## 1.2 Beseitigung überflüssiger Zuweisungen

Beispiel:

$$
\begin{array}{ll}
1: & x = y + 2; \\
2: & y = 5; \\
3: & x = y + 3;
\end{array}
$$

Der Wert von $x$ an den Programmpunkten $1, 2$ wird überschrieben, bevor er benutzt werden kann.

Die Variable $x$ nennen wir deshalb an diesen Programmpunkten tot :-)

## Beachte:

→ Zuweisungen an tote Variablen können wir uns schenken ;-)

→ Solche Ineffizienzen können u.a. durch andere Transformationen hervorgerufen werden.

## Formale Definition:

Die Variable $x$ heißt lebendig an $u$ entlang des Pfads $\pi$, falls sich $\pi$ zerlegen lässt in $\pi = \pi_1 \, \pi_2 \, k \, \pi_3$ so dass gilt:

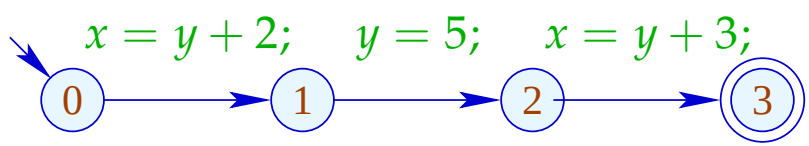
- $\pi_1$ erreicht $u$;
- $k$ ist eine Benutzung von $x$;
- $\pi_2$ enthält keine Überschreibung von $x$.

Die Menge der an einer Kante $k = (_, lab, _)$ benutzten bzw. überschriebenen Variablen ist dabei gegeben durch:

| $lab$ | benutzt | überschrieben |
|---|---|---|
| $;$ | $\emptyset$ | $\emptyset$ |
| $\text{Pos}\,(e)$ | $Vars\,(e)$ | $\emptyset$ |
| $\text{Neg}\,(e)$ | $Vars\,(e)$ | $\emptyset$ |
| $R = e;$ | $Vars\,(e)$ | $\{R\}$ |
| $R = M[e];$ | $Vars\,(e)$ | $\{R\}$ |
| $M[e_1] = e_2;$ | $Vars\,(e_1) \cup Vars\,(e_2)$ | $\emptyset$ |

Eine Variable $x$, die nicht lebendig an $u$ entlang $\pi$ ist, heißt tot an $u$ entlang $\pi$.

## Beispiel:




Wir bemerken:

| | lebendig | tot |
|---|---|---|
| 0 | $\{y\}$ | $\{x\}$ |
| 1 | $\emptyset$ | $\{x, y\}$ |
| 2 | $\{y\}$ | $\{x\}$ |
| 3 | $\emptyset$ | $\{x, y\}$ |

Die Variable $x$ ist lebendig an $u$ falls $x$ lebendig ist an $u$ entlang irgend eines Pfads. Andernfalls ist $x$ tot an $u$ .

Die Variable $x$ ist lebendig an $u$ falls $x$ lebendig ist an $u$ entlang irgend eines Pfads. Andernfalls ist $x$ tot an $u$ .

## Frage:

Wie berechnet man für jedes $u$ die Menge der dort lebendigen/toten Variablen ???

Die Variable $x$ ist lebendig an $u$ falls $x$ lebendig ist an $u$ entlang irgend eines Pfads. Andernfalls ist $x$ tot an $u$ .

## Frage:

Wie berechnet man für jedes $u$ die Menge der dort lebendigen/toten Variablen ???

## Idee:

Definiere für jede Kante $k = (u, _, v)$ eine Funktion $[\![k]\!]^\sharp$ , die die Menge der an $v$ lebendigen Variablen in die Menge der an $u$ lebendigen Variablen transformiert ...

Sei $\mathbb{L} = 2^{Vars}$ .

Für $k = (_, lab, _)$ definieren wir $[\![k]\!]^\sharp = [\![lab]\!]^\sharp$ durch:

$$
\begin{array}{lcl}
[\![;]\!]^\sharp\, L & = & L \\
[\![\mathrm{Pos}(e)]\!]^\sharp\, L & = & [\![\mathrm{Neg}(e)]\!]^\sharp\, L \;=\; L \cup Vars(e) \\
[\![x = e;]\!]^\sharp\, L & = & (L \backslash \{x\}) \cup Vars(e) \\
[\![R = M[e];]\!]^\sharp\, L & = & (L \backslash \{R\}) \cup Vars(e) \\
[\![M[e_1] = e_2;]\!]^\sharp\, L & = & L \cup Vars(e_1) \cup Vars(e_2)
\end{array}
$$

Sei $\mathbb{L} = 2^{Vars}$ .

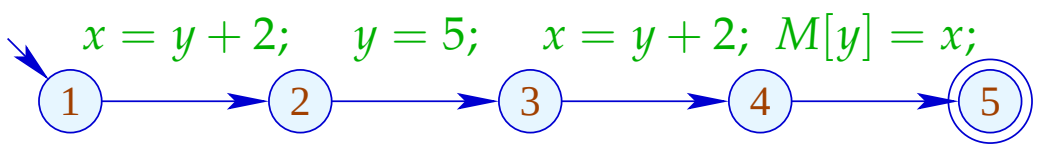
Für $k = (_, lab, _)$ definieren wir $[\![k]\!]^\sharp = [\![lab]\!]^\sharp$ durch:

$$
\begin{array}{lcl}
[\![;]\!]^\sharp\, L & = & L \\
[\![\mathrm{Pos}(e)]\!]^\sharp\, L & = & [\![\mathrm{Neg}(e)]\!]^\sharp\, L \;=\; L \cup Vars(e) \\
[\![x = e;]\!]^\sharp\, L & = & (L \backslash \{x\}) \cup Vars(e) \\
[\![R = M[e];]\!]^\sharp\, L & = & (L \backslash \{R\}) \cup Vars(e) \\
[\![M[e_1] = e_2;]\!]^\sharp\, L & = & L \cup itVars(e_1) \cup Vars(e_2)
\end{array}
$$

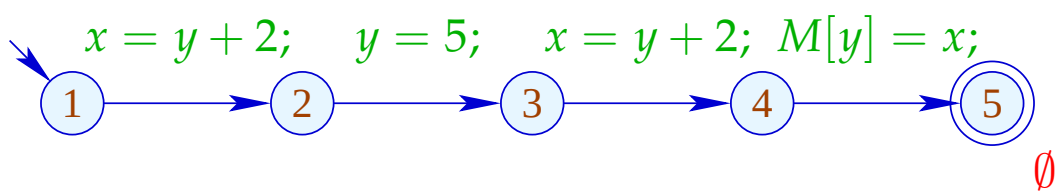
$[\![k]\!]^\sharp$ können wir wieder zu Effekten $[\![\pi]\!]^\sharp$ ganzer Pfade $\pi = k_1 \ldots k_r$ fortsetzen durch:

$$[\![\pi]\!]^\sharp = [\![k_1]\!]^\sharp \circ \ldots \circ [\![k_r]\!]^\sharp$$

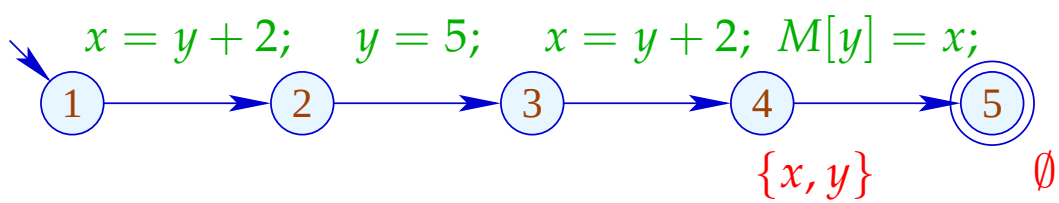
Wir vergewissern uns, dass diese Definitionen vernünftig sind :-)



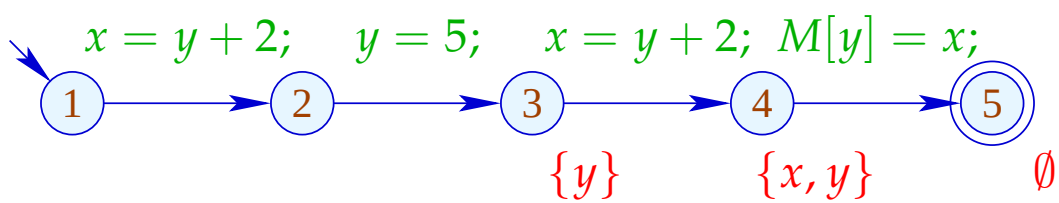
Wir vergewissern uns, dass diese Definitionen vernünftig sind :-)



