Ein Pfad $\pi = k_1 k_2 \ldots k_m$ ist eine Berechnung für den Zustand s falls:

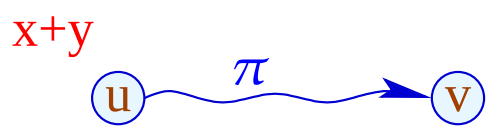
$$s \in def\,(\llbracket k_m \rrbracket \circ \ldots \circ \llbracket k_1 \rrbracket)$$

Das Ergebnis der Berechnung ist:

$$\llbracket \pi \rrbracket\, s = (\llbracket k_m \rrbracket \circ \ldots \circ \llbracket k_1 \rrbracket)\, s$$

Anwendung:

Nehmen wir an, wir hätten am Punkt u den Wert von $x + y$ berechnet:



Wir führen eine Berechnung entland des Pfades π aus und erreichen v, wo wir erneut $x + y$ berechnen sollen ...

Idee:

Wenn x und y in π nicht verändert werden, dann muss $x + y$ in v den gleichen Wert liefern wie in u :-)

Diese Eigenschaft können wir an jeder Kante in π überprüfen :-}

Idee:

Wenn x und y in π nicht verändert werden, dann muss $x + y$ in v den gleichen Wert liefern wie in u :-)

Diese Eigenschaft können wir an jeder Kante in π überprüfen :-}

Allgemeiner:

Nehmen wir an, in u hätten wir die Werte der Ausdrücke aus $A = \{e_1, \ldots, e_r\}$ zur Verfügung.

Idee:

Wenn x und y in π nicht verändert werden, dann muss $x + y$ in v den gleichen Wert liefern wie in u :-)

Diese Eigenschaft können wir an jeder Kante in π überprüfen :-}

Allgemeiner:

Nehmen wir an, in u hätten wir die Werte der Ausdrücke aus $A = \{e_1, \ldots, e_r\}$ zur Verfügung.

Jede Kante k transformiert diese Menge in eine Menge $[\![k]\!]^\sharp\, A$ von Ausdrücken, die nach Ausführung von k verfügbar sind ...

... die wir zur Ermittlung des Effekts eines Pfads $\pi = k_1 \ldots k_r$ zusammen setzen können:

$$[\![\pi]\!]^\sharp = [\![k_r]\!]^\sharp \circ \ldots \circ [\![k_1]\!]^\sharp$$

... die wir zur Ermittlung des Effekts eines Pfads $\pi = k_1 \ldots k_r$ zusammen setzen können:

$$[\![\pi]\!]^\sharp = [\![k_r]\!]^\sharp \circ \ldots \circ [\![k_1]\!]^\sharp$$

Der Effekt $[\![k]\!]^\sharp$ einer Kante $k = (u, lab, v)$ hängt nur vom Label lab ab, d.h. $[\![k]\!]^\sharp = [\![lab]\!]^\sharp$

... die wir zur Ermittlung des Effekts eines Pfads $\pi = k_1 \ldots k_r$ zusammen setzen können:

$$[\![\pi]\!]^\sharp = [\![k_r]\!]^\sharp \circ \ldots \circ [\![k_1]\!]^\sharp$$

Der Effekt $[\![k]\!]^\sharp$ einer Kante $k = (u, lab, v)$ hängt nur vom Label lab ab, d.h. $[\![k]\!]^\sharp = [\![lab]\!]^\sharp$ wobei:

$$\begin{array}{lcl}
[\![;]\!]^\sharp\, A & = & A \\
[\![Pos(e)]\!]^\sharp\, A & = & [\![Neg(e)]\!]^\sharp\, A \quad = \quad A \cup \{e\} \\
[\![R = e;]\!]^\sharp\, A & = & (A \cup \{e\}) \backslash Expr_R \qquad \text{wobei} \\
 & & Expr_R \text{ alle Ausdrücke sind, die } R \text{ enthalten}
\end{array}$$

$$
\begin{aligned}
[\![R = M[e];]\!]^\sharp\, A &= (A \cup \{e\}) \backslash Expr_R \\
[\![M[e_1] = e_2;]\!]^\sharp\, A &= A \cup \{e_1, e_2\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[\![R = M[e];]\!]^\sharp\, A &= (A \cup \{e\}) \backslash Expr_R \\
[\![M[e_1] = e_2;]\!]^\sharp\, A &= A \cup \{e_1, e_2\}
\end{aligned}
$$

Damit können wir jeden Pfad untersuchen :-)

In einem Programm kann es mehrere Pfade geben :-(

Bei jeder Eingabe kann ein anderer gewählt werden :-((

$$
\begin{array}{lcl}
[\![R = M[e];]\!]^\sharp\, A & = & (A \cup \{e\}) \backslash Expr_R \\
[\![M[e_1] = e_2;]\!]^\sharp\, A & = & A \cup \{e_1, e_2\}
\end{array}
$$

Damit können wir jeden Pfad untersuchen :-)

In einem Programm kann es mehrere Pfade geben :-(

Bei jeder Eingabe kann ein anderer gewählt werden :-((

$\Longrightarrow$ Wir benötigen die Menge:

$$
\mathcal{A}[v] \quad = \quad \bigcap \{ [\![\pi]\!]^\sharp \emptyset \mid \pi : start \rightarrow^* v \}
$$

Im Klartext:

- $\longrightarrow$ Wir betrachten sämtliche Pfade, die v erreichen.
- $\longrightarrow$ Für jeden Pfad π bestimmen wir die Menge der entlang π verfügbaren Ausdrücke.
- $\longrightarrow$ Vor Programm-Ausführung ist nichts verfügbar :-)
- $\longrightarrow$ Wir bilden den Durchschnitt $\Longrightarrow$ sichere Information

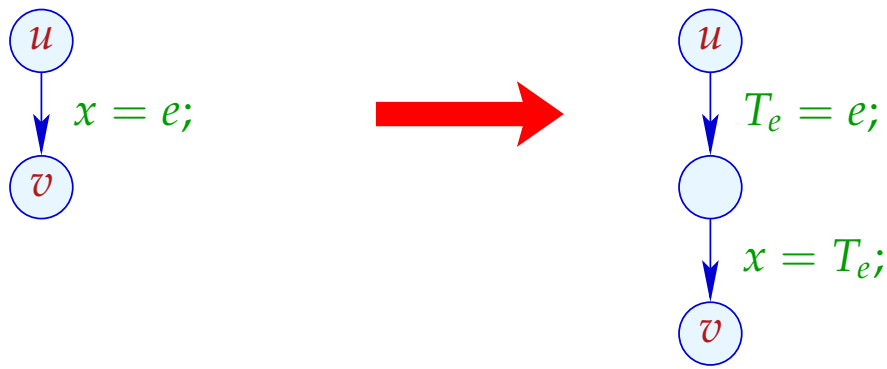
Im Klartext:

- $\longrightarrow$ Wir betrachten sämtliche Pfade, die v erreichen.
- $\longrightarrow$ Für jeden Pfad π bestimmen wir die Menge der entlang π verfügbaren Ausdrücke.
- $\longrightarrow$ Vor Programm-Ausführung ist nichts verfügbar :-)
- $\longrightarrow$ Wir bilden den Durchschnitt $\Longrightarrow$ sichere Information

Wie nutzen wir diese Information aus ???

