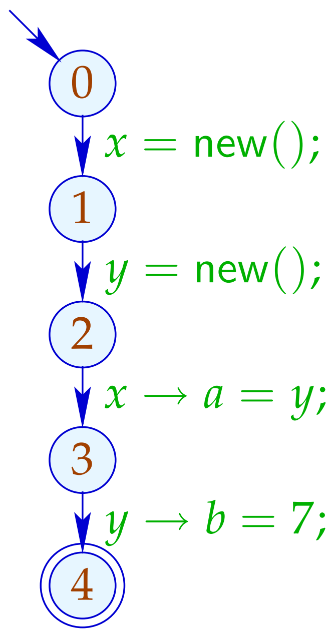
Alias-Analyse 3. Idee:

Berechne eine Äquivalenzrelation $\equiv$ auf Variablen x und Selektoren $y \to a$ mit $s_1 \equiv s_2$ falls an irgendeinem u s_1, s_2 die gleiche Adresse enthalten ...

... im einfachen Beispiel:



$$\equiv \; = \; \{\{x\}, \{y, x \to a\}, \{x \to b\}, \{y \to b\}\}$$

Diskussion:

- $\longrightarrow$ Wir berechnen eine Information für das ganze Programm.
- $\longrightarrow$ Die Berechnung dieser Information verwaltet Partitionen $\pi = \{P_1, \ldots, P_m\}$:-)
- $\longrightarrow$ Einzelne Mengen P_i identifizieren wir durch einen Repräsentanten $p_i \in P_i$.
- $\longrightarrow$ Die Operationen auf einer Partition π sind:

$$
\begin{array}{lcll}
\textsf{find}\,(\pi, p) & = & p_i & \text{falls } p \in P_i \\
 & // & \text{liefert den Repräsentanten} & \\
\textsf{union}\,(\pi, p_{i_1}, p_{i_2}) & = & \{P_{i_1} \cup P_{i_2}\} \cup \{P_j \mid i_1 \neq j \neq i_2\} & \\
 & // & \text{vereinigt repräsentierte Klassen} &
\end{array}
$$

$\longrightarrow$ Sind $x_1, x_2 \in \mathit{Vars}$ äquivalent, müssen auch $x_i \to a$ und $x_i \to b$ äquivalent sein :-)

$\longrightarrow$ Ist $P_i \cap \mathit{Vars} \neq \emptyset$, soll auch $p_i \in \mathit{Vars}$ gelten. Dann können wir union rekursiv anwenden :

$$
\begin{array}{lll}
\mathsf{union}^* \, (\pi, q_1, q_2) & = & \mathsf{let} \;\; p_{i_1} \;=\; \mathsf{find}\,(\pi, q_1) \\
& & \phantom{\mathsf{let}} \;\; p_{i_2} \;=\; \mathsf{find}\,(\pi, q_2) \\
& & \mathsf{in} \;\; \mathsf{if} \; p_{i_1} == p_{i_2} \; \mathsf{then} \; \pi \\
& & \quad\quad \mathsf{else} \;\; \mathsf{let} \; \pi \;=\; \mathsf{union}\,(\pi, p_{i_1}, p_{i_2}) \\
& & \quad\quad\quad\quad \mathsf{in} \;\; \mathsf{if} \; p_{i_1}, p_{i_2} \in \mathit{Vars} \; \mathsf{then} \\
& & \quad\quad\quad\quad\quad\quad \mathsf{let} \; \pi = \mathsf{union}^* \, (\pi, p_{i_1} \to a, p_{i_2} \to a) \\
& & \quad\quad\quad\quad\quad\quad \mathsf{in} \; \mathsf{union}^* \, (\pi, p_{i_1} \to b, p_{i_2} \to b) \\
& & \quad\quad\quad\quad \phantom{\mathsf{in}} \;\; \mathsf{else} \; \pi
\end{array}
$$

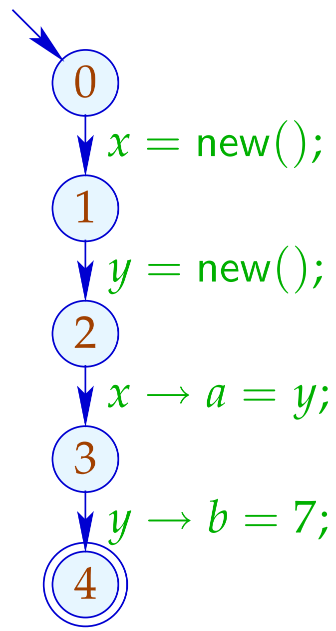
Die Analyse iteriert einmal über alle Kanten:

$$\pi = \{\{x\}, \{x \to a\}, \{x \to b\} \mid x \in Vars\};$$
$$\text{forall } k = (\_, lab, \_) \text{ do} \quad \pi = [\![lab]\!]^\sharp\, \pi;$$