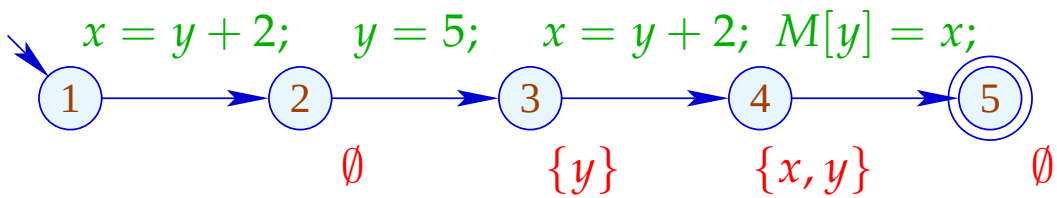
Wir vergewissern uns, dass diese Definitionen vernünftig sind :-)



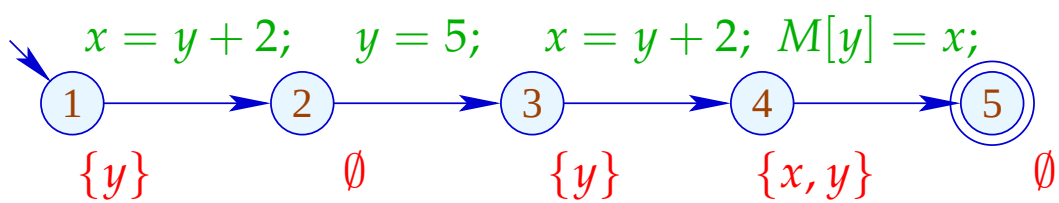
Wir vergewissern uns, dass diese Definitionen vernünftig sind :-)



Wir vergewissern uns, dass diese Definitionen vernünftig sind :-)



Wir vergewissern uns, dass diese Definitionen vernünftig sind :-)



Die Menge der an $u$ lebendigen Variablen ist dann:

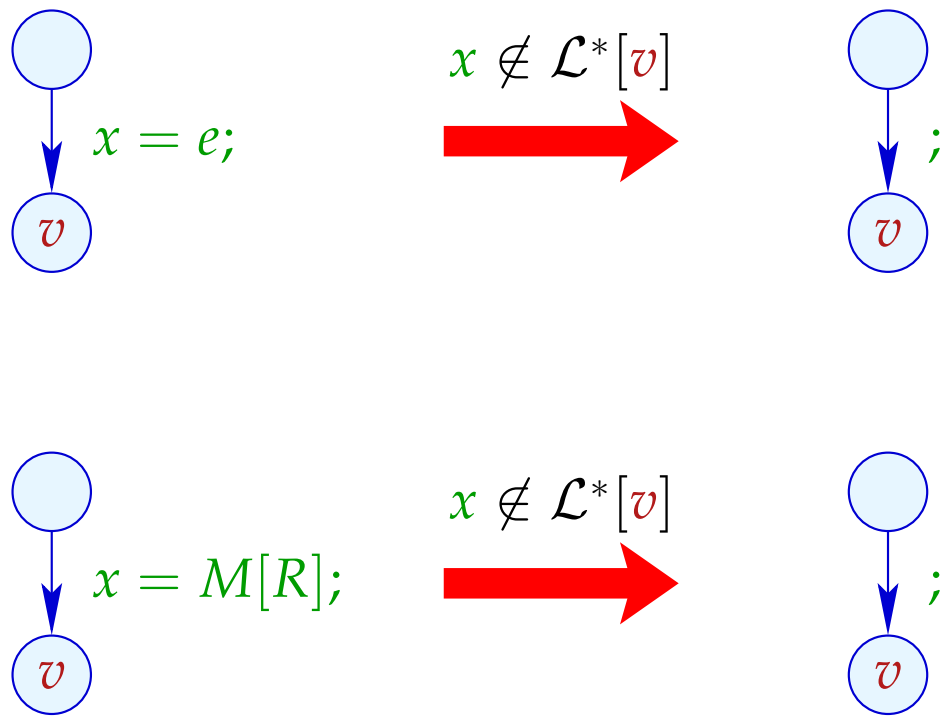
$$\mathcal{L}^*[u] \;=\; \bigcup\{\, [\![\pi]\!]^\sharp\, \emptyset \mid \pi : u \to^* \mathit{stop}\}$$

... in Worten:

- Die Pfade starten in $u$ :-)
- $x$ ist lebendig, wenn es nur entlang irgend eines Pfads lebendig ist :-)

  $\Longrightarrow$ Als Halbordnung für $\mathbb{L}$ benötigen wir $\sqsubseteq\; = \;\subseteq$ .
- Am Programmende ist keine Variable mehr lebendig :-)

# Transformation 2:



## Zur Korrektheit zeigt man:

→ Korrektheit der Kanten-Effekte: Falls $L$ die Menge der legendigen Variablen am Ende eines Pfads $\pi$ sind, dann ist $[\![\pi]\!]^\sharp\, L$ die Menge der am Anfang lebendigen Variablen :-)

→ Korrektheit der Transformation auf einem Pfad: Wird auf den Wert einer Variable zugegriffen, ist diese stets lebendig. Der Wert toter Variablen ist darum egal :-)

→ Korrektheit der Transformation: Bei Ausführung des transformierten Programms haben bei jedem Besuch eines Programmpunkts die lebendigen Variablen den gleichen Wert :-))

## Berechnung der Mengen $\mathcal{L}^*[u]$ :

(1) Aufstellen des Ungleichungssystems:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{L}[stop] & \supseteq & \emptyset \\ \mathcal{L}[u] & \supseteq & [\![k]\!]^\sharp\,(\mathcal{L}[v]) \qquad k = (u, _, v) \quad \text{Kante} \end{array}$$

(2) Lösen des Ungleichungssystems mittels RR-Iteration.

Da $\mathbb{L}$ endlich ist, terminiert die Iteration :-)

(3) Die kleinste Lösung $\mathcal{L}$ des Ungleichungssystems ist gleich $\mathcal{L}^*$ da alle $[\![k]\!]^\sharp$ distributiv sind :-))

## Berechnung der Mengen $\mathcal{L}^*[u]$ :

(1) Aufstellen des Ungleichungssystems:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{L}[stop] & \supseteq & \emptyset \\ \mathcal{L}[u] & \supseteq & [\![k]\!]^\sharp\,(\mathcal{L}[v]) \qquad k = (u, _, v) \quad \text{Kante} \end{array}$$

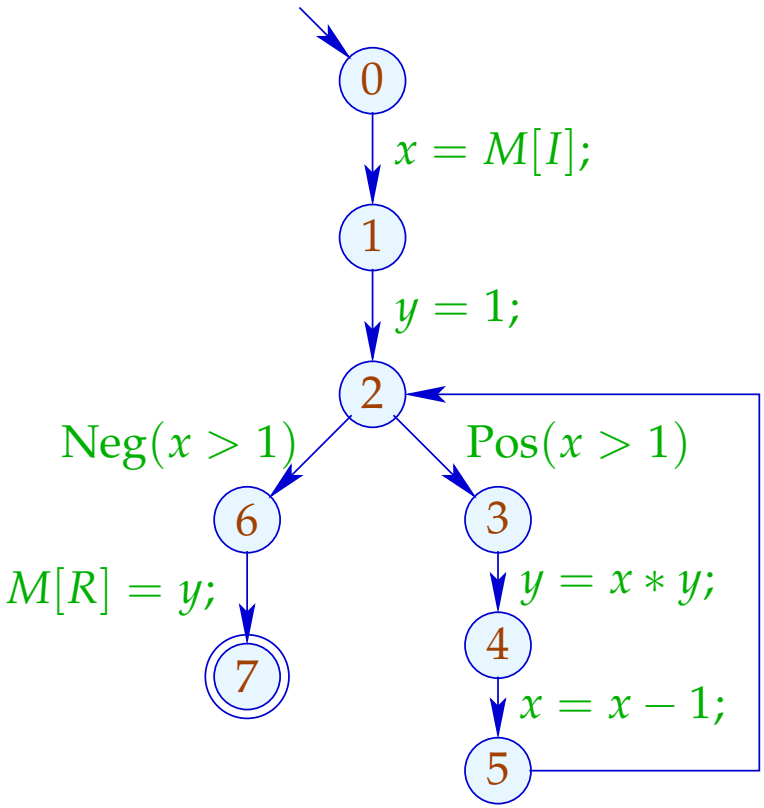
(2) Lösen des Ungleichungssystems mittels RR-Iteration.

