Informatik 2

Wintersemester 2008

Helmut Seidl

Institut für Informatik
TU München

0 Allgemeines

Inhalt dieser Vorlesung:

- Korrektheit von Programmen;
- Funktionales Programmieren mit OCaml :-)

1 Korrektheit von Programmen

- Programmierer machen Fehler :-)
- Programmierfehler können teuer sein, z.B. wenn eine Rakete explodiert, ein firmenwichtiges System für Stunden ausfällt ...
- In einigen Systemen dürfen keine Fehler vorkommen, z.B. Steuerungssoftware für Flugzeuge, Signalanlagen für Züge, Airbags in Autos ...

Problem:

Wie können wir sicherstellen, dass ein Programm das richtige tut?

Ansätze:

- Sorgfältiges Vorgehen bei der Software-Entwicklung;
- Systematisches Testen

  $\Longrightarrow$ formales Vorgehensmodell (Software Engineering)
- Beweis der Korrektheit

  $\Longrightarrow$ Verifikation

Ansätze:

- Sorgfältiges Vorgehen bei der Software-Entwicklung;
- Systematisches Testen

  $\Longrightarrow$ formales Vorgehensmodell (Software Engineering)
- Beweis der Korrektheit

  $\Longrightarrow$ Verifikation

Hilfsmittel: Zusicherungen

Beispiel:

```
public class GGT extends MiniJava {
   public static void main (String[] args) {
   int x, y, a, b;
   a = read(); b = read();
   x = a; y = b;
   while (x != y)
      if (x > y) x = x - y;
      else       y = y - x;

   assert(x != y);

   write(x);
   }  // Ende der Definition von main();
}     // Ende der Definition der Klasse GGT;
```

Kommentare:

- Die statische Methode `assert()` erwartet ein Boolesches Argument.
- Bei normaler Programm-Ausführung wird jeder Aufruf `assert(e);` ignoriert :-)
- Starten wir Java mit der Option: –ea (enable assertions), werden die `assert`-Aufrufe ausgewertet:

  ⇒ Liefert ein Argument-Ausdruck `true`, fährt die Programm-Ausführung fort.

  ⇒ Liefert ein Argument-Ausdruck `false`, wird ein Fehler `AssertionError` geworfen.

Achtung:

Der Laufzeit-Test soll eine Eigenschaft des Programm-Zustands bei Erreichen eines Programm-Punkts überprüfen.

Der Test sollte keineswegs den Programm-Zustand verändern !!!

Sonst zeigt das beobachtete System ein anderes Verhalten als das unbeobachtete ???

Achtung:

Der Laufzeit-Test soll eine Eigenschaft des Programm-Zustands bei Erreichen eines Programm-Punkts überprüfen.

Der Test sollte keineswegs den Programm-Zustand verändern !!!

Sonst zeigt das beobachtete System ein anderes Verhalten als das unbeobachtete ???

Tipp:

Um Eigenschaften komplizierterer Datenstrukturen zu überprüfen, empfiehlt es sich, getrennt Inspector-Klassen anzulegen, deren Objekte eine Datenstruktur störungsfrei besichtigen können :-)

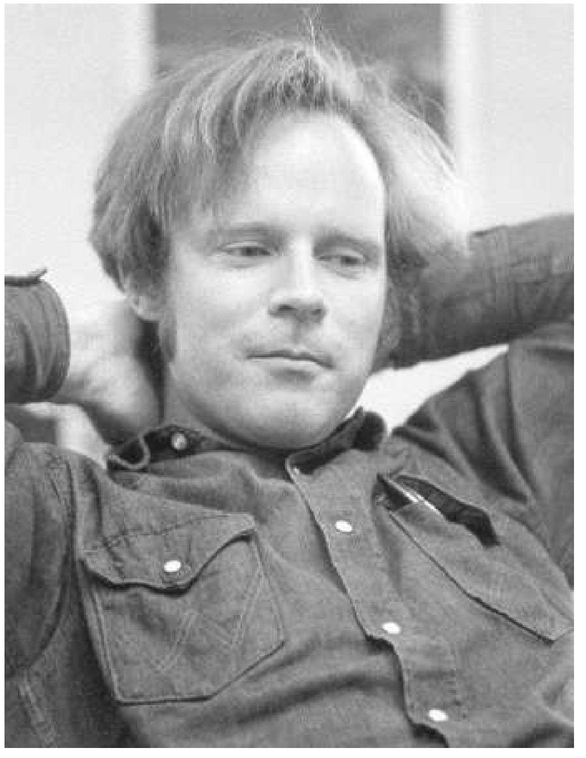
Problem:

- Es gibt i.a. sehr viele Programm-Ausführungen :-(
- Einhalten der Zusicherungen kann das Java-Laufzeit-System immer nur für eine Program-Ausführung überprüfen :-(

$\Longrightarrow$

Wir benötigen eine generelle Methode, um das Einhalten einer Zusicherung zu garantieren ...

