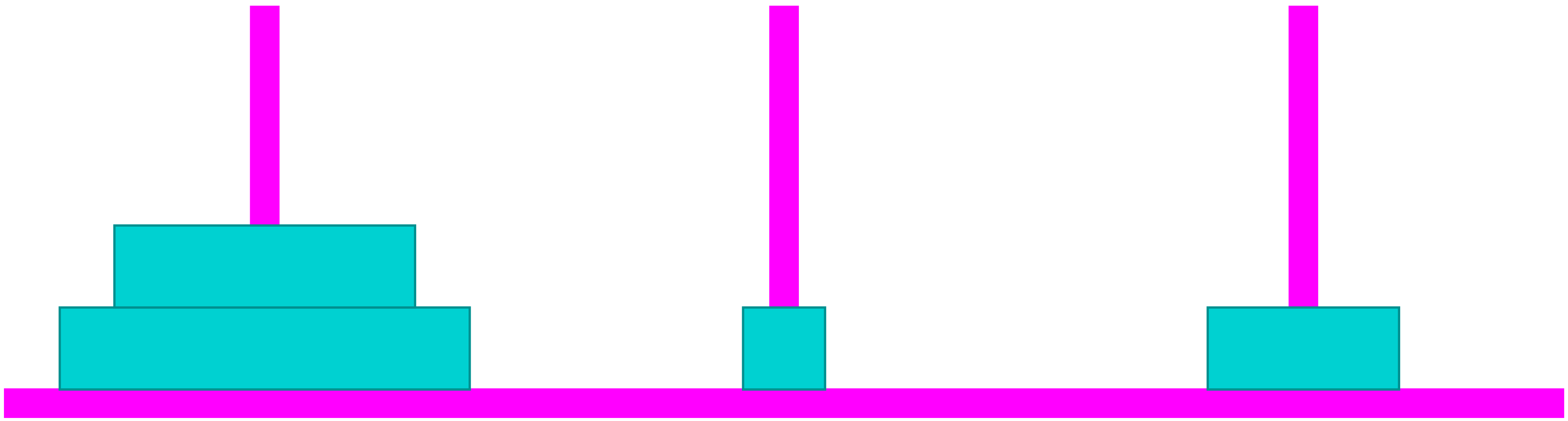
Problem:

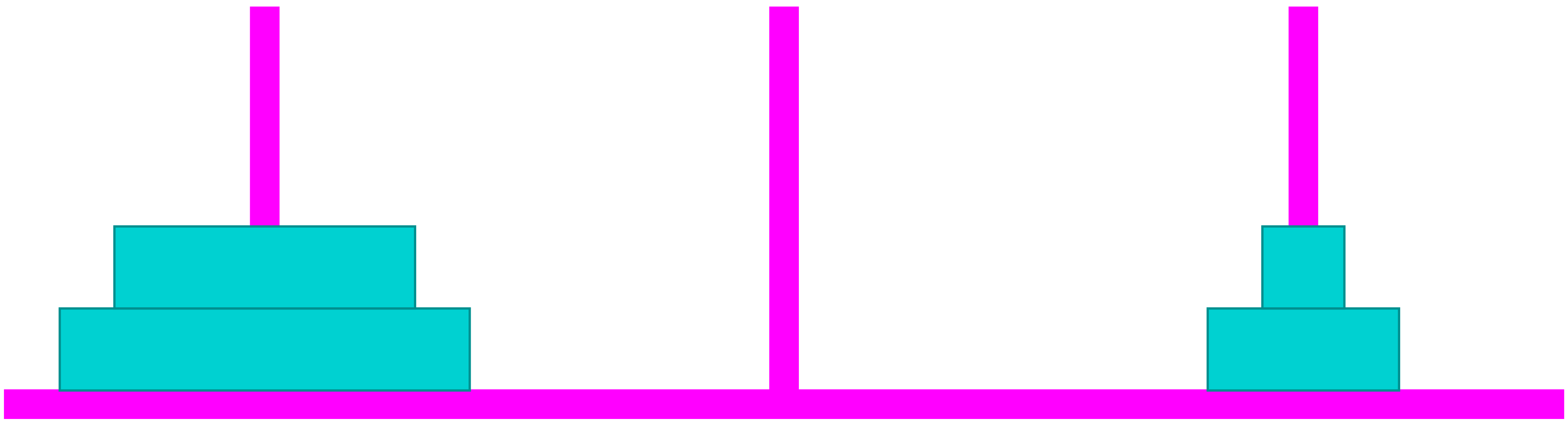


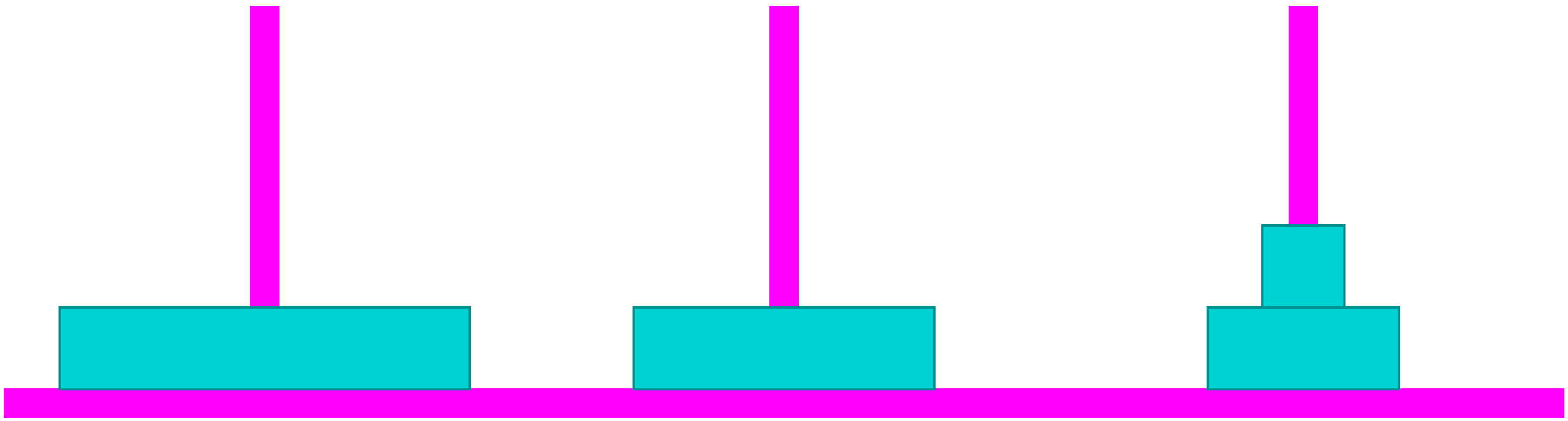
- Bewege den Stapel von links nach rechts!
- In jedem Zug darf genau ein Ring bewegt werden.
- Es darf nie ein größerer Ring auf einen kleineren gelegt werden.