Da $\mathbb{L}$ endlich ist, terminiert die Iteration :-)

(3) Die kleinste Lösung $\mathcal{L}$ des Ungleichungssystems ist gleich $\mathcal{L}^*$ da alle $[\![k]\!]^\sharp$ distributiv sind :-))

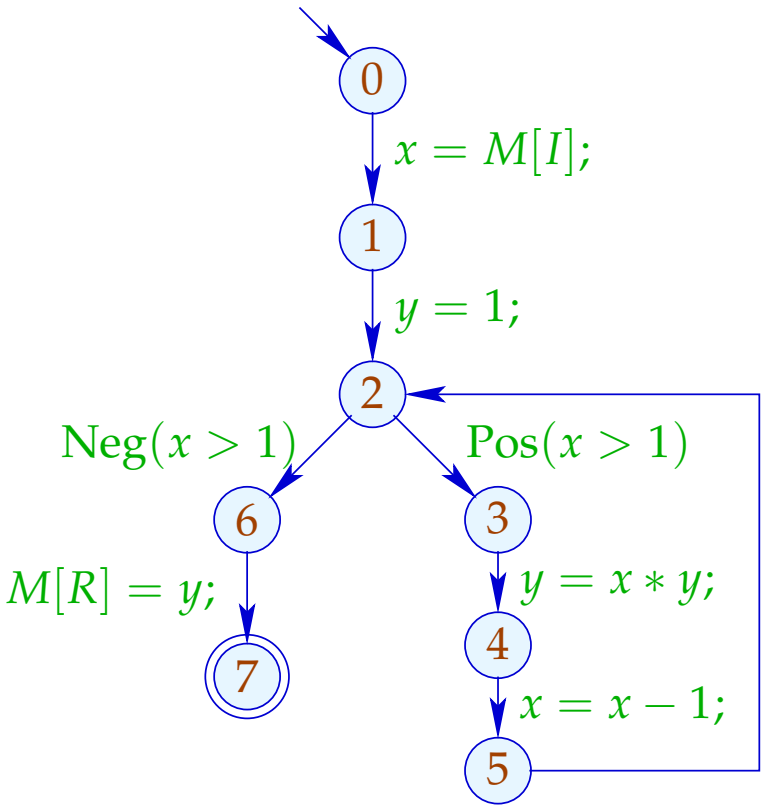
**Achtung:** Die Information wird rückwärts propagiert !!!

# Beispiel:




$$
\begin{array}{lll}
\mathcal{L}[0] & \supseteq & (\mathcal{L}[1] \backslash \{x\}) \cup \{I\} \\
\mathcal{L}[1] & \supseteq & \mathcal{L}[2] \backslash \{y\} \\
\mathcal{L}[2] & \supseteq & (\mathcal{L}[6] \cup \{x\}) \cup (\mathcal{L}[3] \cup \{x\}) \\
\mathcal{L}[3] & \supseteq & (\mathcal{L}[4] \backslash \{y\}) \cup \{x, y\} \\
\mathcal{L}[4] & \supseteq & (\mathcal{L}[5] \backslash \{x\}) \cup \{x\} \\
\mathcal{L}[5] & \supseteq & \mathcal{L}[2] \\
\mathcal{L}[6] & \supseteq & \mathcal{L}[7] \cup \{y, R\} \\
\mathcal{L}[7] & \supseteq & \emptyset
\end{array}
$$

# Beispiel:

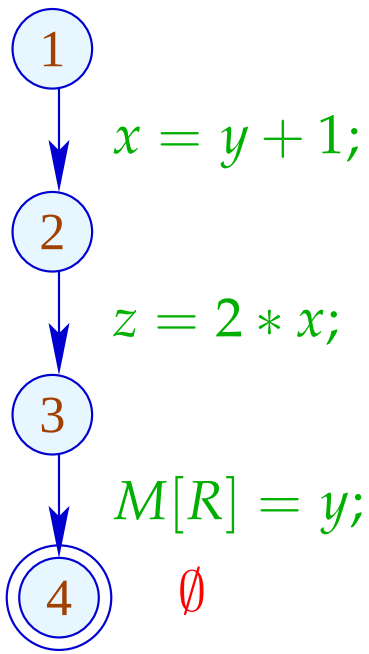



| | 1 | 2 |
|---|---|---|
| 7 | $\emptyset$ | |
| 6 | $\{y, R\}$ | |
| 2 | $\{x, y, R\}$ | dito |
| 5 | $\{x, y, R\}$ | |
| 4 | $\{x, y, R\}$ | |
| 3 | $\{x, y, R\}$ | |
| 1 | $\{x, R\}$ | |
| 0 | $\{I, R\}$ | |

Bei keiner Zuweisung ist die linke Variable tot :-)

## Achtung:

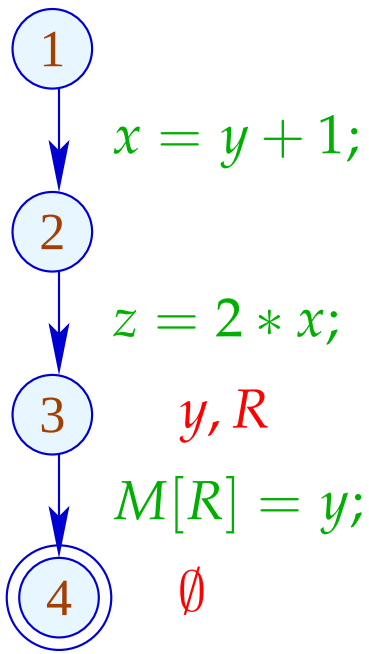
Beseitigung von Zuweisungen an tote Variablen kann weitere Variablen töten:



Bei keiner Zuweisung ist die linke Variable tot :-)

## Achtung:

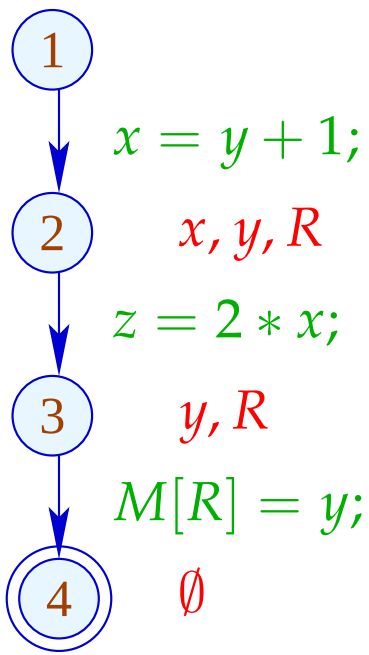
Beseitigung von Zuweisungen an tote Variablen kann weitere Variablen töten:



Bei keiner Zuweisung ist die linke Variable tot :-)

## Achtung:

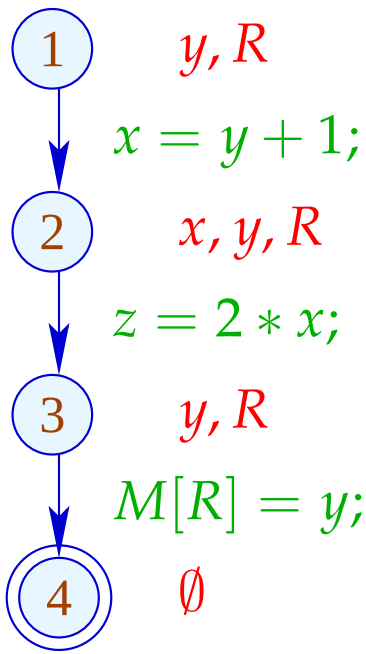
Beseitigung von Zuweisungen an tote Variablen kann weitere Variablen töten:



Bei keiner Zuweisung ist die linke Variable tot :-)