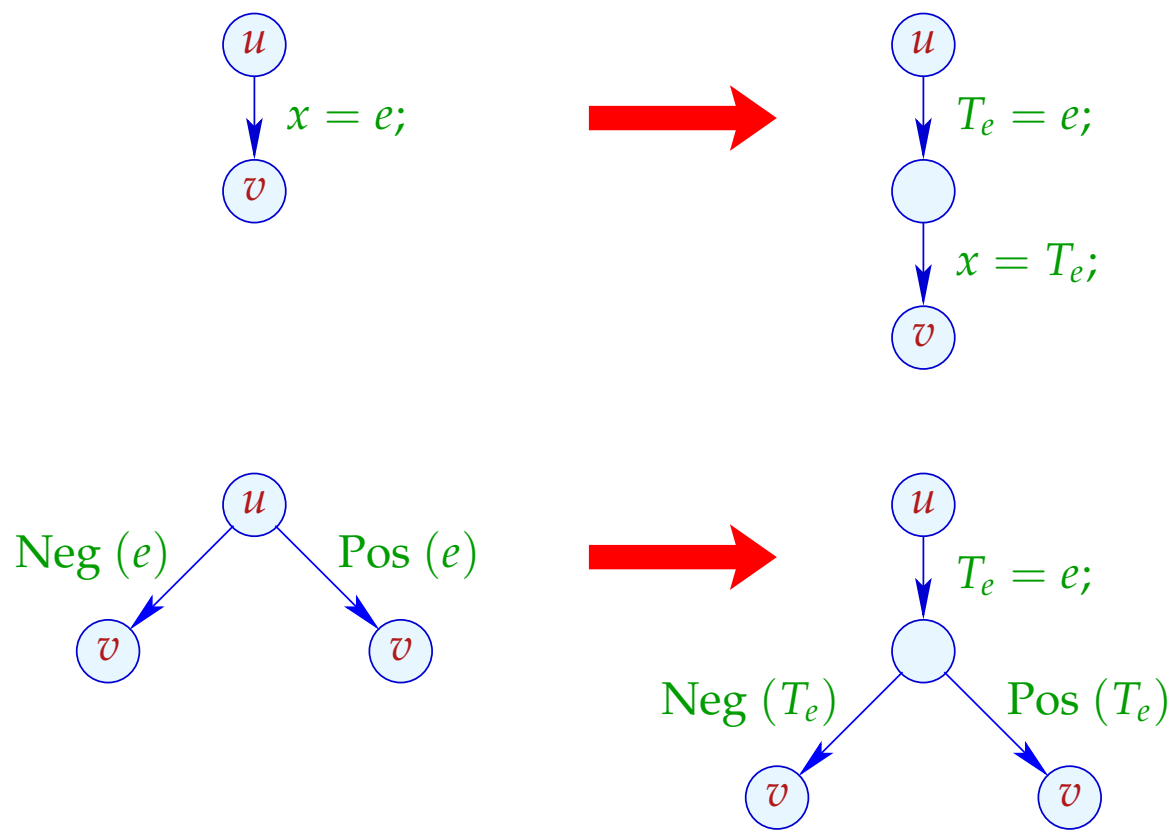
Transformation 1.1:

Wir stellen neue Register T_e als Speicherplatz für die e bereit:



Transformation 1.1:

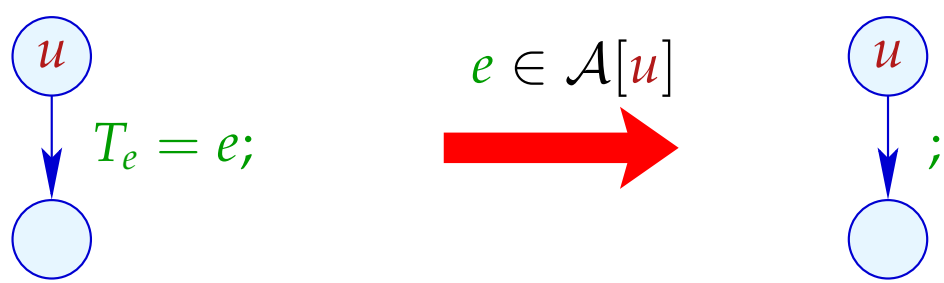
Wir stellen neue Register T_e als Speicherplatz für die e bereit:



... analog für $R = M[e];$ und $M[e_1] = e_2;$.

Transformation 1.2:

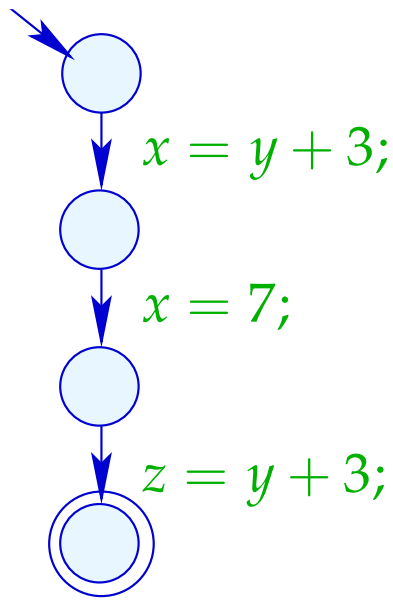
Falls e am Punkt u verfügbar ist, wird e nicht neu berechnet:



Wir ersetzen dann die Zuweisung durch Nop :-)

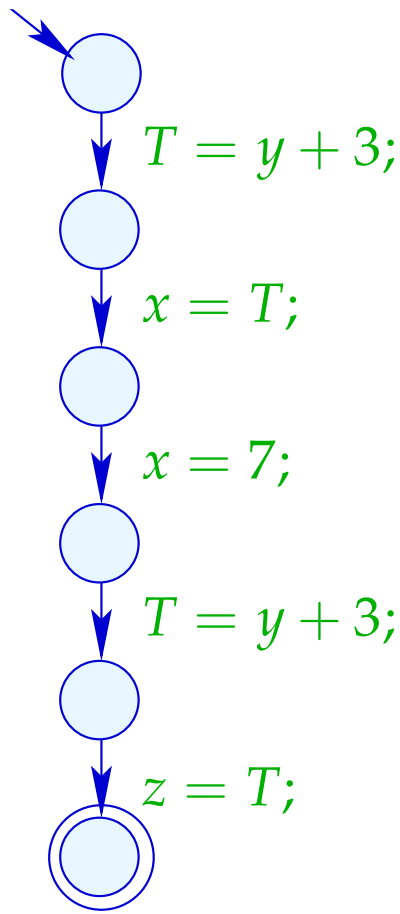
Beispiel:

$$
\begin{aligned}
x &= y + 3; \\
x &= 7; \\
z &= y + 3;
\end{aligned}
$$



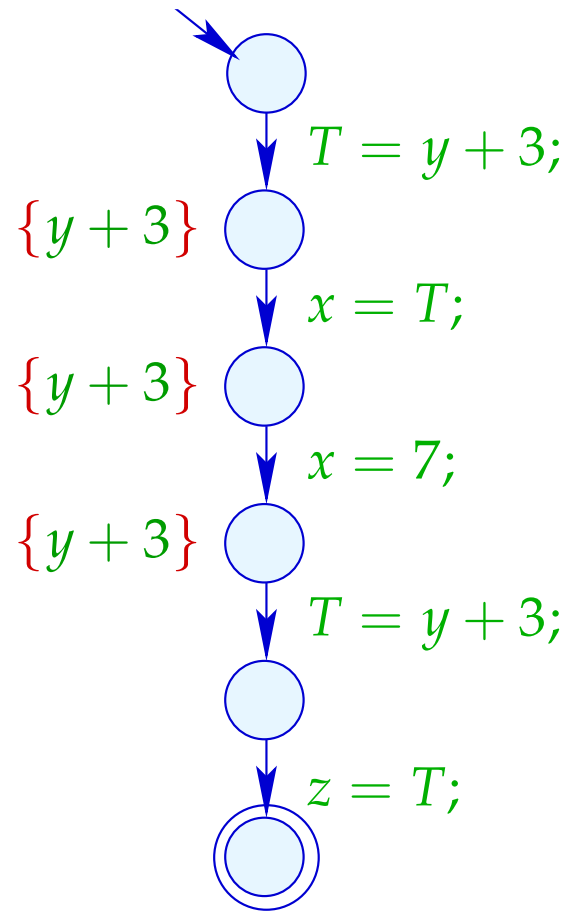
Beispiel:

$$
\begin{aligned}
x &= y + 3; \\
x &= 7; \\
z &= y + 3;
\end{aligned}
$$



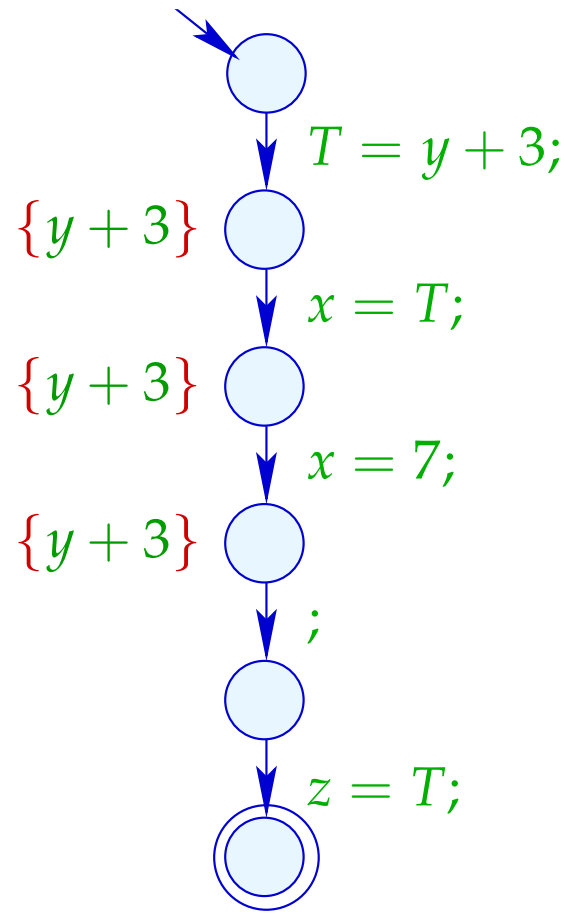
Beispiel:

$$
\begin{aligned}
x &= y + 3; \\
x &= 7; \\
z &= y + 3;
\end{aligned}
$$



Beispiel:

$$
\begin{aligned}
x &= y + 3; \\
x &= 7; \\
z &= y + 3;
\end{aligned}
$$



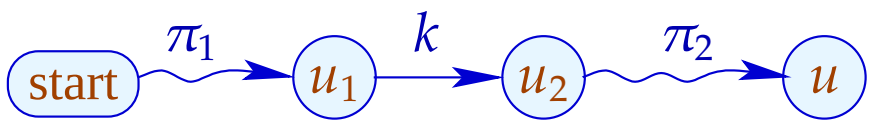
Korrektheit: (Idee)

Transformation 1.1 erhält offenbar die Bedeutung und $\mathcal{A}[u]$ für alle Knoten u :-)

Sei $\pi : \mathit{start} \to^* u$ der Pfad, den eine Berechnung nimmt.

Ist $e \in \mathcal{A}[u]$, dann auch $e \in [\![\pi]\!]^\sharp\, \emptyset$.

Dann muss es eine Zerlegung von π geben:



mit den folgenden Eigenschaften:

- Der Ausdruck e wird an der Kante k berechnet;
- Der Ausdruck e wird an keiner Kante in π_2 aus der Menge der verfügbaren Ausdrücke entfernt, d.h. keine Variable von e erhält einen neuen Wert :-)

- Der Ausdruck e wird an der Kante k berechnet;
- Der Ausdruck e wird an keiner Kante in π_2 aus der Menge der verfügbaren Ausdrücke entfernt, d.h. keine Variable von e erhält einen neuen Wert :-)

$\Longrightarrow$

Wird u erreicht, enthält das Register T_e den Wert von e :-))

Achtung:

Die Transformation 1.1 ist nur sinnvoll an Zuweisungen $x = e;$, wobei:

- $\rightarrow$ $x \notin Vars(e)$;
- $\rightarrow$ $e \notin Vars$;
- $\rightarrow$ sich die Berechnung von e lohnt :-}

Achtung:

Die Transformation 1.1 ist nur sinnvoll an Zuweisungen $x = e;$, wobei:

$\rightarrow$ $x \notin Vars(e)$;

$\rightarrow$ $e \notin Vars$;

$\rightarrow$ sich die Berechnung von e lohnt :-}

Bleibt die Preisfrage ...

Preisfrage:

Wie berechnen wir $\mathcal{A}[u]$ für jeden Programmpunkt u ??

Preisfrage:

Wie berechnen wir $\mathcal{A}[u]$ für jeden Programmpunkt u ??

Idee:

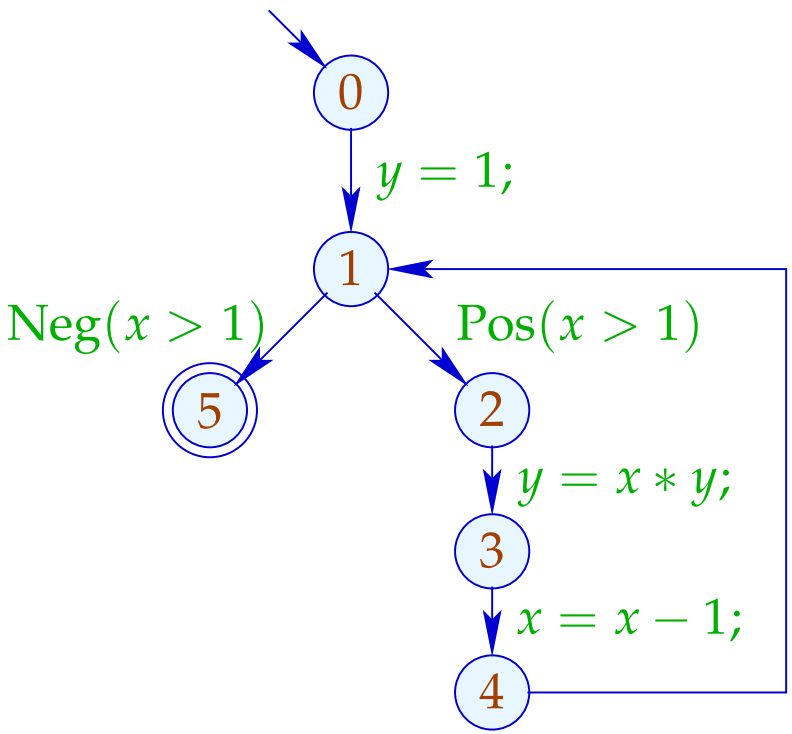
Wir stellen ein Ungleichungssystem auf, das alle Bedingungen an die Werte $\mathcal{A}[u]$ sammelt:

$$\begin{array}{lcll} \mathcal{A}[start] & \subseteq & \emptyset & \\ \mathcal{A}[v] & \subseteq & [\![k]\!]^\sharp\,(\mathcal{A}[u]) & \qquad k = (u, _, v) \quad \text{Kante} \end{array}$$