Dabei ist:

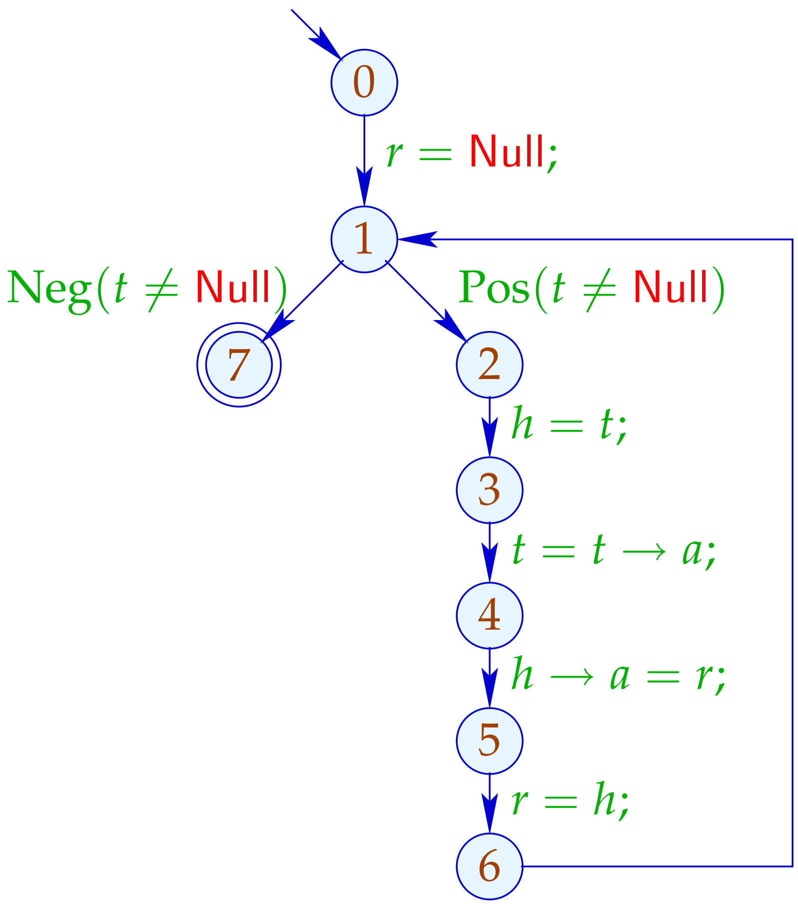
$$\begin{array}{lcll}
[\![x = y;]\!]^\sharp\, \pi & = & \text{union}^* \,(\pi, x, y) & \\
[\![x = R \to a;]\!]^\sharp\, \pi & = & \text{union}^* \,(\pi, x, R \to a) & \\
[\![R \to a = x;]\!]^\sharp\, \pi & = & \text{union}^* \,(\pi, x, R \to a) & \\
[\![lab]\!]^\sharp\, \pi & = & \pi & \text{sonst}
\end{array}$$

... im einfachen Beispiel:



	$\{\{x\}, \{y\}, \{x \to a\}, \{y \to a\}, \ldots\}$
$(0, 1)$	$\{\{x\}, \{y\}, \{x \to a\}, \{y \to a\}, \ldots\}$
$(1, 2)$	$\{\{x\}, \{y\}, \{x \to a\}, \{y \to a\}, \ldots\}$
$(2, 3)$	$\{\{x\}, \boxed{\{y, x \to a\}}, \{y \to a\}, \ldots\}$
$(3, 4)$	$\{\{x\}, \{y, x \to a\}, \{y \to a\}, \ldots\}$

... im komplizierten Beispiel:



	$\{\{h\},\{r\},\{t\},\{h \to a\},\{t \to a\}\}$
$(2,3)$	$\{\boxed{\{h,t\}},\{r\},\boxed{\{h \to a, t \to a\}}\}$
$(3,4)$	$\{\boxed{\{h,t,h \to a, t \to a\}},\{r\}\}$
$(4,5)$	$\{\boxed{\{h,t,r,h \to a, t \to a\}}\}$
$(5,6)$	$\{\{h,t,r,h \to a, t \to a\}\}$

Achtung:

Um überhaupt etwas heraus zu kriegen, müssen wir annehmen, dass alle Variablen anfangs auf verschiedene Adressen zeigen.