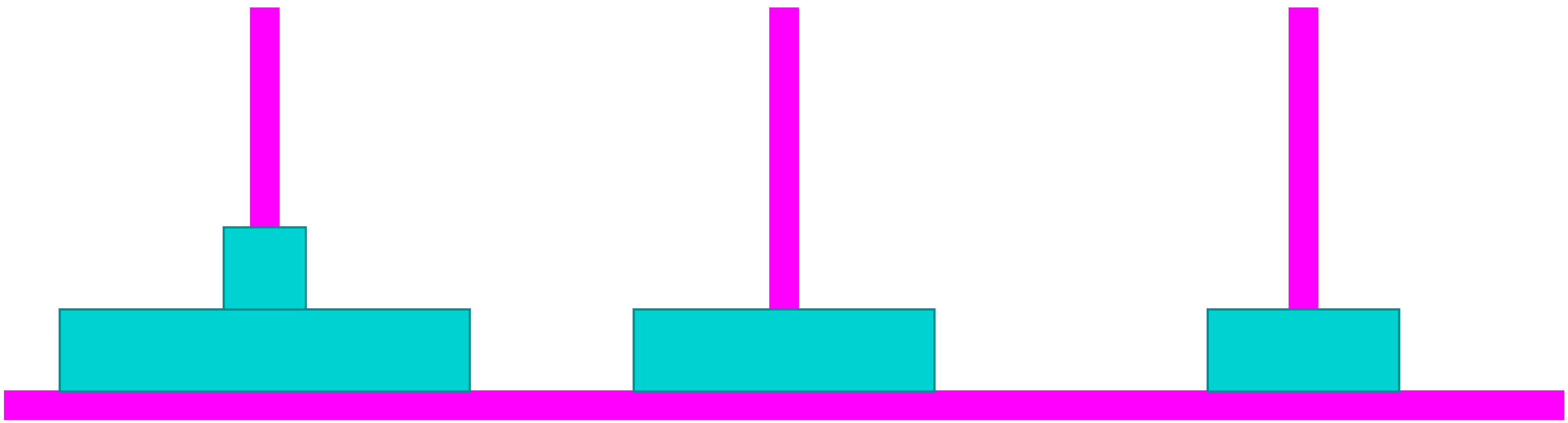


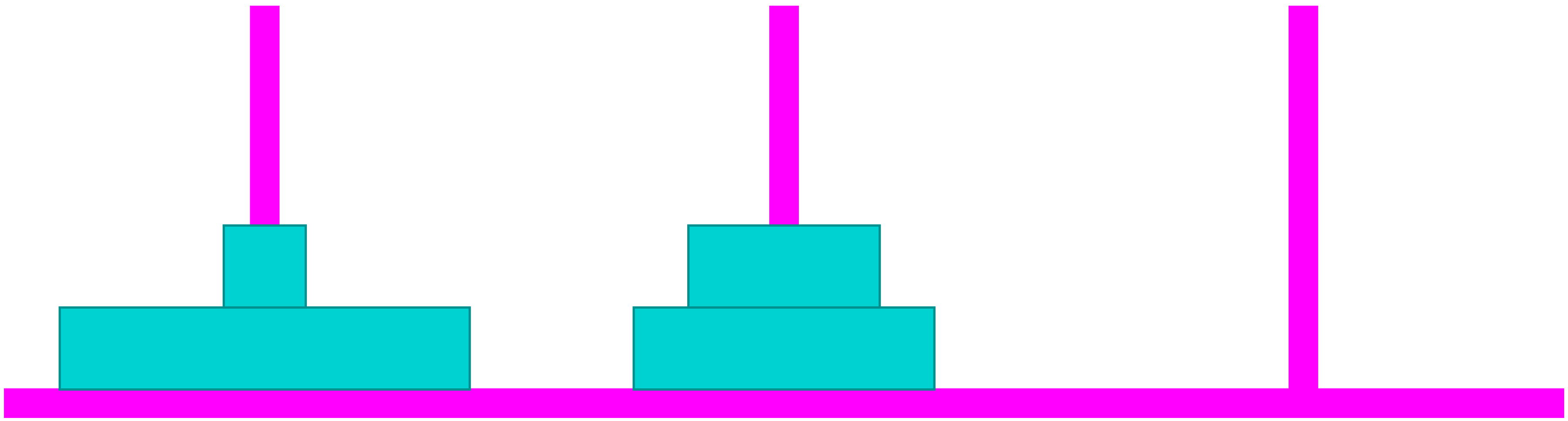


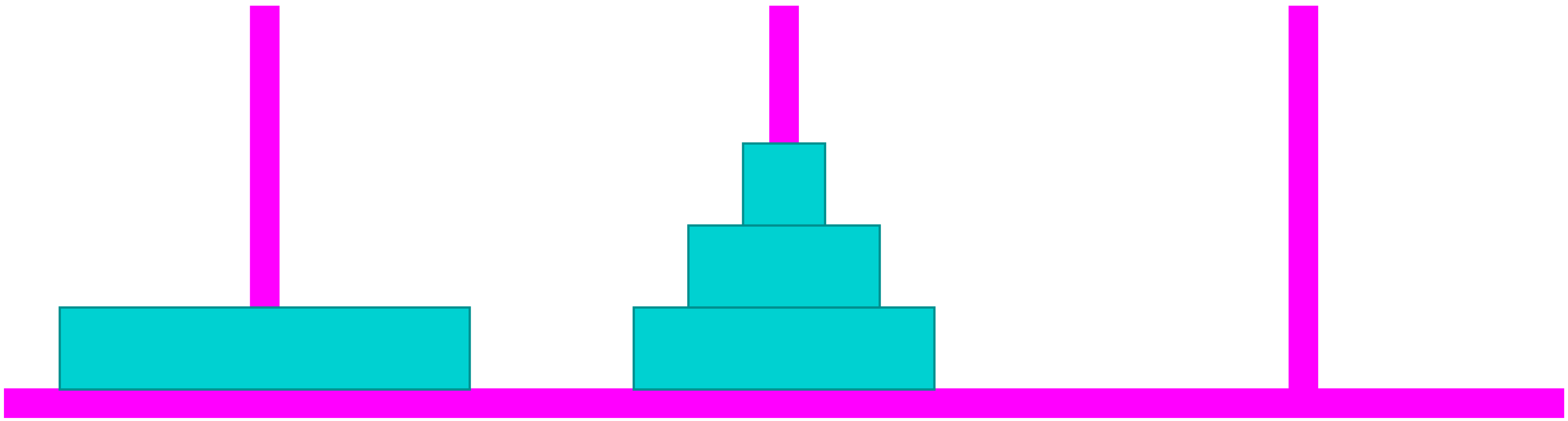


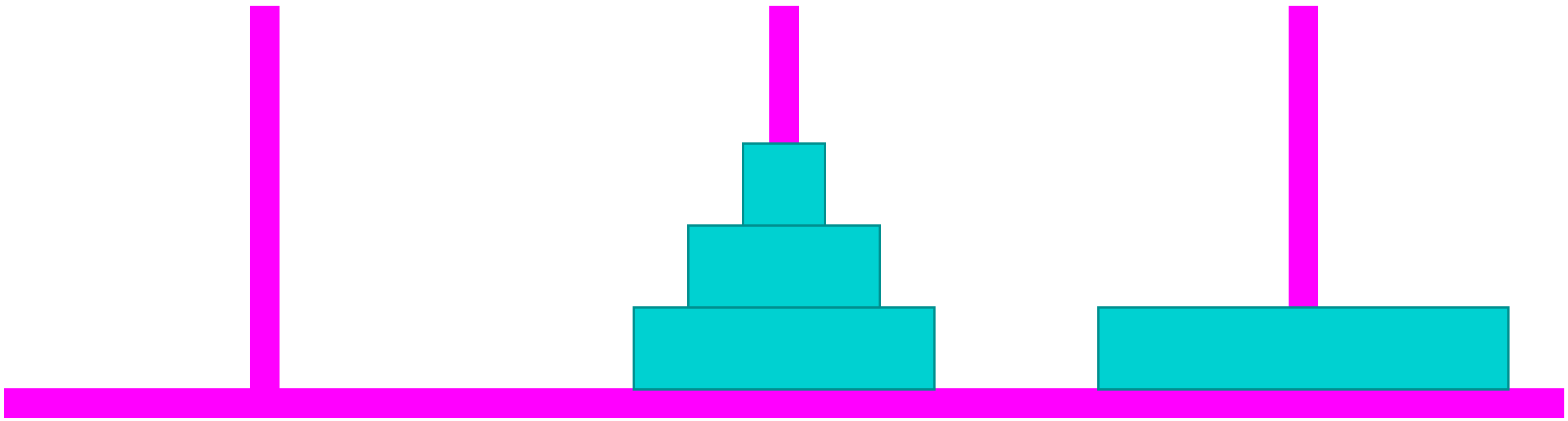


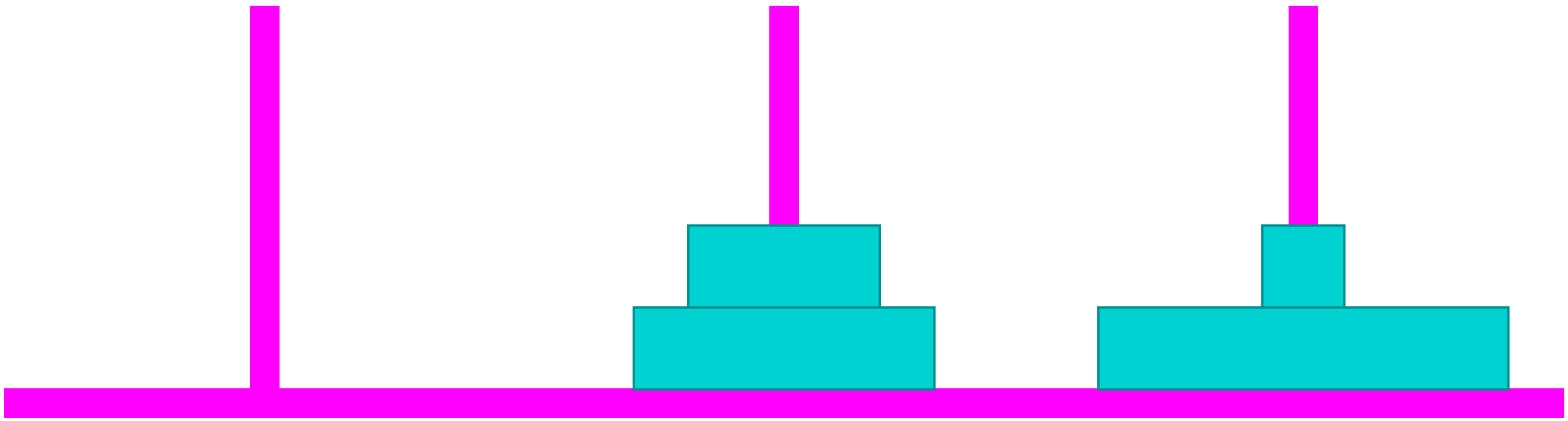


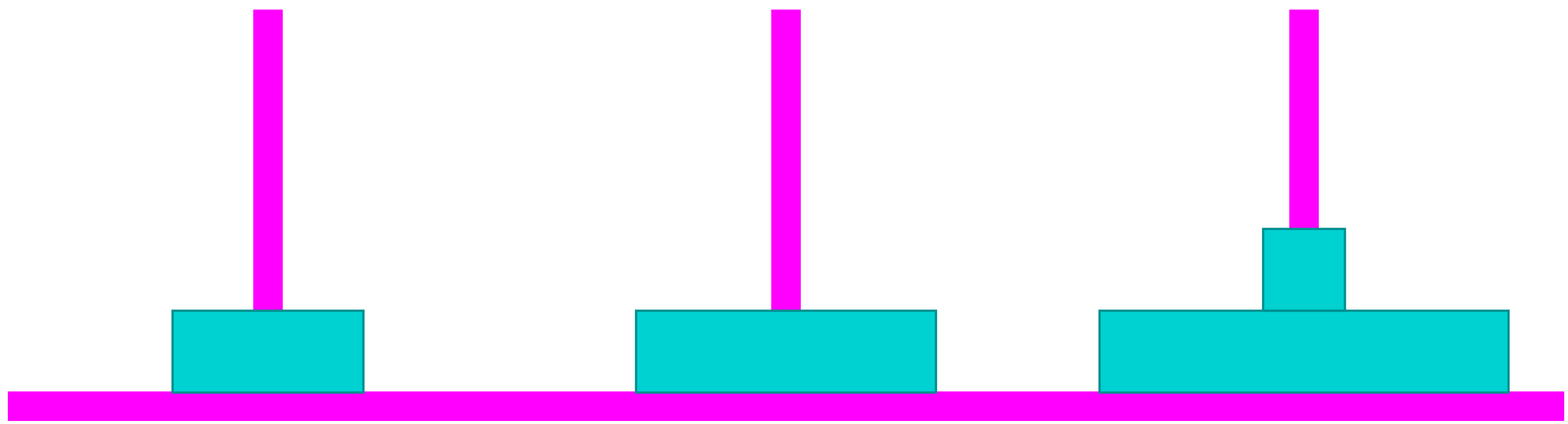


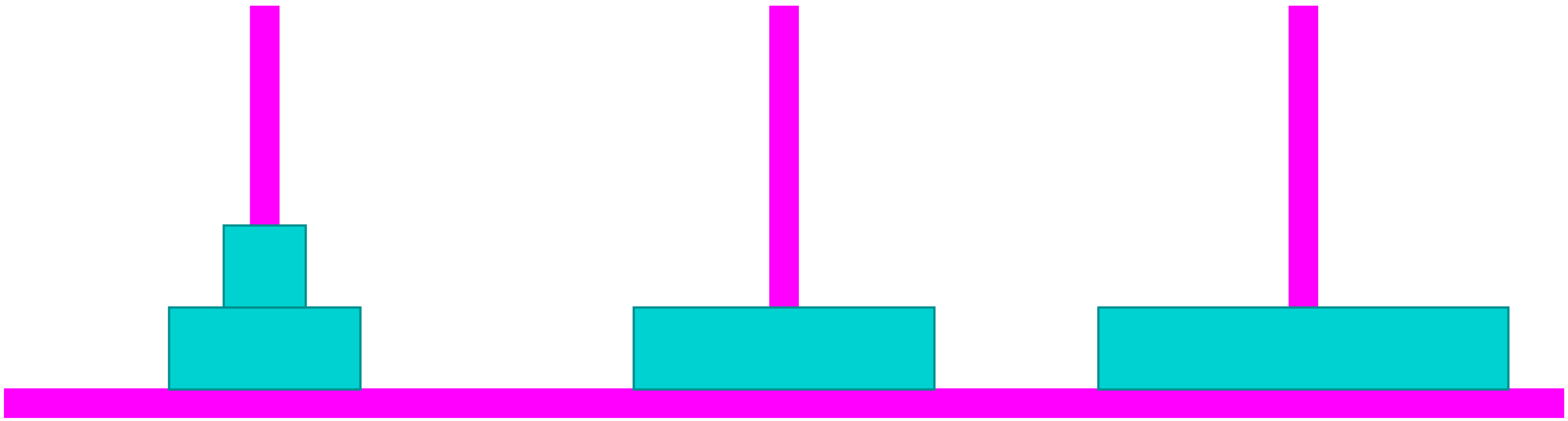


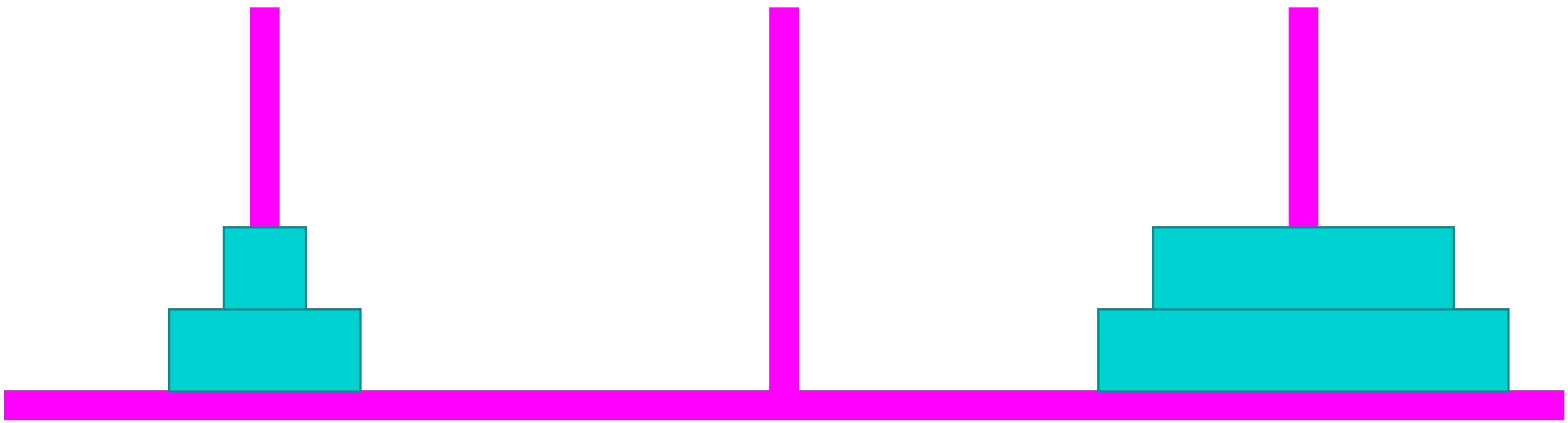


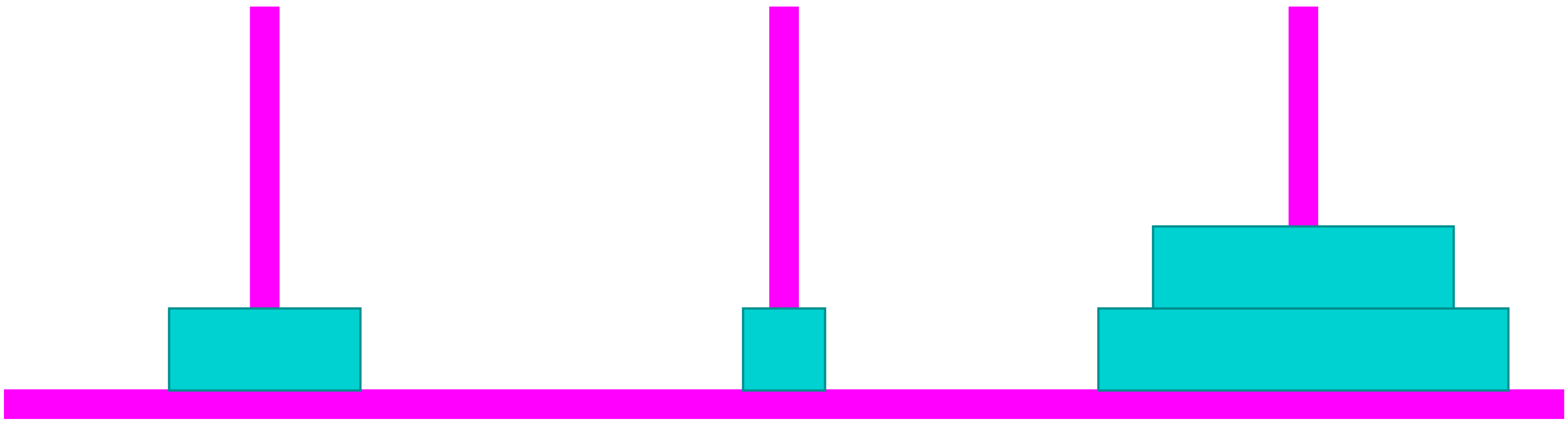


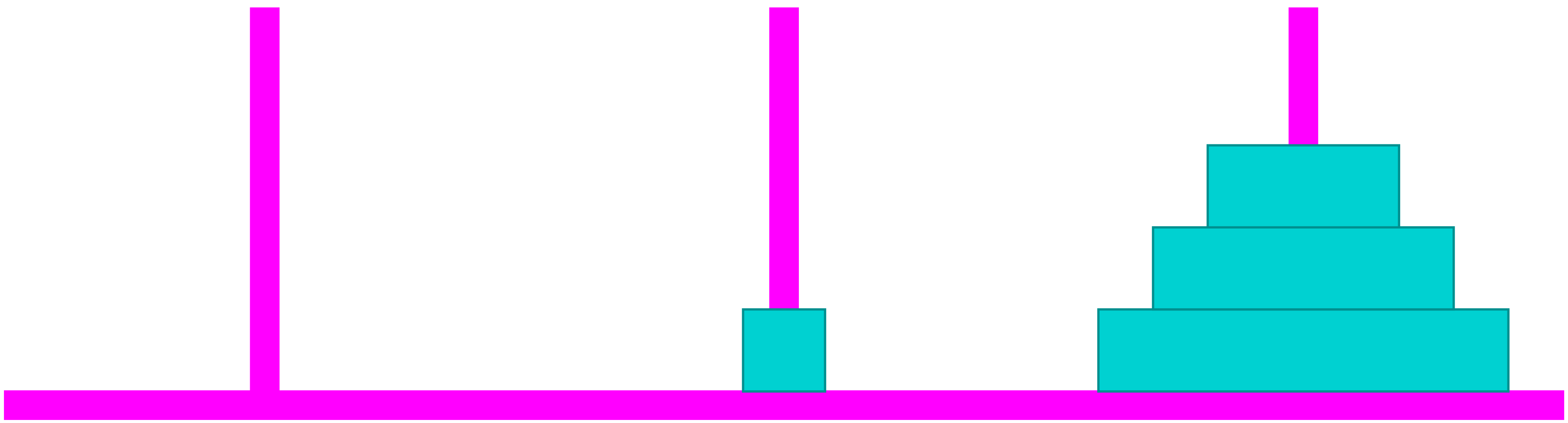


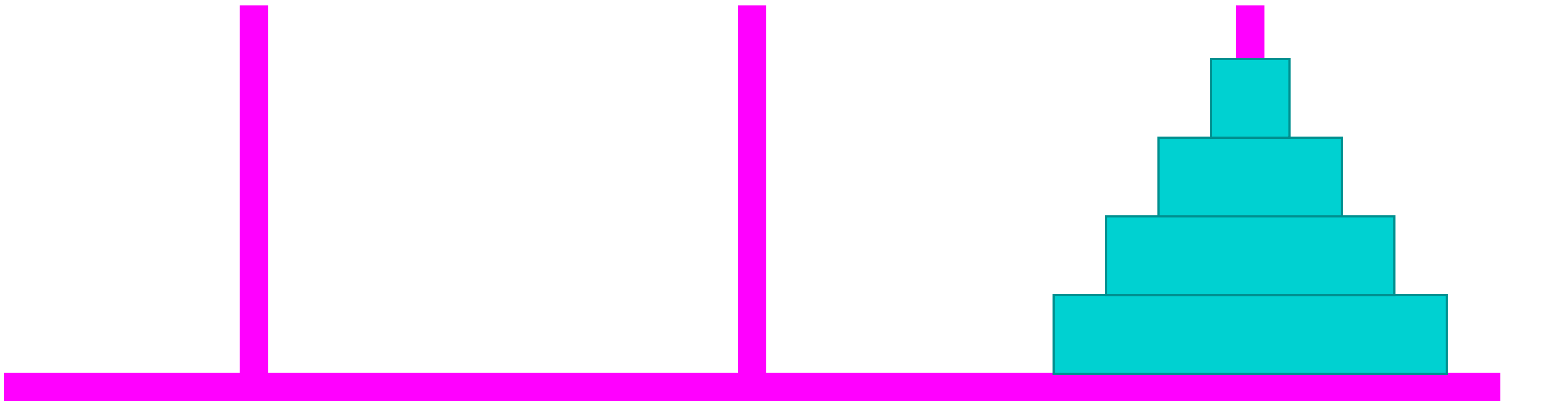












Idee:

- Versetzen eines Turms der Höhe $h = 0$ ist einfach: wir tun nichts.
- Versetzen eines Turms der Höhe $h > 0$ von Position a nach Position b zerlegen wir in drei Teilaufgaben:
  1. Versetzen der oberen $h - 1$ Scheiben auf den freien Platz;
  2. Versetzen der untersten Scheibe auf die Zielposition;