## Achtung:

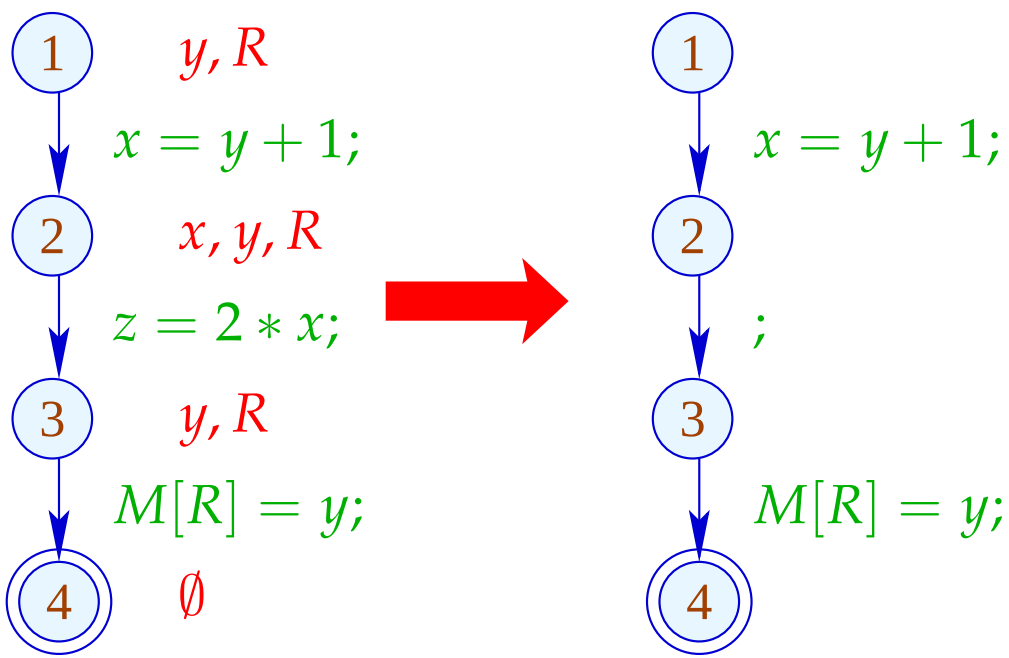
Beseitigung von Zuweisungen an tote Variablen kann weitere Variablen töten:



Bei keiner Zuweisung ist die linke Variable tot :-)

## Achtung:

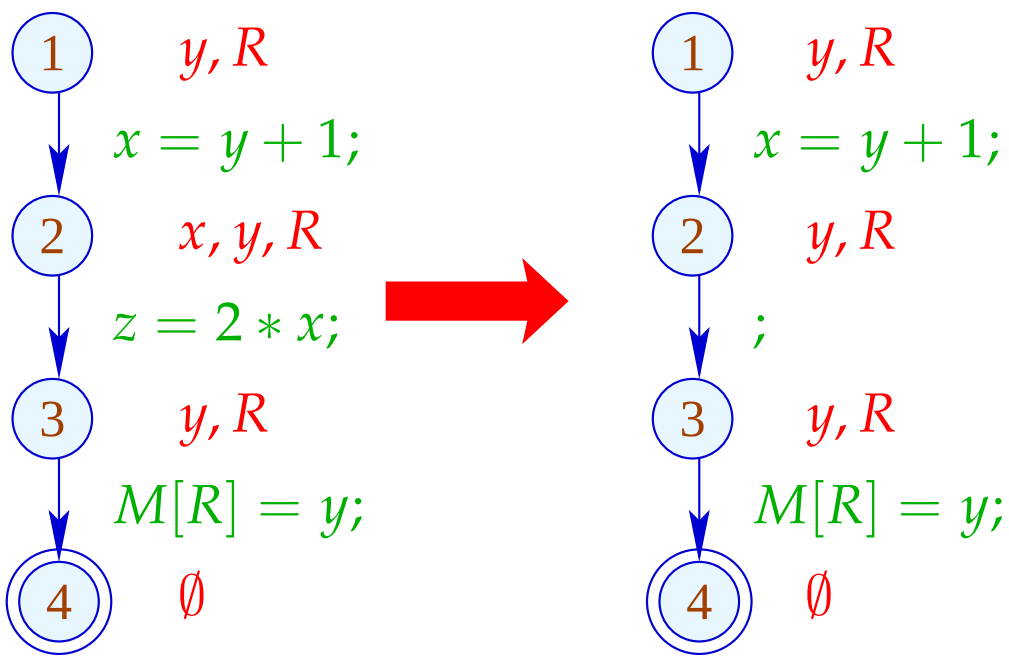
Beseitigung von Zuweisungen an tote Variablen kann weitere Variablen töten:



Bei keiner Zuweisung ist die linke Variable tot :-)

## Achtung:

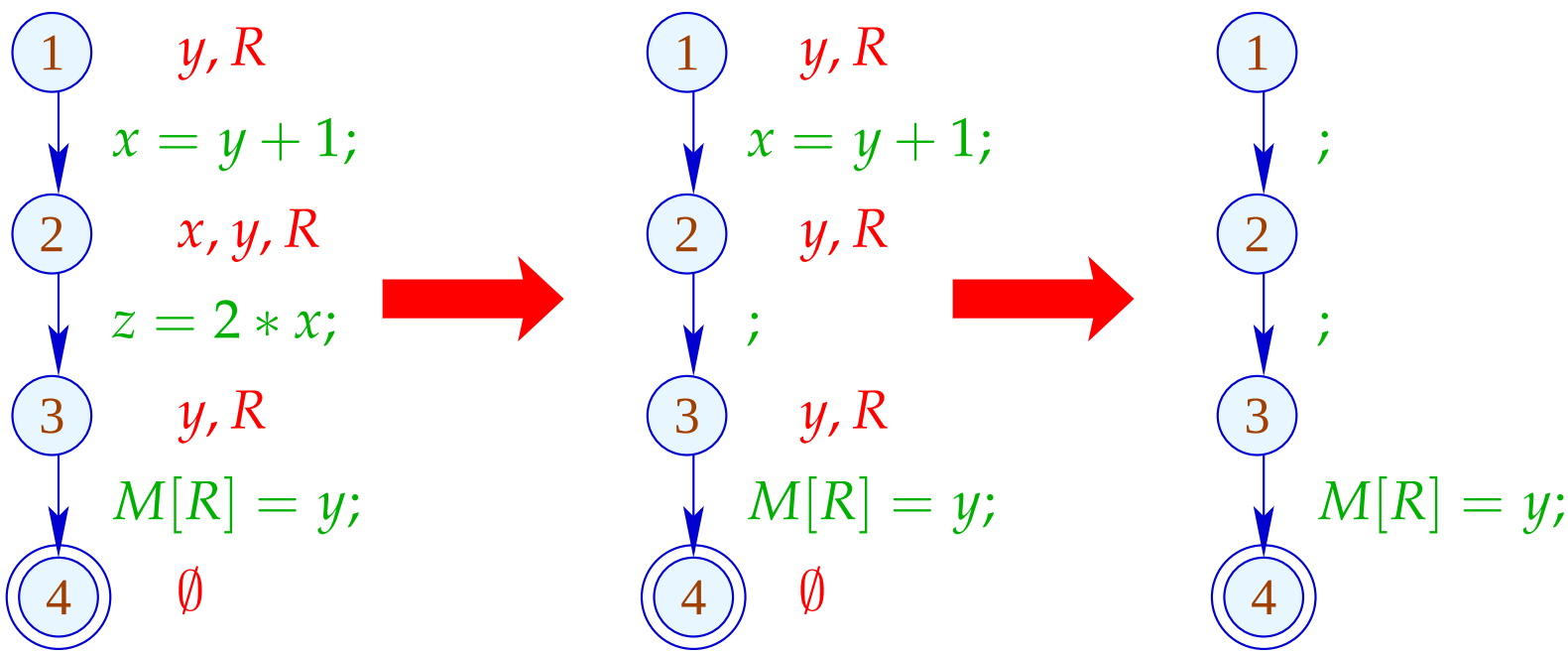
Beseitigung von Zuweisungen an tote Variablen kann weitere Variablen töten:



Bei keiner Zuweisung ist die linke Variable tot :-)

## Achtung:

Beseitigung von Zuweisungen an tote Variablen kann weitere Variablen töten:



Das Programm mehrmals zu analysieren, ist hässlich :-(

Idee: Analysiere echte Lebendigkeit!