Gesucht:

- möglichst große Lösung (??)
- Algorithmus, der diese berechnet :-)

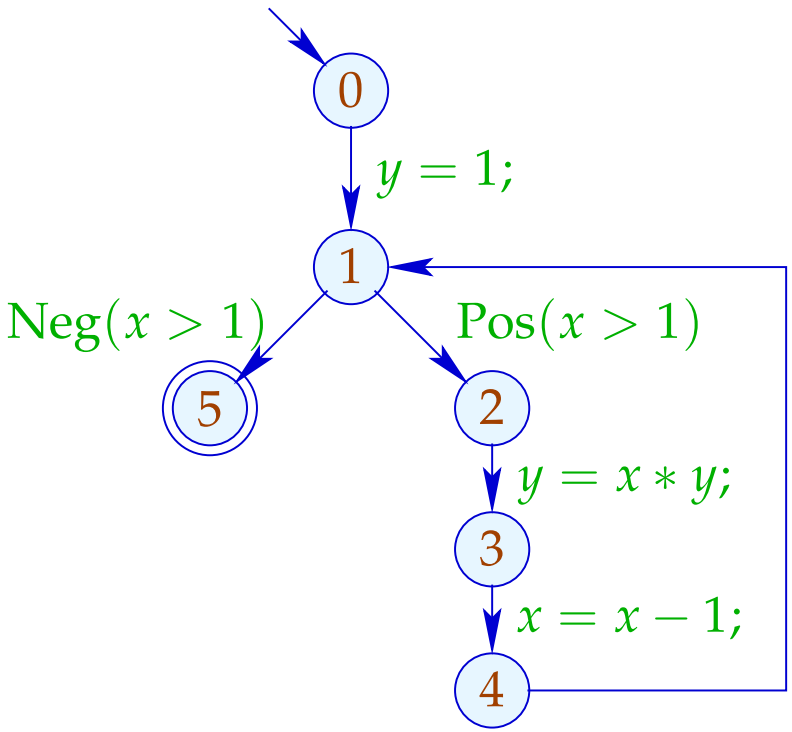
Beispiel:



Gesucht:

- möglichst große Lösung (??)
- Algorithmus, der diese berechnet :-)

Beispiel:

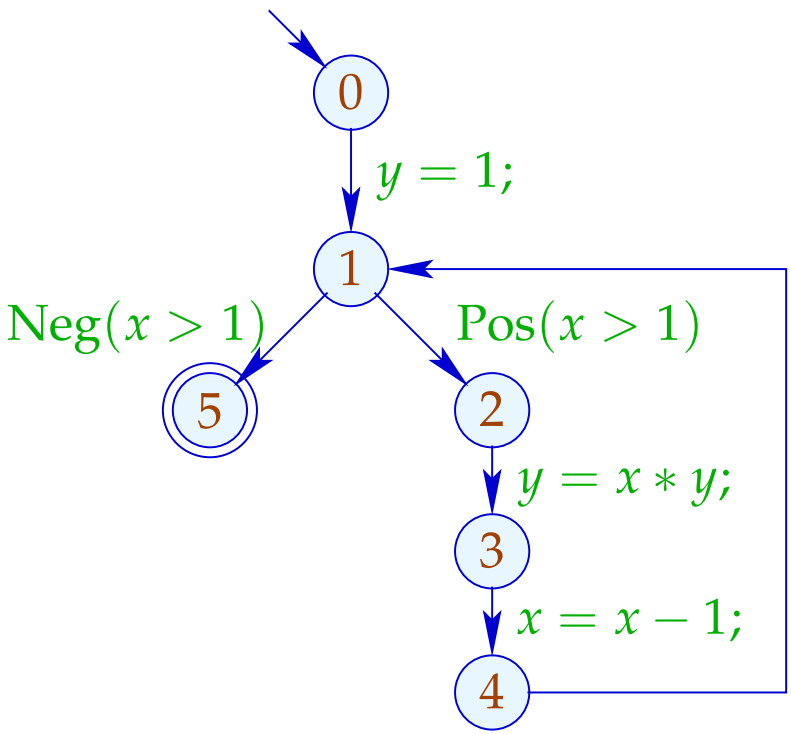


$$\mathcal{A}[0] \quad \subseteq \quad \emptyset$$

Gesucht:

- möglichst große Lösung (??)
- Algorithmus, der diese berechnet :-)

Beispiel:

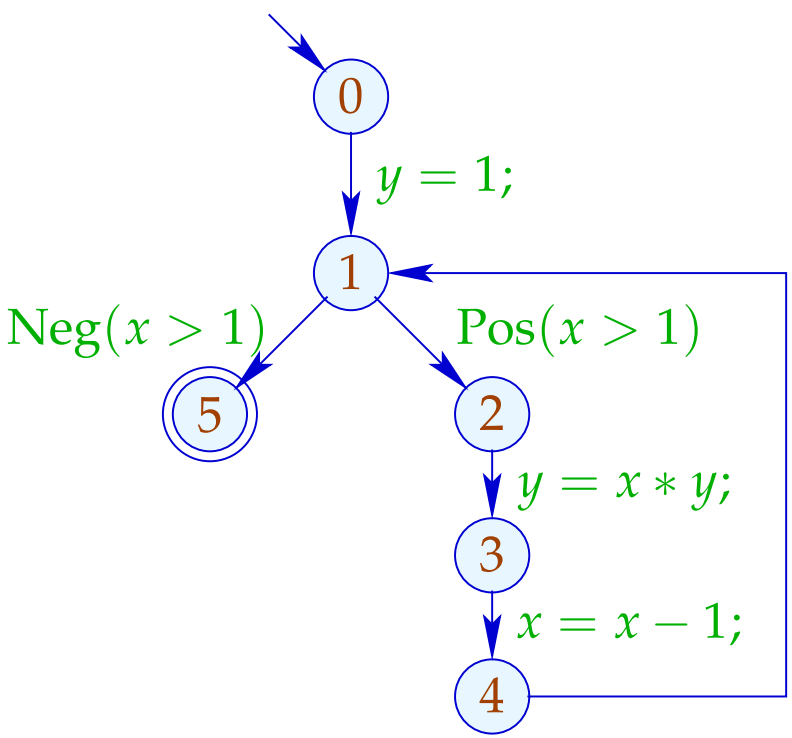


$$\begin{aligned} \mathcal{A}[0] &\subseteq \emptyset \\ \mathcal{A}[1] &\subseteq (\mathcal{A}[0] \cup \{1\}) \backslash Expr_y \\ \mathcal{A}[1] &\subseteq \mathcal{A}[4] \end{aligned}$$

Gesucht:

- möglichst große Lösung (??)
- Algorithmus, der diese berechnet :-)

Beispiel:

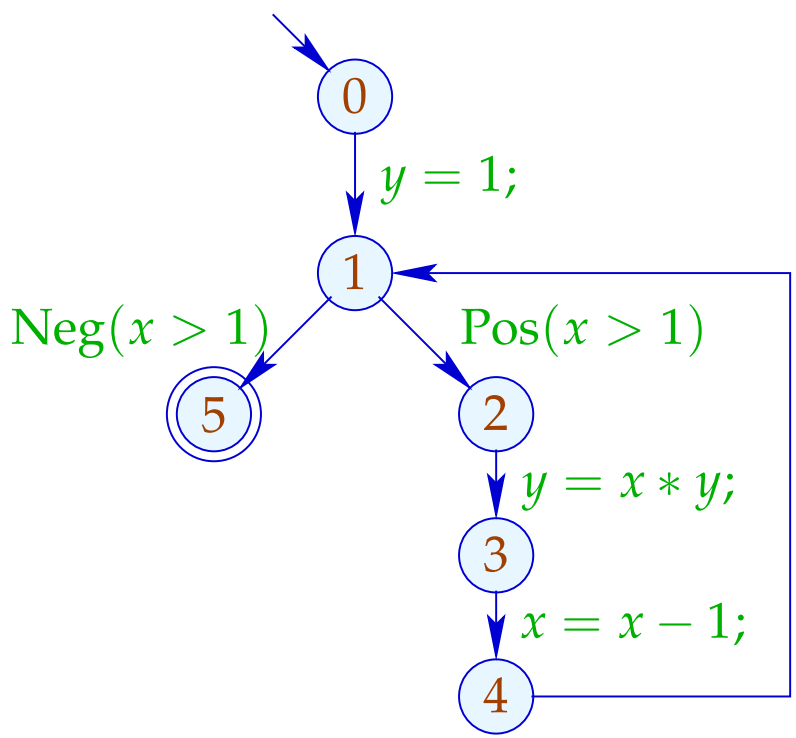


$$
\begin{array}{lcl}
\mathcal{A}[0] & \subseteq & \emptyset \\
\mathcal{A}[1] & \subseteq & (\mathcal{A}[0] \cup \{1\}) \backslash Expr_y \\
\mathcal{A}[1] & \subseteq & \mathcal{A}[4] \\
\mathcal{A}[2] & \subseteq & \mathcal{A}[1] \cup \{x > 1\}
\end{array}
$$

Gesucht:

- möglichst große Lösung (??)
- Algorithmus, der diese berechnet :-)

Beispiel:

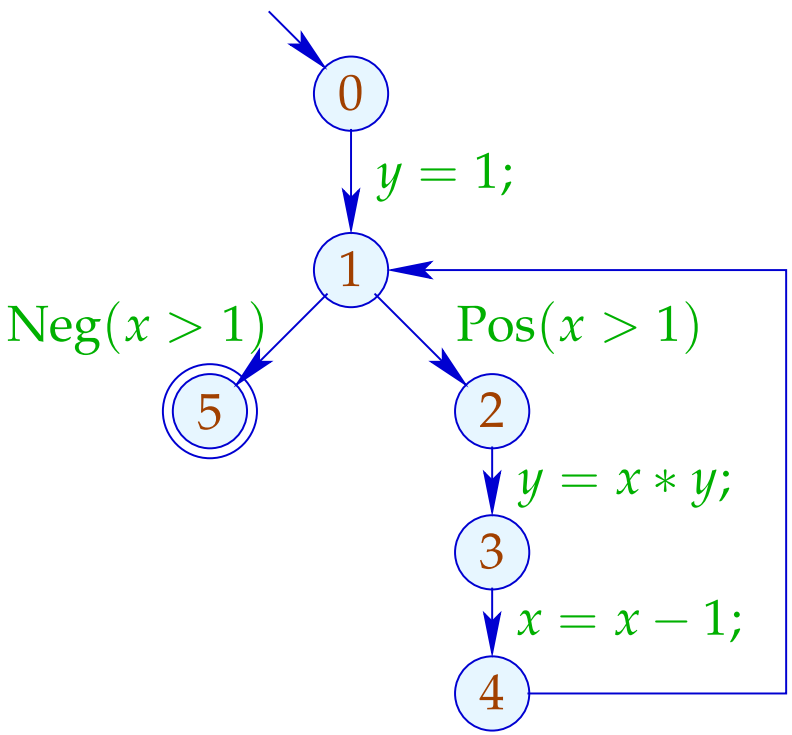


$$
\begin{array}{lcl}
\mathcal{A}[0] & \subseteq & \emptyset \\
\mathcal{A}[1] & \subseteq & (\mathcal{A}[0] \cup \{1\}) \backslash Expr_y \\
\mathcal{A}[1] & \subseteq & \mathcal{A}[4] \\
\mathcal{A}[2] & \subseteq & \mathcal{A}[1] \cup \{x > 1\} \\
\mathcal{A}[3] & \subseteq & (\mathcal{A}[2] \cup \{x * y\}) \backslash Expr_y
\end{array}
$$

Gesucht:

- möglichst große Lösung (??)
- Algorithmus, der diese berechnet :-)

Beispiel:

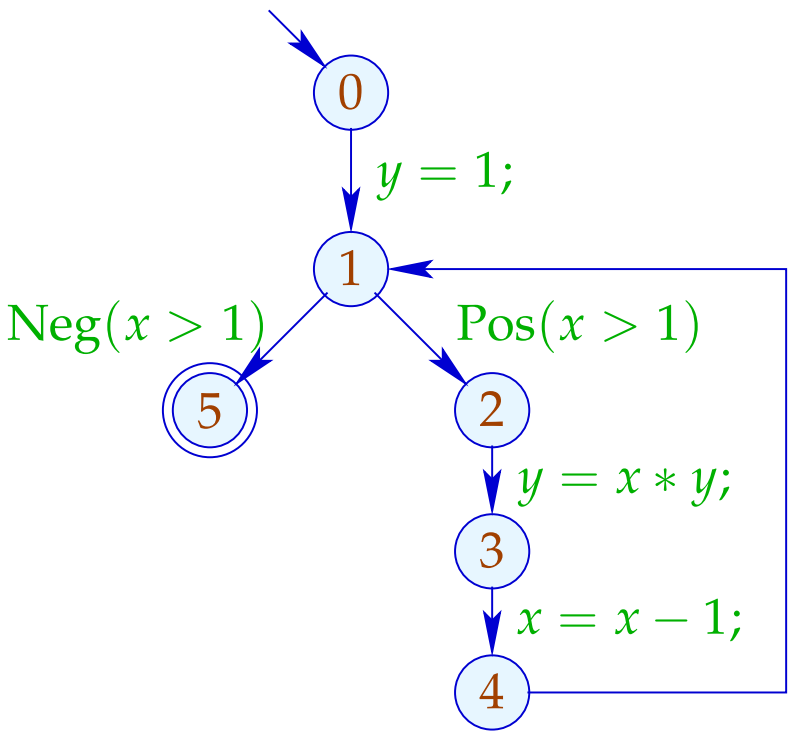


$$
\begin{array}{lcl}
\mathcal{A}[0] & \subseteq & \emptyset \\
\mathcal{A}[1] & \subseteq & (\mathcal{A}[0] \cup \{1\}) \backslash Expr_y \\
\mathcal{A}[1] & \subseteq & \mathcal{A}[4] \\
\mathcal{A}[2] & \subseteq & \mathcal{A}[1] \cup \{x > 1\} \\
\mathcal{A}[3] & \subseteq & (\mathcal{A}[2] \cup \{x * y\}) \backslash Expr_y \\
\mathcal{A}[4] & \subseteq & (\mathcal{A}[3] \cup \{x - 1\}) \backslash Expr_x
\end{array}
$$