Zur Komplexität:

Wir haben:

$\mathcal{O}(\#\, \mathit{Kanten})$	Aufrufe von	union*
$\mathcal{O}(\#\, \mathit{Kanten} + \#\, \mathit{Vars})$	Aufrufe von	find
$\mathcal{O}(\#\, \mathit{Vars})$	Aufrufe von	union

$\Longrightarrow$ Wir benötigen effiziente Union-Find-Datenstruktur :-)

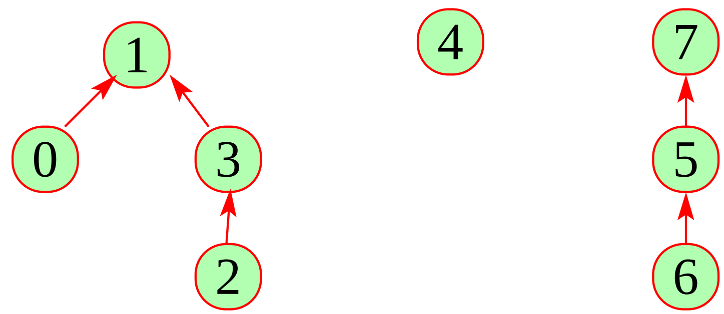
Idee:

Repräsentiere Partition von U als gerichteten Wald:

- Zu $u \in U$ verwalten wir einen Vater-Verweis $F[u]$.
- Elemente u mit $F[u] = u$ sind Wurzeln.

Einzelne Bäume sind Äquivalenzklassen.

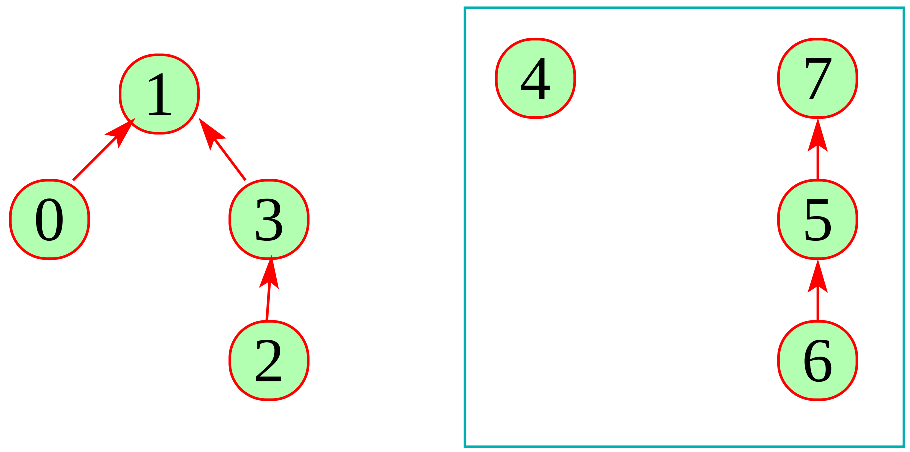
Ihre Wurzeln sind die Repräsentanten ...



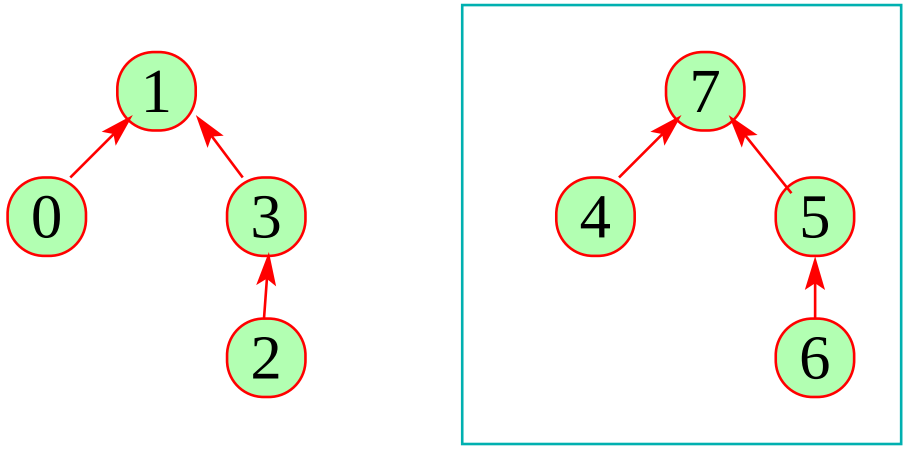
0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	3	1	4	7	5	7

$\longrightarrow$ find (π, u) folgt den Vater-Verweisen :-)

$\longrightarrow$ union (π, u_1, u_2) hängt den Vater-Verweis eines u_i um ...