$x$ heißt echt lebendig an $u$ entlang eines Pfads $\pi$, falls sich $\pi$ zerlegen lässt in $\pi = \pi_1\, \pi_2\, k\, \pi_3$ so dass gilt:

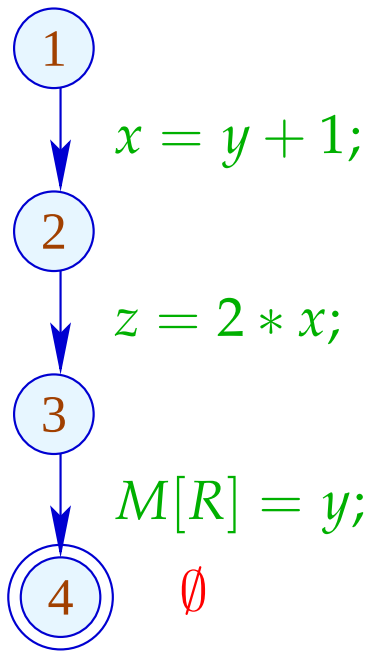
- $\pi_1$ erreicht $u$;
- $k$ ist eine echte Benutzung von $x$;
- $\pi_2$ enthält keine Überschreibung von $x$.

Die Menge der an einer Kante $k = (_, lab, v)$ echt benutzten Variablen ist gegeben durch:

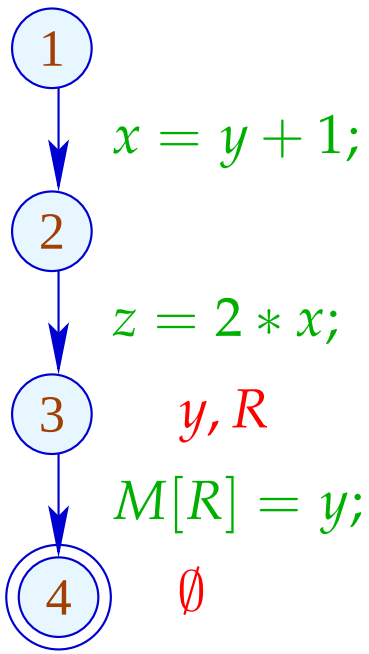
| $lab$ | echt benutzt |
|---|---|
| $;$ | $\emptyset$ |
| $\text{Pos}\,(e)$ | $Vars\,(e)$ |
| $\text{Neg}\,(e)$ | $Vars\,(e)$ |
| $x = e;$ | $Vars\,(e)$ $(*)$ |
| $x = M[e];$ | $Vars\,(e)$ $(*)$ |
| $M[e_1] = e_2;$ | $Vars(e_1) \cup Vars(e_2)$ |

$(*)$ – sofern $x$ an $v$ echt lebendig ist :-)

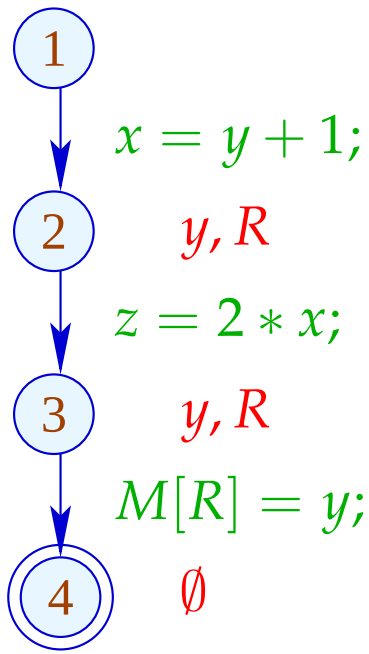
Beispiel:



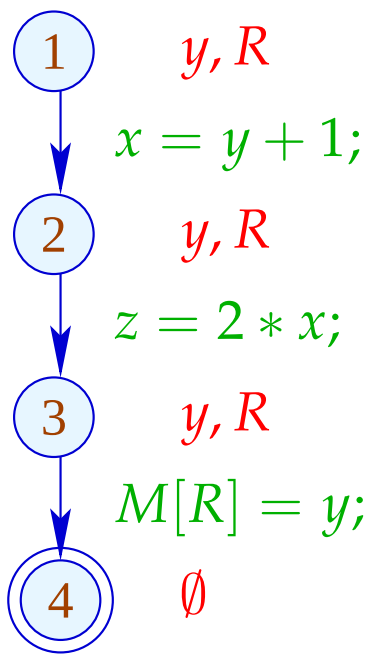
Beispiel:



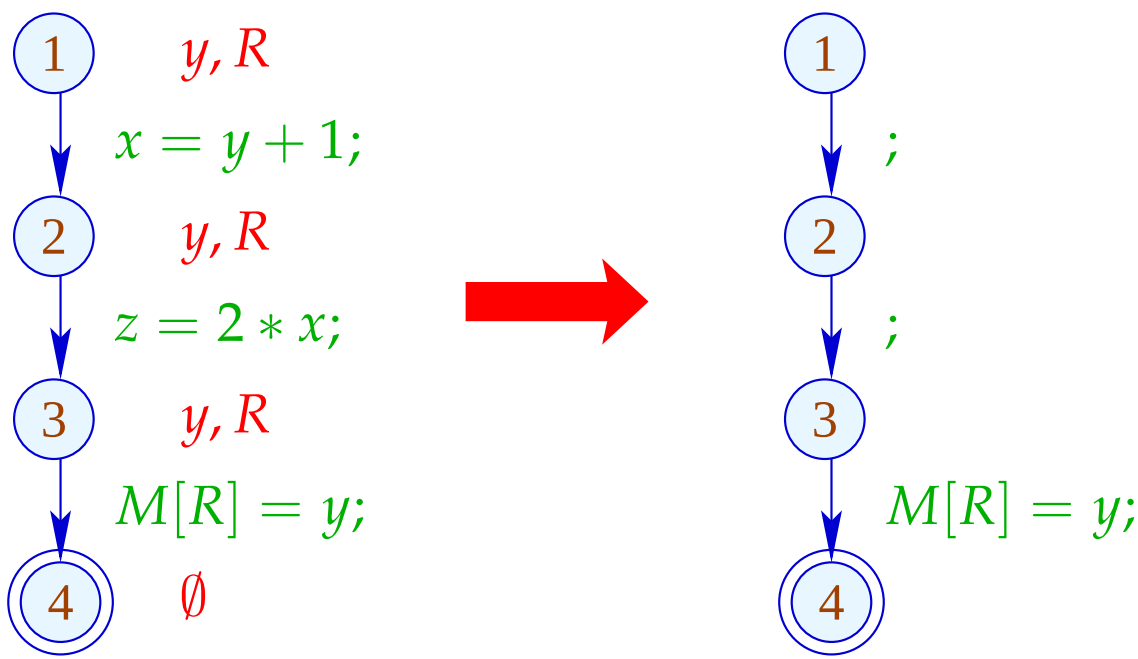
Beispiel:



Beispiel:



Beispiel:



## Die Kanten-Effekte:

$$
\begin{array}{lcl}
[\![;]\!]^\sharp\, L & = & L \\
[\![\mathrm{Pos}(e)]\!]^\sharp\, L & = & [\![\mathrm{Neg}(e)]\!]^\sharp\, L \;=\; L \cup \mathit{Vars}(e) \\
[\![x = e;]\!]^\sharp\, L & = & (L \backslash \{x\}) \cup \mathit{Vars}(e) \\
[\![R = M[e];]\!]^\sharp\, L & = & (L \backslash \{R\}) \cup \mathit{Vars}(e) \\
[\![M[e_1] = e_2;]\!]^\sharp\, L & = & L \cup \mathit{Vars}(e_1) \cup \mathit{Vars}(e_2)
\end{array}
$$

## Die Kanten-Effekte:

$$
\begin{array}{lcl}
[\![;]\!]^\sharp\, L & = & L \\
[\![\mathrm{Pos}(e)]\!]^\sharp\, L & = & [\![\mathrm{Neg}(e)]\!]^\sharp\, L \;\; = \;\; L \cup \mathit{Vars}(e) \\
[\![x = e;]\!]^\sharp\, L & = & (L \backslash \{x\}) \cup \; (x \in L)\; ?\; \mathit{Vars}(e) : \; \emptyset \\
[\![R = M[e];]\!]^\sharp\, L & = & (L \backslash \{R\}) \cup \; (R \in L)\; ?\; \mathit{Vars}(e) : \; \emptyset \\
[\![M[e_1] = e_2;]\!]^\sharp\, L & = & L \cup \mathit{Vars}(e_1) \cup \mathit{Vars}(e_2)
\end{array}
$$

## Beachte:

- Die Kanten-Effekte für echt lebendige Variablen sind komplizierter als für lebendige Variablen :-)
- Sie sind aber immer noch distributiv !!