  3. Versetzen der zwischengelagerten Scheiben auf die Zielposition.
- Versetzen eines Turms der Höhe $h > 0$ erfordert also zweimaliges Versetzen eines Turms der Höhe $h - 1$.

```
public static void move (int h, byte a, byte b) {
  if (h > 0) {
     byte c = free (a,b);
     move (h-1,a,c);
     System.out.print ("\tmove "+a+" to "+b+"\n");
     move (h-1,c,b);
     }
  }
```

Bleibt die Ermittlung des freien Platzes ...

	0	1	2
0		2	1
1	2		0
2	1	0	

Offenbar hängt das Ergebnis nur von der Summe der beiden Argumente ab ...

	0	1	2
0		1	2
1	1		3
2	2	3	

Um solche Tabellen leicht implementieren zu können, stellt Java das `switch`-Statement zur Verfügung:

```
public static byte free (byte a, byte b) {
   switch (a+b) {
   case 1:   return 2;
   case 2:   return 1;
   case 3:   return 0;
   default:  return -1;
   }
}
```

Allgemeine Form eines `switch`-Statements:

$$
\begin{array}{l}
\texttt{switch (} \; expr \; \texttt{) \{} \\
\texttt{case } const_0 \; \texttt{:} \quad ss_0 \; (\; \texttt{break;} \;)? \\
\texttt{case } const_1 \; \texttt{:} \quad ss_1 \; (\; \texttt{break;} \;)? \\
\quad \texttt{...} \\
\texttt{case } const_{k-1} \; \texttt{:} \quad ss_{k-1} \; (\; \texttt{break;} \;)? \\
(\; \texttt{default:} \quad ss_k \;)? \\
\texttt{\}}
\end{array}
$$

- expr sollte eine ganze Zahl (oder ein `char`) sein.
- Die $const_i$ sind ganz-zahlige Konstanten.
- Die ss_i sind die alternativen Statement-Folgen.

- `default` beschreibt den Fall, bei dem keiner der Konstanten zutrifft.
- Fehlt ein `break`-Statement, wird mit der Statement-Folge der nächsten Alternative fortgefahren :-)

- `default` beschreibt den Fall, bei dem keiner der Konstanten zutrifft.