0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	3	1	4	7	5	7



0	1	2	3	4	5	6	7

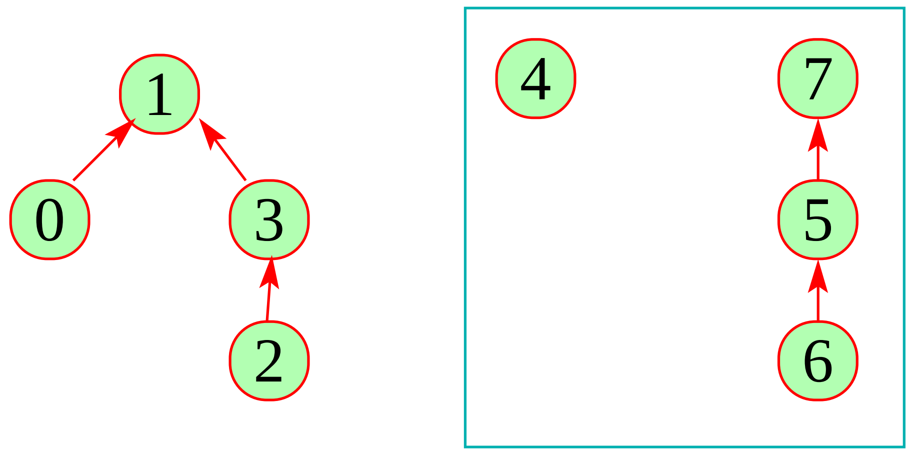
1	1	3	1	7	7	5	7

Die Kosten:

union	:	$\mathcal{O}(1)$	:-)
find	:	$\mathcal{O}(depth(\pi))$	:-(

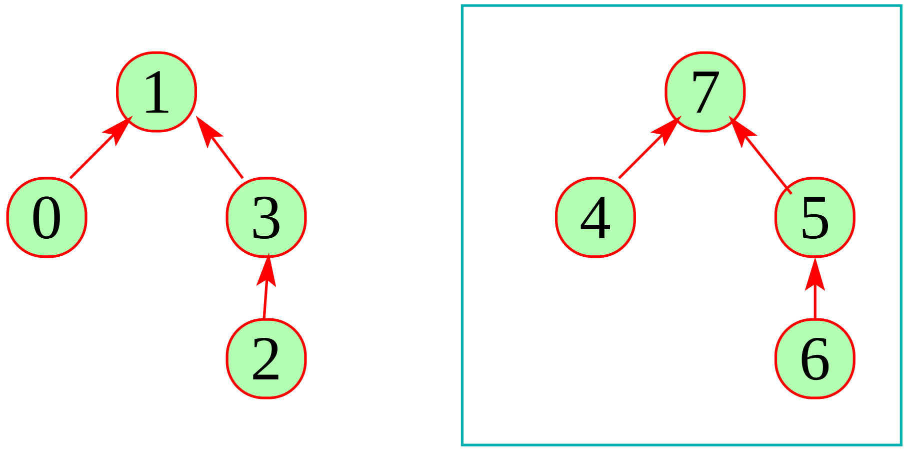
Strategie zur Vermeidung tiefer Bäume:

- Hänge den kleineren Baum unter den größeren !
- Benutze find , um Pfade zu komprimieren ...