## Beachte:

- Die Kanten-Effekte für echt lebendige Variablen sind komplizierter als für lebendige Variablen :-)
- Sie sind aber immer noch distributiv !!

  Dazu betrachten wir für $\mathbb{D} = 2^U$ , $f\,y = (u \in y)\,?\,b:\,\emptyset$
  Wir überprüfen:

$$
\begin{aligned}
f\,(y_1 \cup y_2) &= (u \in y_1 \cup y_2)\,?\,b:\,\emptyset \\
&= (u \in y_1 \vee u \in y_2)\,?\,b:\,\emptyset \\
&= (u \in y_1)\,?\,b:\,\emptyset \cup (u \in y_2)\,?\,b:\,\emptyset \\
&= f\,y_1 \cup f\,y_2
\end{aligned}
$$

## Beachte:

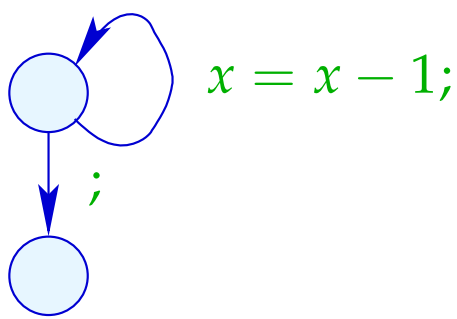
- Die Kanten-Effekte für echt lebendige Variablen sind komplizierter als für lebendige Variablen :-)
- Sie sind aber immer noch distributiv !!

  Dazu betrachten wir für $\mathbb{D} = 2^U$ , $f\,y = (u \in y)\,?\,b:\,\emptyset$
  Wir überprüfen:

$$
\begin{aligned}
f\,(y_1 \cup y_2) &= (u \in y_1 \cup y_2)\,?\,b:\,\emptyset \\
&= (u \in y_1 \vee u \in y_2)\,?\,b:\,\emptyset \\
&= (u \in y_1)\,?\,b:\,\emptyset \cup (u \in y_2)\,?\,b:\,\emptyset \\
&= f\,y_1 \cup f\,y_2
\end{aligned}
$$

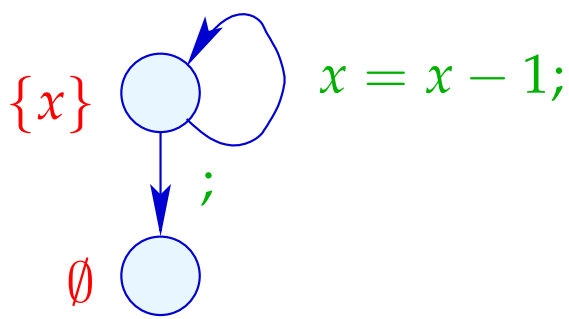
$\Longrightarrow$ Ungleichungssystem liefert MOP :-))

- Echte Lebendigkeit findet mehr überflüssige Zuweisungen als wiederholte Lebendigkeit !!!



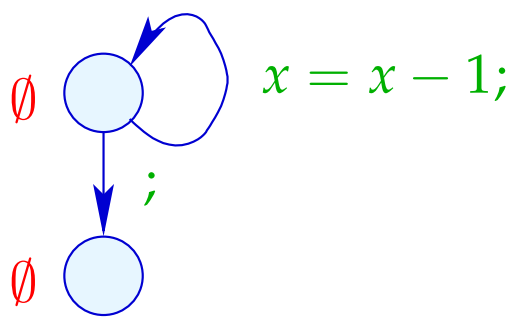
- Echte Lebendigkeit findet mehr überflüssige Zuweisungen als wiederholte Lebendigkeit !!!

Lebendigkeit:



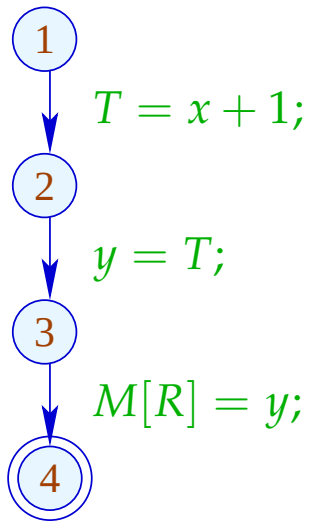
- Echte Lebendigkeit findet mehr überflüssige Zuweisungen als wiederholte Lebendigkeit !!!

Echte Lebendigkeit:



## 1.3 Beseitigung überflüssiger Umspeicherungen

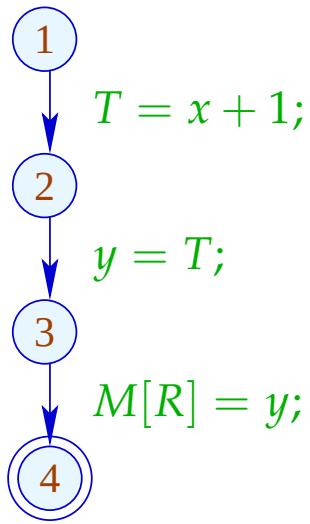
Beispiel:




Offenbar ist die Umspeicherung nutzlos :-(

## 1.3 Beseitigung überflüssiger Umspeicherungen

Beispiel:

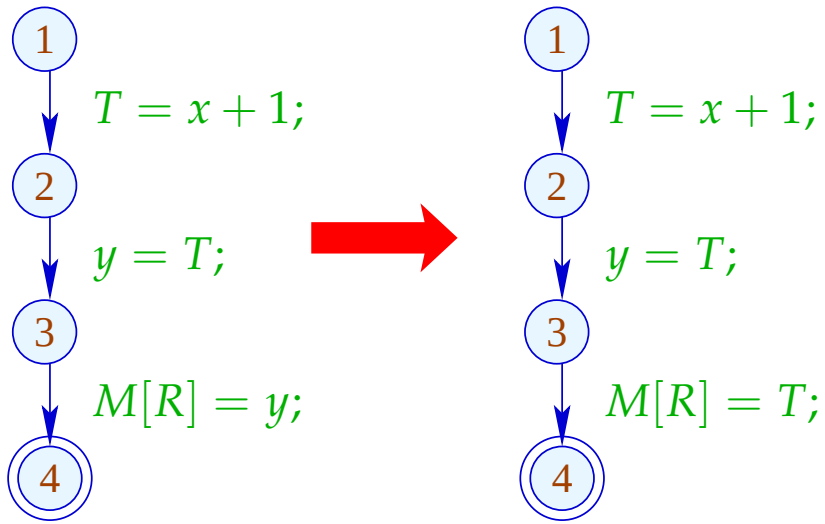



Offenbar ist die Umspeicherung nutzlos :-(

Statt $y$ könnten wir auch $T$ abspeichern :-)

## 1.3 Beseitigung überflüssiger Umspeicherungen

Beispiel:

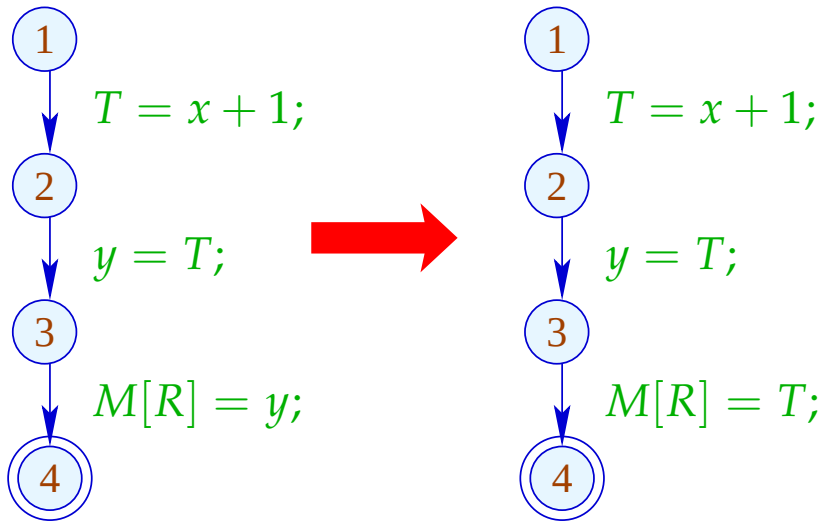



Offenbar ist die Umspeicherung nutzlos :-(

Statt $y$ könnten wir auch $T$ abspeichern :-)