- Fehlt ein `break`-Statement, wird mit der Statement-Folge der nächsten Alternative fortgefahren :-)

Eine einfachere Lösung in unserem Fall ist :

```
public static byte free (byte a, byte b) {
    return (byte) (3-(a+b));
    }
```

Für einen Turm der Höhe $h = 4$ liefert das:

```
move 0 to 1
move 0 to 2
move 1 to 2
move 0 to 1
move 2 to 0
move 2 to 1
move 0 to 1
move 0 to 2
move 1 to 2
move 1 to 0
move 2 to 0
move 1 to 2
move 0 to 1
move 0 to 2
move 1 to 2
```

Bemerkungen:

- `move()` ist rekursiv, aber nicht end-rekursiv.
- Sei $N(h)$ die Anzahl der ausgegebenen Moves für einen Turm der Höhe $h \geq 0$. Dann ist

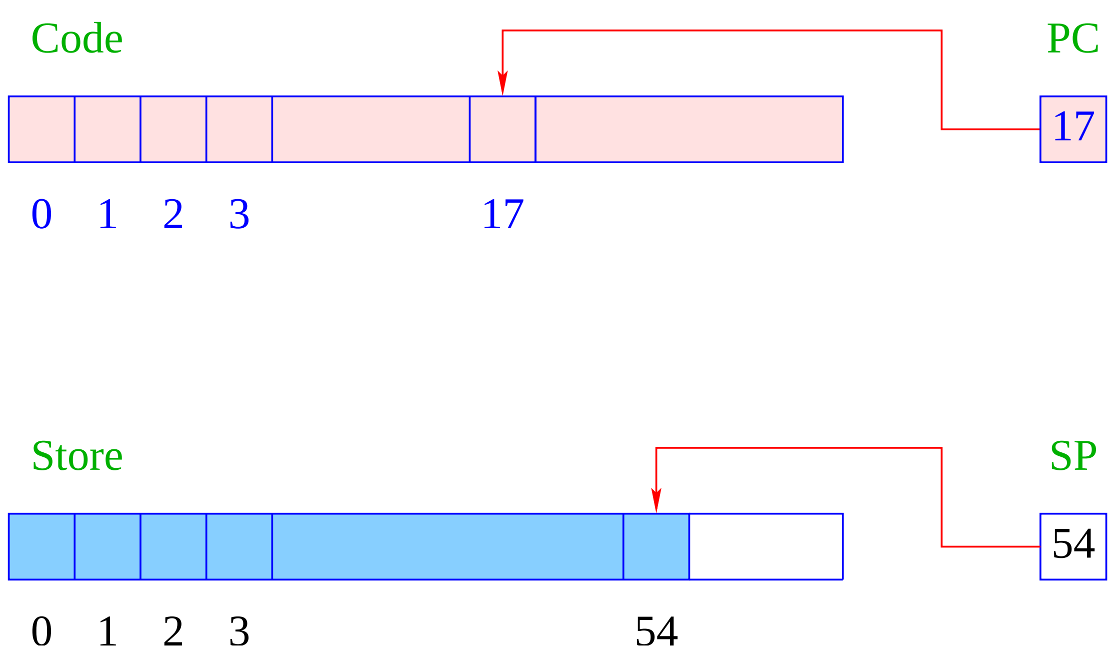
$$\begin{array}{lcll} N(0) & = & 0 & \qquad\text{und für } h > 0, \\ N(h) & = & 1 + 2 \cdot N(h-1) & \end{array}$$