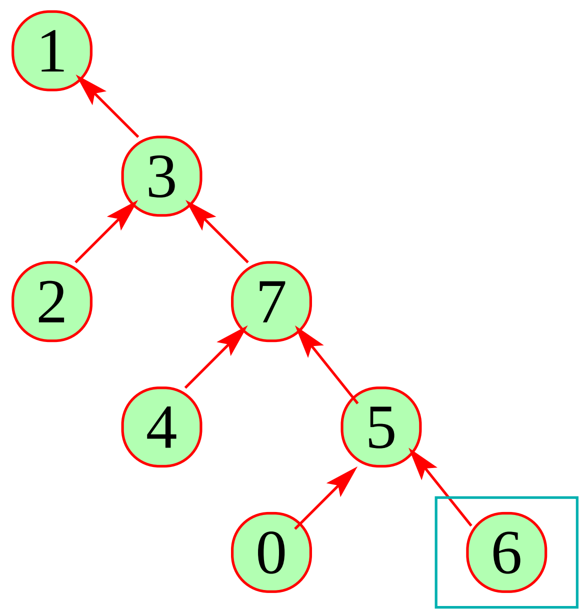


0	1	2	3	4	5	6	7

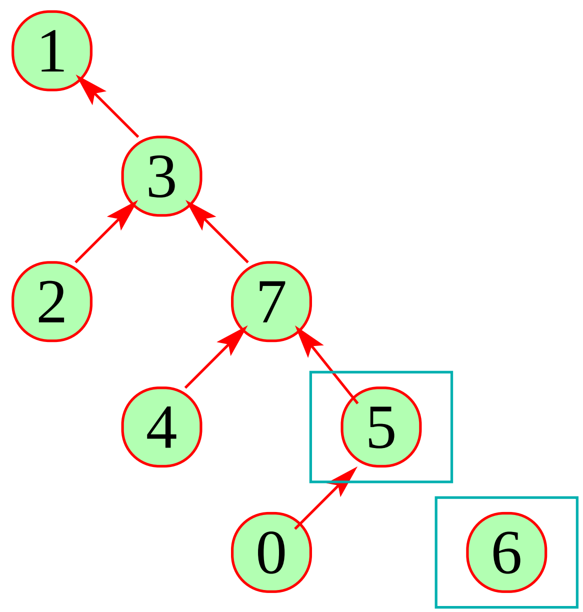
1	1	3	1	4	7	5	7



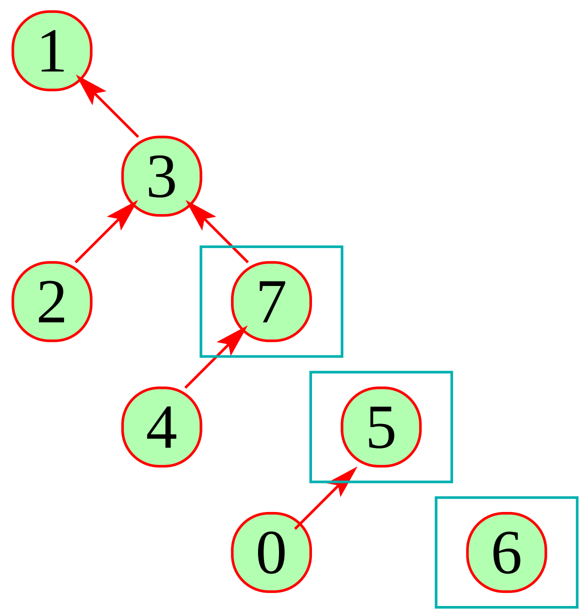
0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	3	1	7	7	5	7