## 1.3 Beseitigung überflüssiger Umspeicherungen

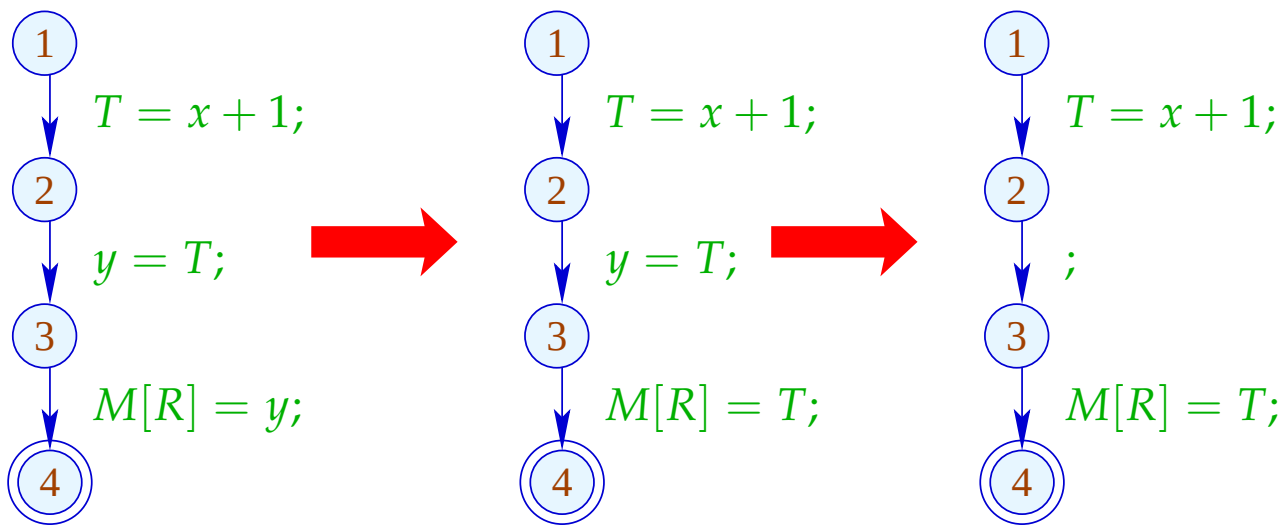
Beispiel:




Vorteil: Jetzt ist $y$ tot :-))

## 1.3 Beseitigung überflüssiger Umspeicherungen

Beispiel:




Vorteil: Jetzt ist $y$ tot :-))

## Idee:

Für jeden Ausdruck merken wir uns die Variablen, die gegenwärtig seinen Wert enthalten :-)

Wir benutzen: $\mathbb{V} = \mathit{Expr} \to 2^{\mathit{Vars}}$ ...

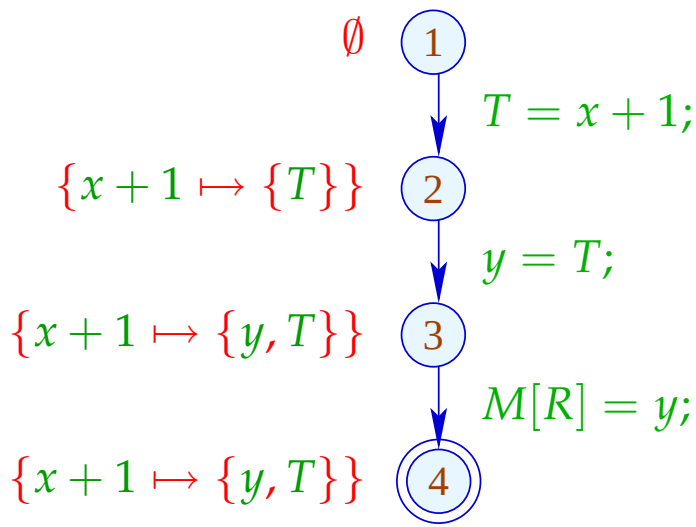
## Idee:

Für jeden Ausdruck merken wir uns die Variablen, die gegenwärtig seinen Wert enthalten :-)

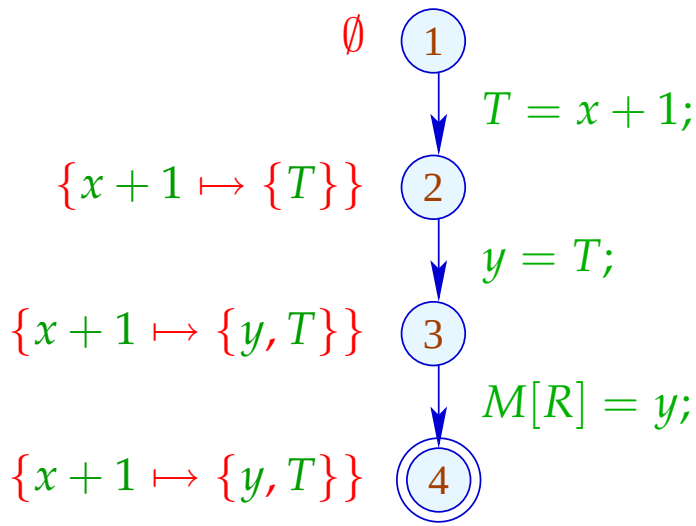
Wir benutzen: $\mathbb{V} = \mathit{Expr} \to 2^{\mathit{Vars}}$ und definieren:

$$
\begin{array}{lcl}
[\![;]\!]^\sharp\, V & = & V \\
[\![\mathrm{Pos}(e)]\!]^\sharp\, V & = & [\![\mathrm{Neg}(e)]\!]^\sharp\, V \;=\; V \\
[\![x = e;]\!]^\sharp\, V\, e' & = & \begin{cases} \{x\} & \text{falls} \quad e' = e \\ (V\, e') \backslash \{x\} & \text{sonst} \end{cases} \\
[\![x = y;]\!]^\sharp\, V\, e & = & \begin{cases} (V\, e) \cup \{x\} & \text{falls} \quad y \in V\, e \\ (V\, e) \backslash \{x\} & \text{sonst} \end{cases} \\
[\![x = M[R];]\!]^\sharp\, V\, e & = & (V\, e) \backslash \{x\} \\
[\![M[R_1] = R_2;]\!]^\sharp\, V & = & V
\end{array}
$$

# Im Beispiel:



## Im Beispiel:




$\rightarrow$ Wir propagieren die Information vorwärts :-)

An *start* haben wir $V_0\, e = \emptyset$ für alle $e$

$\rightarrow$ $\sqsubseteq \subseteq \mathbb{V} \times \mathbb{V}$ definieren wir durch:

$$V_1 \sqsubseteq V_2 \quad \text{gdw.} \quad V_1\, e \quad \supseteq \quad V_2\, e \qquad \text{für alle} \quad e$$

## Beobachtung:

Die neuen Kanten-Effekte sind distributiv:

Dazu zeigen wir, dass die folgenden Funktionen distributiv sind:

(1) $f_1\, V\, e = (V\, e) \backslash \{x\}$

(2) $f_2\, V = V \oplus \{e \mapsto \{x\}\}$

(3) $f_3\, V\, e = (y \in V\, e)\, ?\, (V\, e \cup \{x\}) : ((V\, e) \backslash \{x\})$

Offenbar gilt:

$$\begin{array}{lcl} [\![x = e;]\!]^\sharp & = & f_2 \circ f_1 \\ [\![x = y;]\!]^\sharp & = & f_3 \\ [\![x = M[R];]\!]^\sharp & = & f_1 \end{array}$$

Distributivität ist unter Komposition abgeschlossen. Damit folgt die Behauptung :-))

(1) Für $f\,V\,e = (V\,e)\backslash\{x\}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
f\,(V_1 \sqcup V_2)\,e &= ((V_1 \sqcup V_2)\,e)\backslash\{x\} \\
&= ((V_1\,e) \cap (V_2\,e))\backslash\{x\} \\
&= ((V_1\,e)\backslash\{x\}) \cap ((V_2\,e)\backslash\{x\}) \\
&= (f\,V_1\,e) \cap (f\,V_2\,e) \\
&= (f\,V_1 \sqcup f\,V_2)\,e \qquad \text{:-)}
\end{aligned}
$$