Gesucht:

- möglichst große Lösung (??)
- Algorithmus, der diese berechnet :-)

Beispiel:

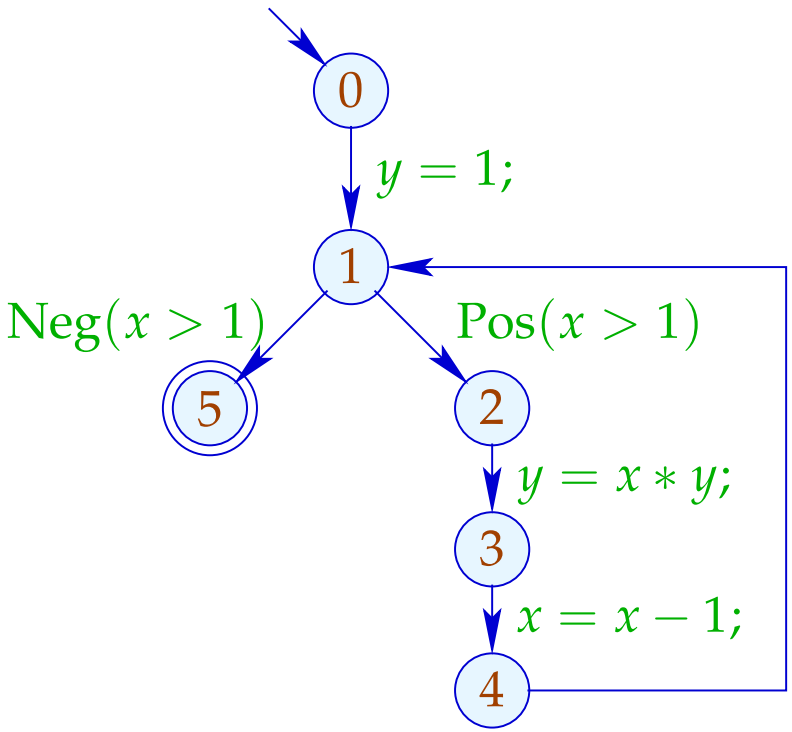


$$
\begin{array}{lcl}
\mathcal{A}[0] & \subseteq & \emptyset \\
\mathcal{A}[1] & \subseteq & (\mathcal{A}[0] \cup \{1\}) \backslash Expr_y \\
\mathcal{A}[1] & \subseteq & \mathcal{A}[4] \\
\mathcal{A}[2] & \subseteq & \mathcal{A}[1] \cup \{x > 1\} \\
\mathcal{A}[3] & \subseteq & (\mathcal{A}[2] \cup \{x * y\}) \backslash Expr_y \\
\mathcal{A}[4] & \subseteq & (\mathcal{A}[3] \cup \{x - 1\}) \backslash Expr_x \\
\mathcal{A}[5] & \subseteq & \mathcal{A}[1] \cup \{x > 1\}
\end{array}
$$

Gesucht:

- möglichst große Lösung (??)
- Algorithmus, der diese berechnet :-)

Beispiel:



Lösung:

$$
\begin{array}{lcl}
\mathcal{A}[0] & = & \emptyset \\
\mathcal{A}[1] & = & \{1\} \\
\mathcal{A}[2] & = & \{1, x > 1\} \\
\mathcal{A}[3] & = & \{1, x > 1\} \\
\mathcal{A}[4] & = & \{1\} \\
\mathcal{A}[5] & = & \{1, x > 1\}
\end{array}
$$

Beobachtung:

- Die möglichen Werte für $\mathcal{A}[u]$ bilden einen vollständigen Verband:

$$\mathbb{D} = 2^{Expr} \quad \text{mit} \quad B_1 \sqsubseteq B_2 \quad \text{gdw.} \quad B_1 \supseteq B_2$$

Beobachtung:

- Die möglichen Werte für $\mathcal{A}[u]$ bilden einen vollständigen Verband:

$$\mathbb{D} = 2^{Expr} \quad \text{mit} \quad B_1 \sqsubseteq B_2 \quad \text{gdw.} \quad B_1 \supseteq B_2$$

- Die Funktionen $[\![k]\!]^\sharp : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ sind monoton, d.h.

$$[\![k]\!]^\sharp(B_1) \sqsubseteq [\![k]\!]^\sharp(B_2) \quad \text{gdw.} \quad B_1 \sqsubseteq B_2$$

Exkurs 2: Vollständige Verbände

Eine Menge $\mathbb{D}$ mit einer Relation $\sqsubseteq \subseteq \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ ist eine partielle Ordnung falls für alle $a, b, c \in \mathbb{D}$ gilt:

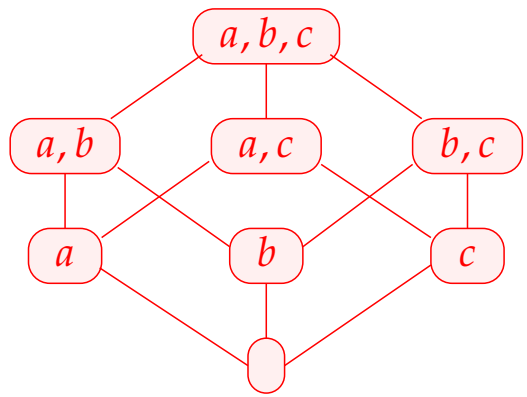
$$a \sqsubseteq a \qquad \textit{Reflexivität}$$

$$a \sqsubseteq b \wedge b \sqsubseteq a \implies a = b \qquad \textit{Anti-Symmetrie}$$

$$a \sqsubseteq b \wedge b \sqsubseteq c \implies a \sqsubseteq c \qquad \textit{Transitivität}$$

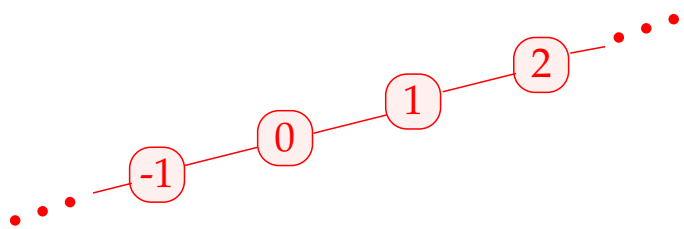
Beispiele:

1. $\mathbb{D} = 2^{\{a,b,c\}}$ mit der Relation "$\subseteq$" :

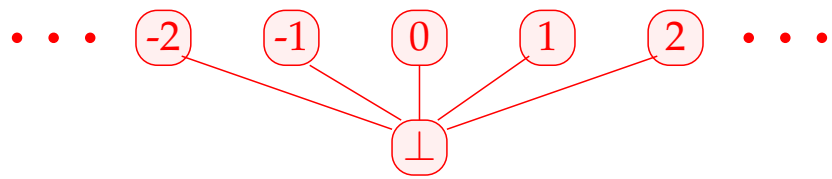


3. $\mathbb{Z}$ mit der Relation "$=$" :

3. $\mathbb{Z}$ mit der Relation "$\leq$" :



4. $\mathbb{Z}_\perp = \mathbb{Z} \cup \{\perp\}$ mit der Ordnung:



$d \in \mathbb{D}$ heißt obere Schranke für $X \subseteq \mathbb{D}$ falls

$$x \sqsubseteq d \qquad \text{für alle } x \in X$$

$d \in \mathbb{D}$ heißt obere Schranke für $X \subseteq \mathbb{D}$ falls

$$x \sqsubseteq d \qquad \text{für alle } x \in X$$

d heißt kleinste obere Schranke (lub) falls

1. d eine obere Schranke ist und
2. $d \sqsubseteq y$ für jede obere Schranke y für X.