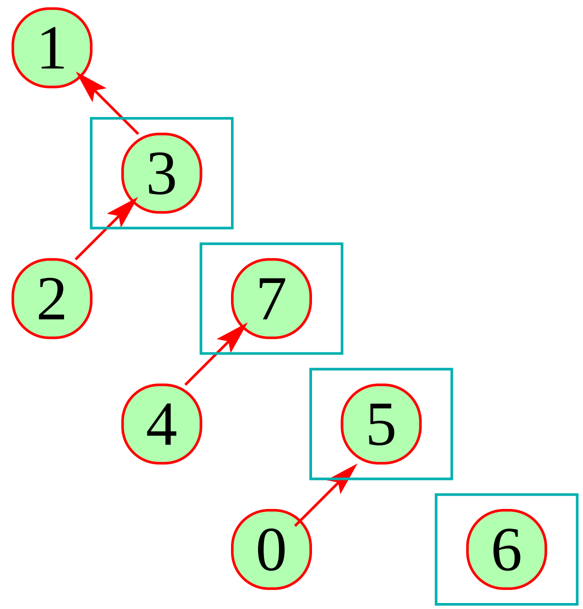
0	1	2	3	4	5	6	7
5	1	3	1	7	7	5	3



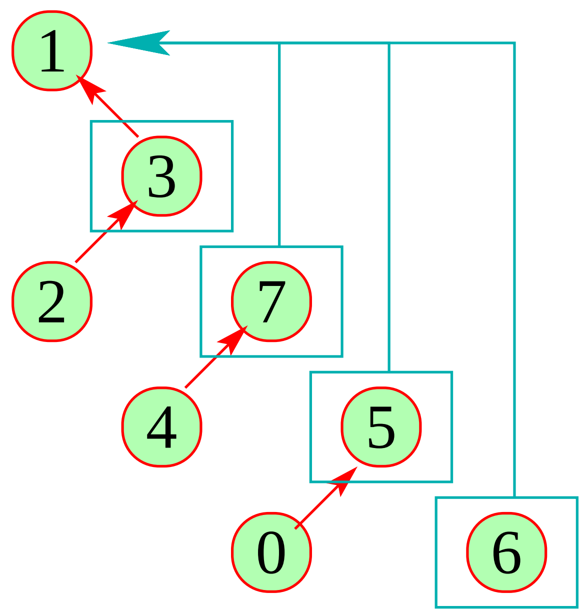
0	1	2	3	4	5	6	7
5	1	3	1	7	7	5	3



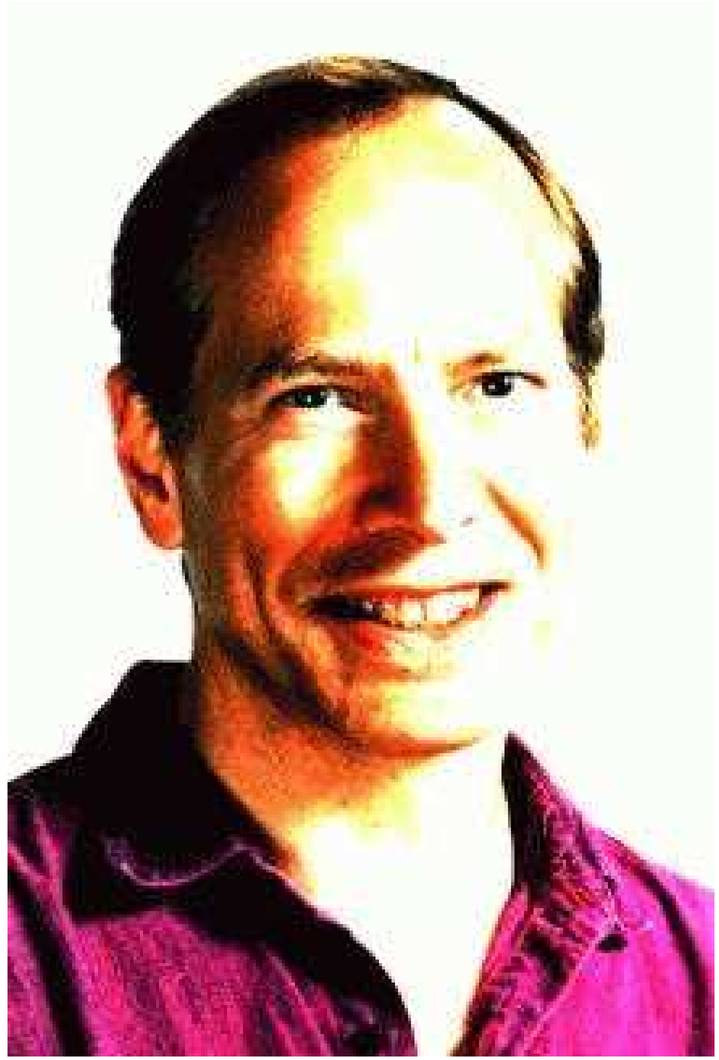
0	1	2	3	4	5	6	7
5	1	3	1	7	7	5	3



0	1	2	3	4	5	6	7
5	1	3	1	7	7	5	3



0	1	2	3	4	5	6	7
5	1	3	1	1	7	1	1



Robert Endre Tarjan, Princeton

Beachte:

- Mit dieser Datenstruktur dauern n union- und m find-Operationen $\mathcal{O}(n + m \cdot \alpha(n, n))$

  // α die inverse Ackermann-Funktion :-)

- Für unsere Anwendung müssen wir union nur so modifizieren, dass an den Wurzeln nach Möglichkeit Elemente aus *Vars* stehen.

- Diese Modifikation vergrößert die asymptotische Laufzeit nicht :-)

Fazit:

Die Analyse ist blitzschnell — findet aber nicht sehr viel heraus.

Exkurs 3: Fixpunkt-Algorithmen

Betrachte: $x_i \sqsupseteq f_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n$

Beobachtung:

RR-Iteration ist ineffizient:

→ Wir benötigen eine ganze Runde, um Terminierung festzustellen :-(

→ Ändert sich in einer Runde der Wert nur einer Variable, berechnen wir trotzdem alle neu :-(

→ Die praktische Laufzeit hängt von der Reihenfolge der Variablen ab :-(

Idee: **Workset-Iteration**

Ändert eine Variable x_i ihren Wert, werten wir alle Variablen neu aus, die von x_i abhängen. Technisch benötigen wir:

→ die Mengen $Dep\ f_i$ der Variablen, auf die die Auswertung von f_i zugreift. Daraus berechnen wir:

$$I[x_i] = \{x_j \mid x_i \in Dep\ f_j\}$$

d.h. die Menge der x_j, die von x_i abhängen.