- Folglich ist $\quad N(h) = 2^h - 1$.
- Bei genauerer Analyse des Problems lässt sich auch ein nicht ganz so einfacher nicht-rekursiver Algorithmus finden ... (wie könnte der aussehen? :-)

  Hinweis: Offenbar rückt die kleinste Scheibe in jedem zweiten Schritt eine Position weiter ...

9 Von MiniJava zur JVM

Architektur der JVM:

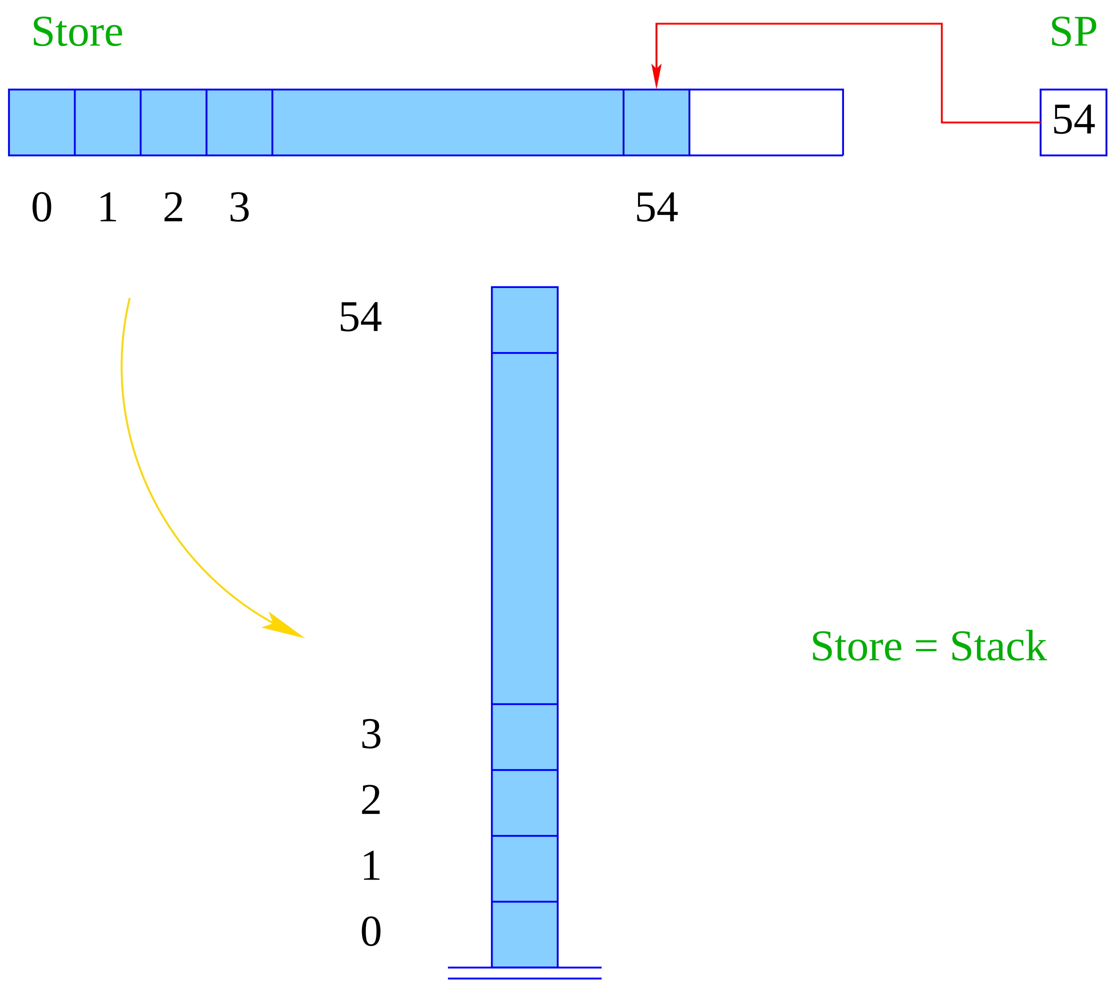


Code	=	enthält JVM-Programm;
		jede Zelle enthält einen Befehl;
PC	=	Program Counter –
		zeigt auf nächsten auszuführenden Befehl;
Store	=	Speicher für Daten;
		jede Zelle kann einen Wert aufnehmen;
SP	=	Stack-Pointer –
		zeigt auf oberste belegte Zelle.

Achtung:

- Programm wie Daten liegen im Speicher – aber in verschiedenen Abschnitten.
- Programm-Ausführung holt nacheinander Befehle aus Code und führt die entsprechenden Operationen auf Store aus.

Konvention:



Befehle der JVM:

`int`-Operatoren:	NEG, ADD, SUB, MUL, DIV, MOD
`boolean`-Operatoren:	NOT, AND, OR
Vergleichs-Operatoren:	LESS, LEQ, EQ, NEQ
Laden von Konstanten:	CONST i, TRUE, FALSE
Speicher-Operationen:	LOAD i, STORE i
Sprung-Befehle:	JUMP i, FJUMP i
IO-Befehle:	READ, WRITE
Reservierung von Speicher:	ALLOC i
Beendung des Programms:	HALT

Ein Beispiel-Programm:

```
    ALLOC 2
    READ
    STORE 0
    READ
    STORE 1
A:  LOAD 0
    LOAD 1
    NEQ
    FJUMP D
    LOAD 0
    LOAD 1
    LESS
    FJUMP B
    LOAD 1
    LOAD 0
    SUB
    STORE 1
    JUMP C
B:  LOAD 0
    LOAD 1
    SUB
    STORE 0
C:  JUMP A
D:  LOAD 1
    WRITE
    HALT
```

- Das Programm berechnet den GGT :-)
- Die Marken (Labels) A, B, C, D bezeichnen symbolisch die Adressen der zugehörigen Befehle:

$$\begin{array}{lcr} \mathsf{A} & = & 5 \\ \mathsf{B} & = & 18 \\ \mathsf{C} & = & 22 \\ \mathsf{D} & = & 23 \end{array}$$