$d \in \mathbb{D}$ heißt obere Schranke für $X \subseteq \mathbb{D}$ falls

$$x \sqsubseteq d \qquad \text{für alle } x \in X$$

d heißt kleinste obere Schranke (lub) falls

1. d eine obere Schranke ist und
2. $d \sqsubseteq y$ für jede obere Schranke y für X.

Achtung:

- $\{0, 2, 4, \ldots\} \subseteq \mathbb{Z}$ besitzt keine obere Schranke!
- $\{0, 2, 4\} \subseteq \mathbb{Z}$ besitzt die oberen Schranken $4, 5, 6, \ldots$

Ein vollständiger Verband (cl) $\mathbb{D}$ ist eine partielle Ordnung, in der jede Teilmenge $X \subseteq \mathbb{D}$ eine kleinste obere Schranke $\bigsqcup X \in \mathbb{D}$ besitzt.

Beachte:

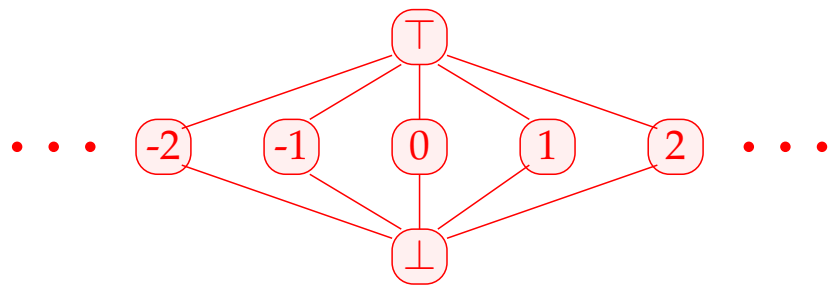
Jeder vollständige Verband besitzt

$\rightarrow$ ein kleinstes Element $\bot = \bigsqcup \emptyset \in \mathbb{D}$;

$\rightarrow$ ein größtes Element $\top = \bigsqcup \mathbb{D} \in \mathbb{D}$.

Beispiele:

1. $\mathbb{D} = 2^{\{a,b,c\}}$ ist ein cl :-)
2. $\mathbb{D} = \mathbb{Z}$ mit "$=$" ist keiner.
3. $\mathbb{D} = \mathbb{Z}$ mit "$\leq$" ebenfalls nicht.
4. $\mathbb{D} = \mathbb{Z}_\perp$ auch nicht :-(
5. Mit einem zusätzlichen Symbol $\top$ erhalten wir den flachen Verband $\mathbb{Z}_\perp^\top = \mathbb{Z} \cup \{\perp, \top\}$:



Es gilt:

Satz:

In jedem vollständigen Verband $\mathbb{D}$ besitzt jede Teilmenge $X \subseteq \mathbb{D}$ eine größte untere Schranke $\bigsqcap X$.

Es gilt:

Satz:

In jedem vollständigen Verband $\mathbb{D}$ besitzt jede Teilmenge $X \subseteq \mathbb{D}$ eine größte untere Schranke $\bigsqcap X$.

Beweis:

Konstruiere $U = \{u \in \mathbb{D} \mid \forall\, x \in X : \; u \sqsubseteq x\}$.

// die Menge der unteren Schranken von X :-)

Es gilt:

Satz:

In jedem vollständigen Verband $\mathbb{D}$ besitzt jede Teilmenge $X \subseteq \mathbb{D}$ eine größte untere Schranke $\bigsqcap X$.

Beweis:

Konstruiere $U = \{u \in \mathbb{D} \mid \forall\, x \in X : \; u \sqsubseteq x\}$.

// die Menge der unteren Schranken von X :-)

Setze: $g := \bigsqcup U$

Behauptung: $g = \bigsqcap X$

(1) g ist eine untere Schranke von X :

Für $x \in X$ gilt:

$u \sqsubseteq x$ für alle $u \in U$

$\Longrightarrow$ x ist obere Schranke von U

$\Longrightarrow$ $g \sqsubseteq x$:-)

(1) g ist eine untere Schranke von X :

Für $x \in X$ gilt:

$u \sqsubseteq x$ für alle $u \in U$

$\Longrightarrow$ x ist obere Schranke von U

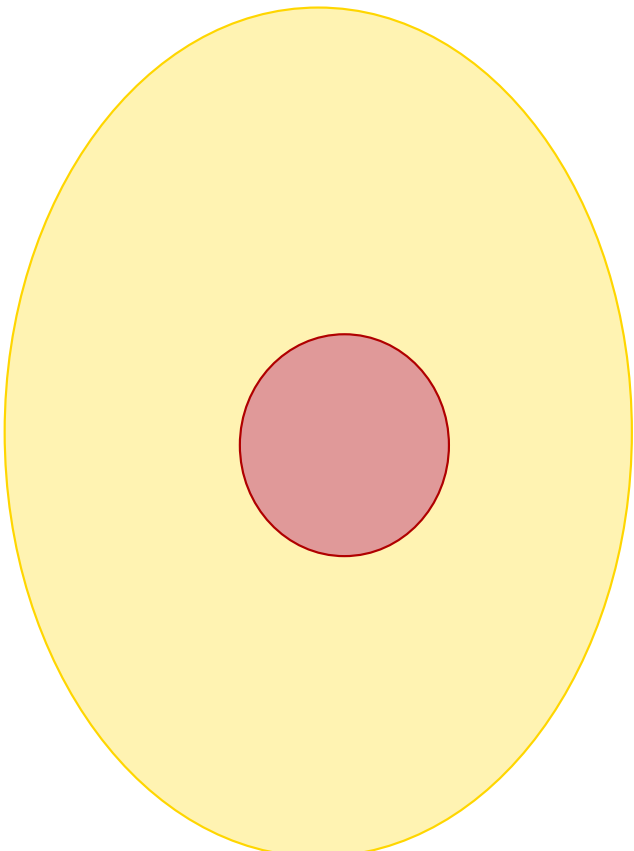
$\Longrightarrow$ $g \sqsubseteq x$:-)

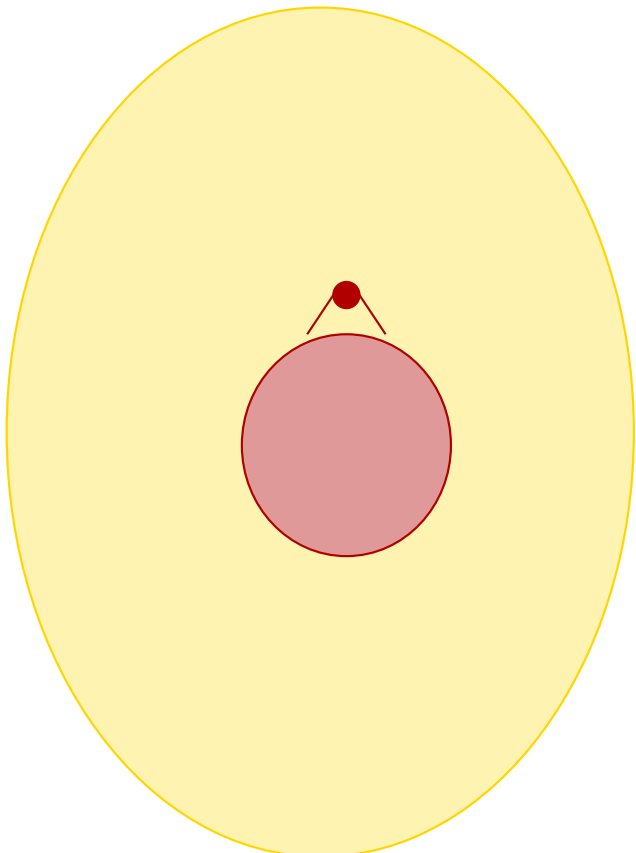
(2) g ist größte untere Schranke von X :