→ die Werte $D[x_i]$ der x_i, wobei anfangs $D[x_i] = \bot$;

→ Eine Menge W der Variablen, deren Wert neu berechnet werden muss ...

Der Algorithmus:

$$
\begin{array}{l}
W = \{x_1, \ldots, x_n\}; \\
\textsf{while } (W \neq \emptyset) \; \{ \\
\qquad \begin{array}{lll}
x_i & = & \textsf{extract}\, W; \\
t & = & f_i\, \textsf{eval}; \\
\end{array} \\
\qquad \textsf{if } (t \not\sqsubseteq D[x_i]) \; \{ \\
\qquad\qquad \begin{array}{lll}
D[x_i] & = & D[x_i] \sqcup t; \\
W & = & W \cup I[x_i]; \\
\end{array} \\
\qquad \} \\
\}
\end{array}
$$

wobei :

$$
\mathit{eval}\ x_j \quad = \quad D[x_j]
$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} x_1 &\supseteq \{a\} \cup x_3 \\ x_2 &\supseteq x_3 \cap \{a, b\} \\ x_3 &\supseteq x_1 \cup \{c\} \end{aligned}$$

	I
x_1	$\{x_3\}$
x_2	$\emptyset$
x_3	$\{x_1, x_2\}$

Beispiel:

$$\begin{array}{lll} x_1 & \supseteq & \{a\} \cup x_3 \\ x_2 & \supseteq & x_3 \cap \{a,b\} \\ x_3 & \supseteq & x_1 \cup \{c\} \end{array}$$

	I
x_1	$\{x_3\}$
x_2	$\emptyset$
x_3	$\{x_1, x_2\}$

$D[x_1]$	$D[x_2]$	$D[x_3]$	W
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\boxed{x_1}, x_2, x_3$
$\{a\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\boxed{x_2}, x_3$
$\{a\}$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\boxed{x_3}$
$\{a\}$	$\emptyset$	$\{a,c\}$	$\boxed{x_1}, x_2$
$\{a,c\}$	$\emptyset$	$\{a,c\}$	$\boxed{x_3}, x_2$
$\{a,c\}$	$\emptyset$	$\{a,c\}$	$\boxed{x_2}$
$\{a,c\}$	$\{a\}$	$\{a,c\}$	$\emptyset$

Theorem

Sei $x_i \sqsupseteq f_i\,(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$ ein Ungleichungssystem über dem vollständigen Verband $\mathbb{D}$ der Höhe $h > 0$.

(1) Der Algorithmus terminiert nach maximal $h \cdot N$ Auswertungen rechter Seiten, wobei

$$N = \sum_{i=1}^{n} (1 + \#\,(\mathit{Dep}\; f_i)) \qquad // \quad \text{Größe des Systems} \quad \text{:-)}$$

(2) Der Algorithmus liefert eine Lösung.
Sind alle f_i monoton, liefert er die kleinste.

Beweis:

Zu (1):

Jede Variable x_i kann nur h mal ihren Wert ändern :-)

Dann wird die Menge $I[x_i]$ zu W hinzu gefügt.

Damit ist die Anzahl an Auswertungen:

$$
\begin{array}{ll}
\leq & n + \sum_{i=1}^{n} (h \cdot \# (I[x_i])) \\
= & n + h \cdot \sum_{i=1}^{n} \# (I[x_i]) \\
= & n + h \cdot \sum_{i=1}^{n} \# (\mathit{Dep}\ f_i) \\
\leq & h \cdot \sum_{i=1}^{n} (1 + \# (\mathit{Dep}\ f_i)) \\
= & h \cdot N
\end{array}
$$

Zu (2):

wir betrachten nur die Aussage für monotone f_i .