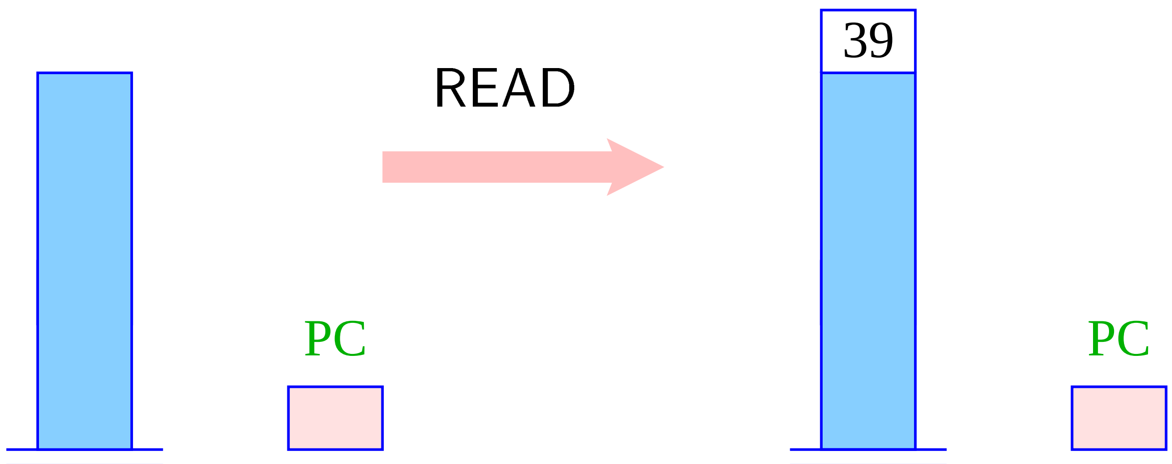
- ... können vom Compiler leicht in die entsprechenden Adressen umgesetzt werden (wir benutzen sie aber, um uns besser im Programm zurechtzufinden :-)

Bevor wir erklären, wie man MiniJava in JVM-Code übersetzt, erklären wir, was die einzelnen Befehle bewirken.

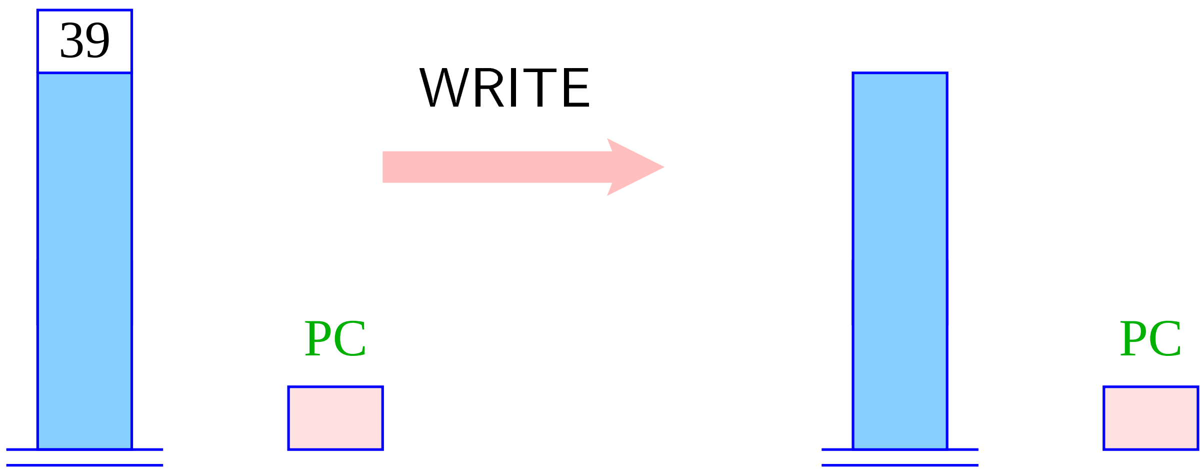
Idee:

- Befehle, die Argumente benötigen, erwarten sie am oberen Ende des Stack.
- Nach ihrer Benutzung werden die Argumente vom Stack herunter geworfen.
- Mögliche Ergebnisse werden oben auf dem Stack abgelegt.

Betrachten wir als Beispiele die IO-Befehle READ und WRITE.