(2) Für $f\,V = V \oplus \{e \mapsto a\}$ gilt:

$$
\begin{aligned}
f\,(V_1 \sqcup V_2)\,e' &= ((V_1 \sqcup V_2) \oplus \{e \mapsto a\})\,e' \\
&= (V_1 \sqcup V_2)\,e' \\
&= (f\,V_1 \sqcup f\,V_2)\,e' \qquad \text{sofern} \quad e \neq e'
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f\,(V_1 \sqcup V_2)\,e &= ((V_1 \sqcup V_2) \oplus \{e \mapsto a\})\,e \\
&= a \\
&= ((V_1 \oplus \{e \mapsto a\})\,e) \cap ((V_2 \oplus \{e \mapsto a\})\,e) \\
&= (f\,V_1 \sqcup f\,V_2)\,e \qquad\qquad \text{:-)}
\end{aligned}
$$

(3) Für $f\,V\,e = (y \in V\,e)\,?\,(V\,e \cup \{x\}) : ((V\,e) \backslash \{x\})$ gilt:

$$
\begin{aligned}
f\,(V_1 \sqcup V_2)\,e &= (((V_1 \sqcup V_2)\,e) \backslash \{x\}) \cup (y \in (V_1 \sqcup V_2)\,e)\,?\,\{x\} : \emptyset \\
&= ((V_1\,e \cap V_2\,e) \backslash \{x\}) \cup (y \in (V_1\,e \cap V_2\,e))\,?\,\{x\} : \emptyset \\
&= ((V_1\,e \cap V_2\,e) \backslash \{x\}) \cup \\
&\quad ((y \in V_1\,e)\,?\,\{x\} : \emptyset) \cap ((y \in V_2\,e)\,?\,\{x\} : \emptyset) \\
&= (((V_1\,e) \backslash \{x\}) \cup (y \in V_1\,e)\,?\,\{x\} : \emptyset) \cap \\
&\quad (((V_2\,e) \backslash \{x\}) \cup (y \in V_2\,e)\,?\,\{x\} : \emptyset) \\
&= (f\,V_1 \sqcup f\,V_2)\,e \qquad \text{:-)}
\end{aligned}
$$

## Wir schließen:

$\rightarrow$ Lösen des Ungleichungssystems liefert die MOP-Lösung :-)

$\rightarrow$ Sei $\mathcal{V}$ diese Lösung.

Gilt $x \in \mathcal{V}[u]\, e$, enthält $x$ an $u$ den Wert von $e$ — welchen wir in $T_e$ abgespeichert haben

$\Longrightarrow$

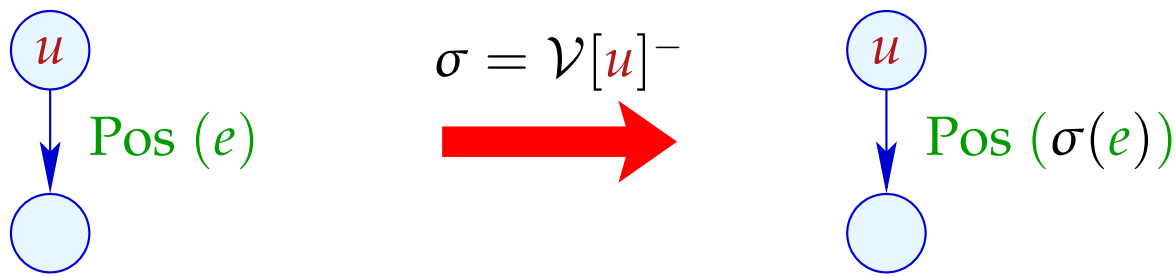
der Zugriff auf $x$ kann durch Zugriff auf $T_e$ ersetzt werden :-)

Für $V \in \mathbb{V}$ sei $V^-$ die Variablen-Substitution mit:

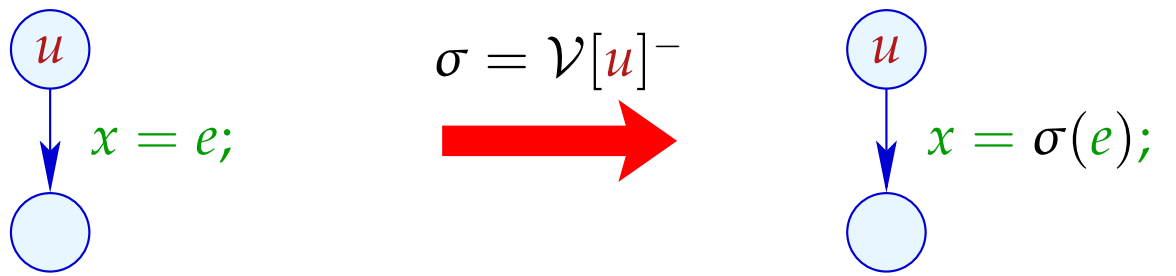
$$V^-\, x \;=\; \begin{cases} T_e & \text{falls } x \in V\, e \\ x & \text{sonst} \end{cases}$$

falls $\quad V\,e \cap V\,e' = \emptyset \quad$ für $\quad e \neq e'$ . Andernfalls: $\quad V^{-}\,x = x \quad$ :-)

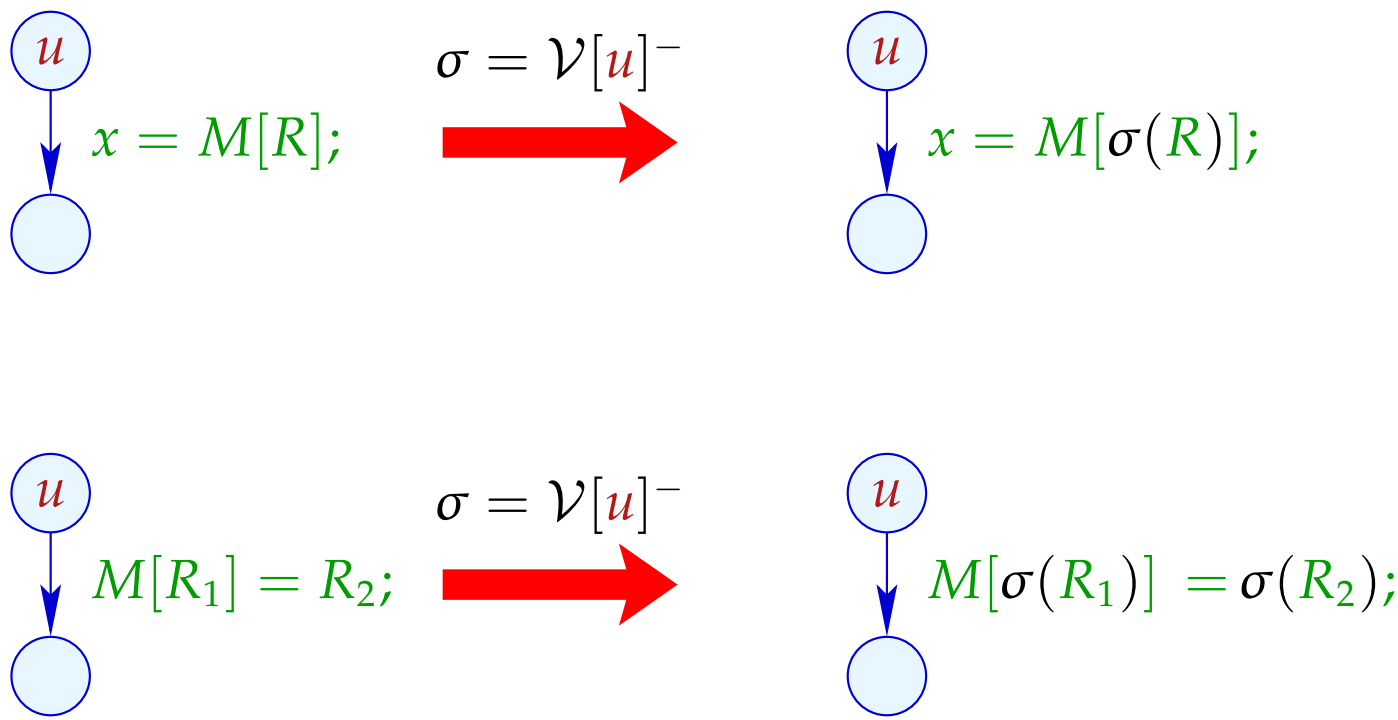
## Transformation 4:




... analog für Kanten mit Neg $(e)$



## Transformation 4 (Forts.):



## Vorgehen insgesamt:

(1) Verfügbarkeit von Ausdrücken: T1 + T2

- \+ verringert arithmetische Operationen
- – fügt überflüssige Umspeicherungen ein

(2) Werte von Variablen: T4

- \+ erzeugt tote Variablen

(3) (wahre) Lebendigkeit von Variablen: T3

- \+ beseitigt Zuweisungen an tote Variablen