Sei D_0 die kleinste Lösung. Man zeigt:

- $D_0[x_i] \sqsupseteq D[x_i]$ (zu jedem Zeitpunkt)
- $D[x_i] \not\sqsupseteq f_i \,\text{eval} \implies x_i \in W$ (am Ende des Rumpfs)
- Bei Terminierung liefert der Algo eine Lösung :-))

Diskussion:

- Im Beispiel werden tatsächlich weniger Auswertungen rechter Seiten benötigt als bei RR-Iteration :-)
- Der Algo funktioniert auch für nicht-monotone f_i :-)
- Für monotone f_i kann man den Algo vereinfachen:

$$\boxed{D[x_i] = D[x_i] \sqcup t;} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{D[x_i] = \qquad t;}$$

- Für Widening ersetzt man:

$$\boxed{D[x_i] = D[x_i] \sqcup t;} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{D[x_i] = D[x_i] \sqcup\!\!\!\!\sqcup\, t;}$$

- Für Narrowing ersetzt man:

$$\boxed{D[x_i] = D[x_i] \sqcup t;} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{D[x_i] = D[x_i] \sqcap\!\!\!\!\sqcap\, t;}$$

Achtung:

- Der Algorithmus benötigt die Variablen-Abhängigkeiten *Dep* f_i .

  In unseren bisherigen Anwendungen waren die offensichtlich. Das muss nicht immer so sein :-(

- Wir benötigen eine Strategie für extract , die festlegt, welche Variable als nächstes auszuwerten ist.

- Am besten wäre es, wenn wir erst auswerten, dann auf das Ergebnis zugreifen ... :-)

$\Longrightarrow$ rekursive Auswertung ...

Idee:

→ Greifen wir in f_i auf ein x_j zu, werten wir erst rekursiv aus. Dann fügen wir x_i zu $I[x_j]$ hinzu :-)

$$\begin{aligned} \text{eval } x_i \; x_j \;\; = \;\; & \text{solve } x_j; \\ & I[x_j] = I[x_j] \cup \{x_i\}; \\ & D[x_j]; \end{aligned}$$

→ Damit die Rekursion nicht unendlich absteigt, verwalten wir die Menge *Stable* von Variablen, für die solve den Wert nachschlägt :-)

Anfangs ist $\mathit{Stable} = \emptyset$ ...

Die Funktion solve :

$$
\begin{array}{lll}
\mathsf{solve}\ x_i & = & \mathsf{if}\ (x_i \notin \mathit{Stable})\ \{ \\
& & \qquad \mathit{Stable} = \mathit{Stable} \cup \{x_i\}; \\
& & \qquad t = f_i\,(\mathsf{eval}\ \ x_i); \\
& & \qquad \mathsf{if}\ (t \not\sqsubseteq D[x_i])\ \{ \\
& & \qquad\qquad W = I[x_i]; \quad I[x_i] = \emptyset; \\
& & \qquad\qquad D[x_i] = D[x_i] \sqcup t; \\
& & \qquad\qquad \mathit{Stable} = \mathit{Stable} \backslash W; \\
& & \qquad\qquad \mathsf{app}\ \ \mathsf{solve}\ \ W; \\
& & \qquad \} \\
& & \}
\end{array}
$$

Helmut Seidl, TU München ;-)

Beispiel:

Betrachte unser Standard-Beispiel:

$$\begin{array}{lll} x_1 & \supseteq & \{a\} \cup x_3 \\ x_2 & \supseteq & x_3 \cap \{a, b\} \\ x_3 & \supseteq & x_1 \cup \{c\} \end{array}$$

Dann sieht ein Trace des Fixpunkt-Algorithmus etwa so aus:

solve x_2	eval x_2 x_3	solve x_3	eval x_3 x_1	solve x_1	eval x_1 x_3	solve x_3
						stable!
					$I[x_3] = \{x_1\}$	
					$\Rightarrow \quad \emptyset$	
				$\boxed{D[x_1] = \{a\}}$		
			$I[x_1] = \{x_3\}$			
			$\Rightarrow \quad \{a\}$			
		$\boxed{D[x_3] = \{a, c\}}$				
		$I[x_3] = \emptyset$				
		solve x_1	eval x_1 x_3	solve x_3		
				stable!		
			$I[x_3] = \{x_1\}$			
			$\Rightarrow \quad \{a, c\}$			
		$\boxed{D[x_1] = \{a, c\}}$				
		$I[x_1] = \emptyset$				
		solve x_3	eval x_3 x_1	solve x_1		
				stable!		
			$I[x_1] = \{x_3\}$			
			$\Rightarrow \quad \{a, c\}$			
		$\boxed{\text{ok}}$				
	$I[x_3] = \{x_1, x_2\}$					
	$\Rightarrow \quad \{a, c\}$					
$\boxed{D[x_2] = \{a\}}$						