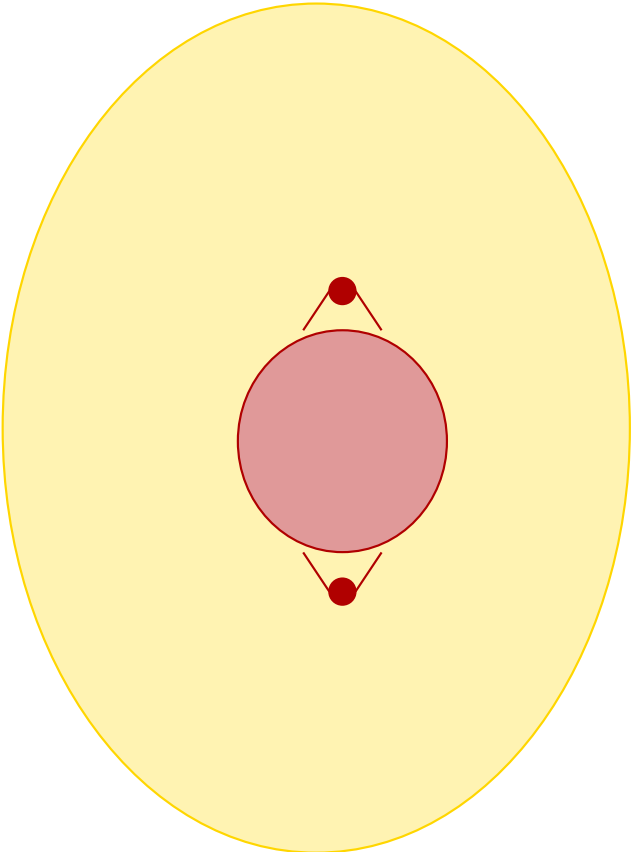
Für jede untere Schranke u von X gilt:

$u \in U$

$\Longrightarrow$ $u \sqsubseteq g$:-))







Wir suchen Lösungen für Ungleichungssysteme der Form:

$$x_i \quad \sqsupseteq \quad f_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad\qquad (*)$$

Wir suchen Lösungen für Ungleichungssysteme der Form:

$$x_i \quad \sqsupseteq \quad f_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad\qquad (*)$$

wobei:

x_i	Unbekannte	hier:	$\mathcal{A}[u]$
$\mathbb{D}$	Werte	hier:	2^{Expr}
$\sqsubseteq \;\subseteq\; \mathbb{D} \times \mathbb{D}$	Ordnungsrelation	hier:	$\supseteq$
$f_i\colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$	Bedingung	hier:	...

Wir suchen Lösungen für Ungleichungssysteme der Form:

$$x_i \quad \sqsupseteq \quad f_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad\qquad (*)$$

wobei:

x_i	Unbekannte	hier:	$\mathcal{A}[u]$
$\mathbb{D}$	Werte	hier:	2^{Expr}
$\sqsubseteq \;\subseteq\; \mathbb{D} \times \mathbb{D}$	Ordnungsrelation	hier:	$\supseteq$
$f_i\colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$	Bedingung	hier:	...

Ungleichung für $\mathcal{A}[v]$:

$$\mathcal{A}[v] \quad \subseteq \quad \bigcap \{ [\![k]\!]^\sharp (\mathcal{A}[u]) \mid k = (u, _, v) \;\; \text{Kante} \}$$

Wir suchen Lösungen für Ungleichungssysteme der Form:

$$x_i \quad \sqsupseteq \quad f_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad\qquad (*)$$

wobei:

x_i	Unbekannte	hier:	$\mathcal{A}[u]$
$\mathbb{D}$	Werte	hier:	2^{Expr}
$\sqsubseteq \;\subseteq\; \mathbb{D} \times \mathbb{D}$	Ordnungsrelation	hier:	$\supseteq$
$f_i\colon \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}$	Bedingung	hier:	...

Ungleichung für $\mathcal{A}[v]$:

$$\mathcal{A}[v] \quad \subseteq \quad \bigcap \{ [\![k]\!]^\sharp (\mathcal{A}[u]) \mid k = (u, _, v) \;\; \text{Kante} \}$$

Denn:

$$x \sqsupseteq d_1 \wedge \ldots \wedge x \sqsupseteq d_k \quad \text{gdw.} \quad x \sqsupseteq \bigsqcup \{ d_1, \ldots, d_k \} \qquad \text{:-)}$$

Eine Abbildung $f : \mathbb{D}_1 \to \mathbb{D}_2$ heißt monoton, falls
$f(a) \sqsubseteq f(b)$ für alle $a \sqsubseteq b$.

Eine Abbildung $f : \mathbb{D}_1 \to \mathbb{D}_2$ heißt monoton, falls
$f(a) \sqsubseteq f(b)$ für alle $a \sqsubseteq b$.

Beispiele:

(1) $\mathbb{D}_1 = \mathbb{D}_2 = 2^U$ für eine Menge U und $f\,x = (x \cap a) \cup b$.

Offensichtlich ist jedes solche f monoton :-)

Eine Abbildung $f : \mathbb{D}_1 \to \mathbb{D}_2$ heißt monoton, falls
$f(a) \sqsubseteq f(b)$ für alle $a \sqsubseteq b$.

Beispiele:

(1) $\mathbb{D}_1 = \mathbb{D}_2 = 2^U$ für eine Menge U und $f\,x = (x \cap a) \cup b$.

Offensichtlich ist jedes solche f monoton :-)

(2) $\mathbb{D}_1 = \mathbb{D}_2 = \mathbb{Z}$ (mit der Ordnung "$\leq$"). Dann gilt:

- $\mathsf{inc}\, x = x + 1$ ist monoton.
- $\mathsf{dec}\, x = x - 1$ ist monoton.

Eine Abbildung $f : \mathbb{D}_1 \to \mathbb{D}_2$ heißt monoton, falls
$f(a) \sqsubseteq f(b)$ für alle $a \sqsubseteq b$.

Beispiele:

(1) $\mathbb{D}_1 = \mathbb{D}_2 = 2^U$ für eine Menge U und $f\,x = (x \cap a) \cup b$.

Offensichtlich ist jedes solche f monoton :-)

(2) $\mathbb{D}_1 = \mathbb{D}_2 = \mathbb{Z}$ (mit der Ordnung "$\leq$"). Dann gilt:

- $\mathsf{inc}\,x = x + 1$ ist monoton.
- $\mathsf{dec}\,x = x - 1$ ist monoton.
- $\mathsf{inv}\,x = -x$ ist nicht monoton :-)