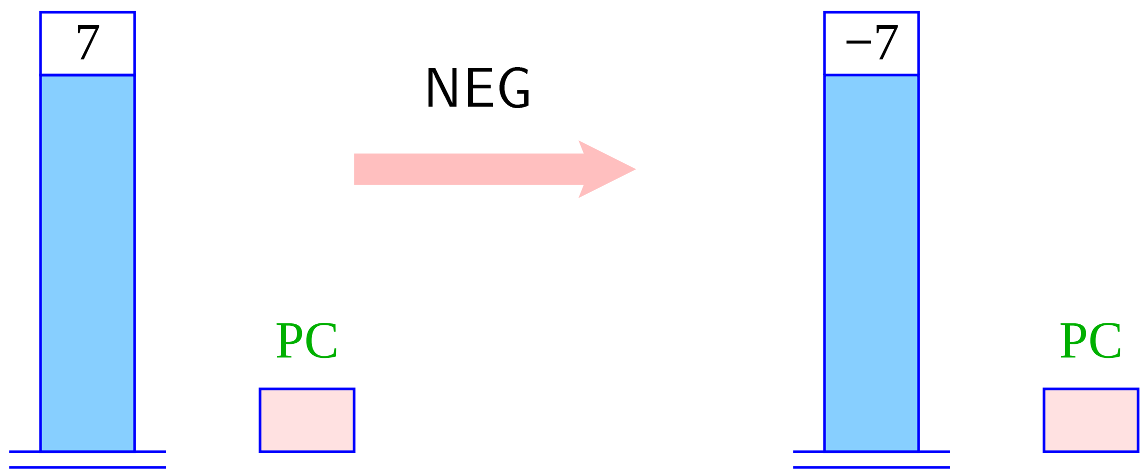
... falls 39 eingegeben wurde

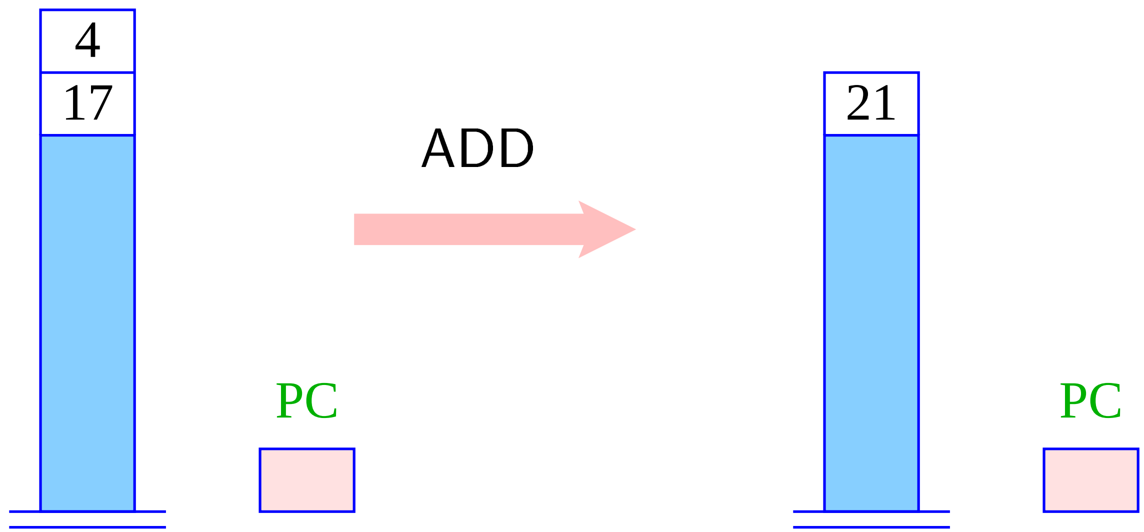


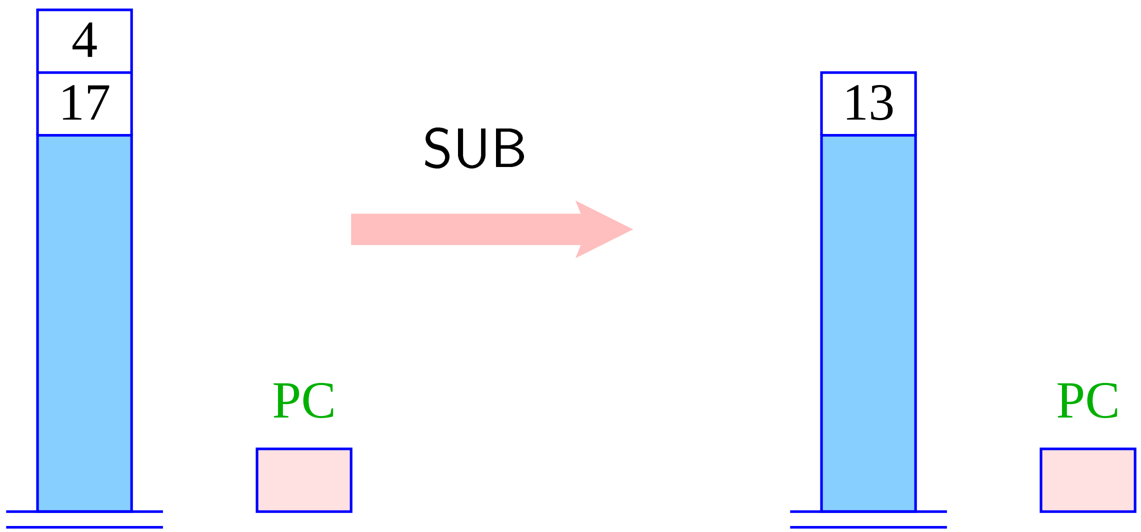
... wobei 39 ausgegeben wird

Arithmetik

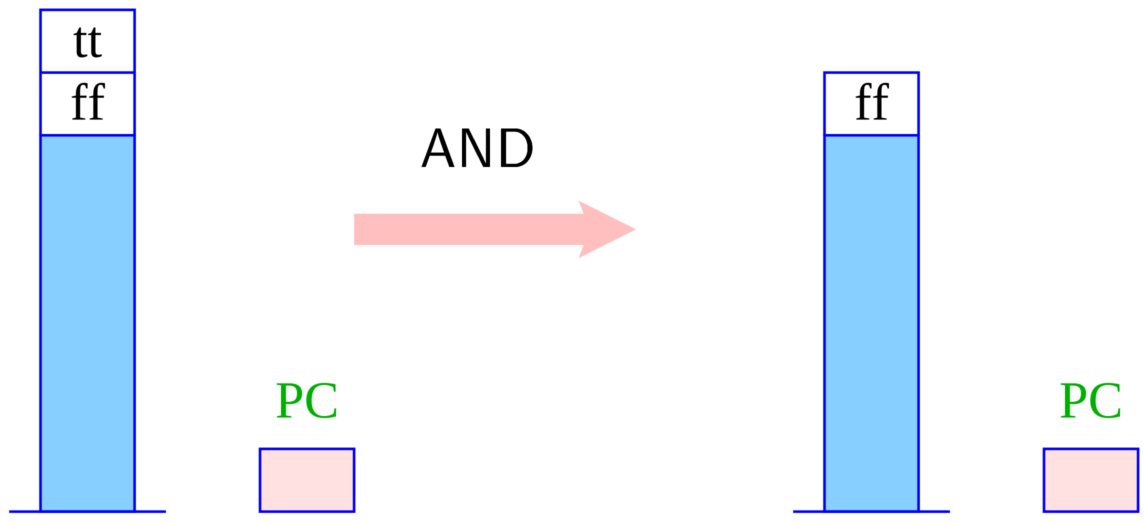
- Unäre Operatoren modifizieren die oberste Zelle.
- Binäre Operatoren verkürzen den Stack.

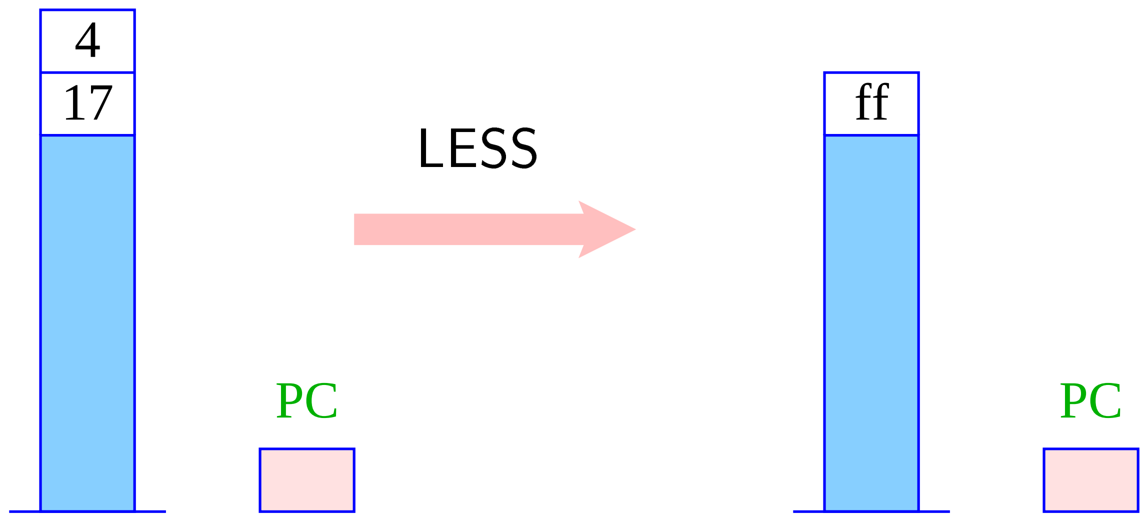

7
NEG
PC
−7
PC


4
17
ADD
21
PC
PC


4
17
SUB
13
PC
PC

- Die übrigen arithmetischen Operationen MUL, DIV, MOD funktionieren völlig analog.
- Die logischen Operationen NOT, AND, OR ebenfalls – mit dem Unterschied, dass sie statt mit ganzen Zahlen, mit Intern-Darstellungen von `true` und `false` arbeiten (hier: “tt” und “ff”).
- Auch die Vergleiche arbeiten so – nur konsumieren sie ganze Zahlen und liefern einen logischen Wert.


tt
ff
AND
ff
PC
PC


4
17
LESS
ff
PC
PC