1.1 Verifikation von Programmen



Robert W Floyd, Stanford U. (1936 – 2001)

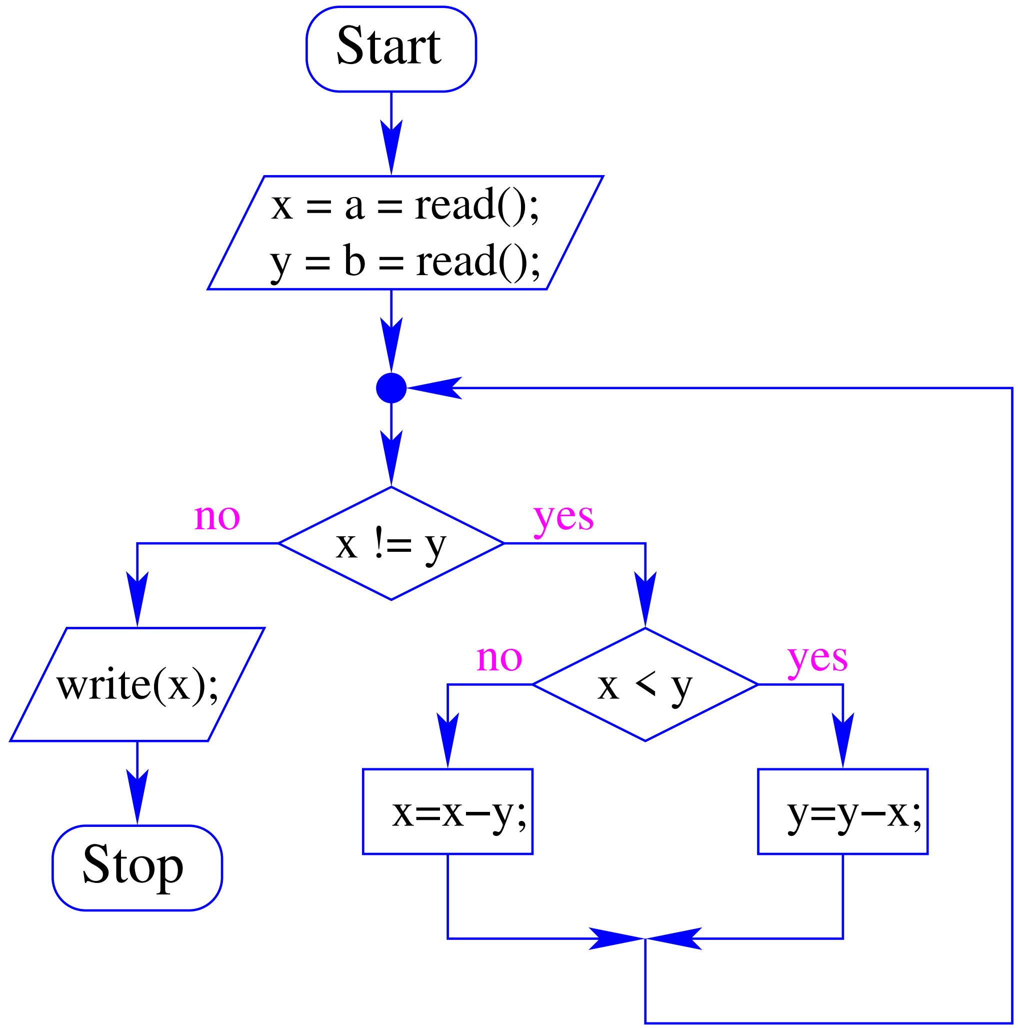
Vereinfachung:

Wir betrachten erst mal nur MiniJava ;-)

Idee:

- Wir schreiben eine Zusicherung an jeden Programmpunkt :-)
- Wir überprüfen lokal, dass die Zusicherungen von den einzelnen Anweisungen im Programm eingehalten werden.

Unser Beispiel:



Diskussion:

- Die Programmpunkte entsprechen den Kanten im Kontrollfluss-Diagramm :-)
- Wir benötigen eine Zusicherung pro Kante ...

Hintergrund:

$d \mid x$ gilt genau dann wenn $x = d \cdot z$ für eine ganze Zahl z.

Für ganze Zahlen x, y sei $ggT(x, y) = 0$, falls $x = y = 0$ und andernfalls die größte ganze Zahl d, die x und y teilt.

Dann gelten unter anderem die folgenden Gesetze:

$$
\begin{aligned}
ggT(x,0) &= |x| \\
ggT(x,x) &= |x| \\
ggT(x,y) &= ggT(x, y-x) \\
ggT(x,y) &= ggT(x-y, y)
\end{aligned}
$$

Idee für das Beispiel:

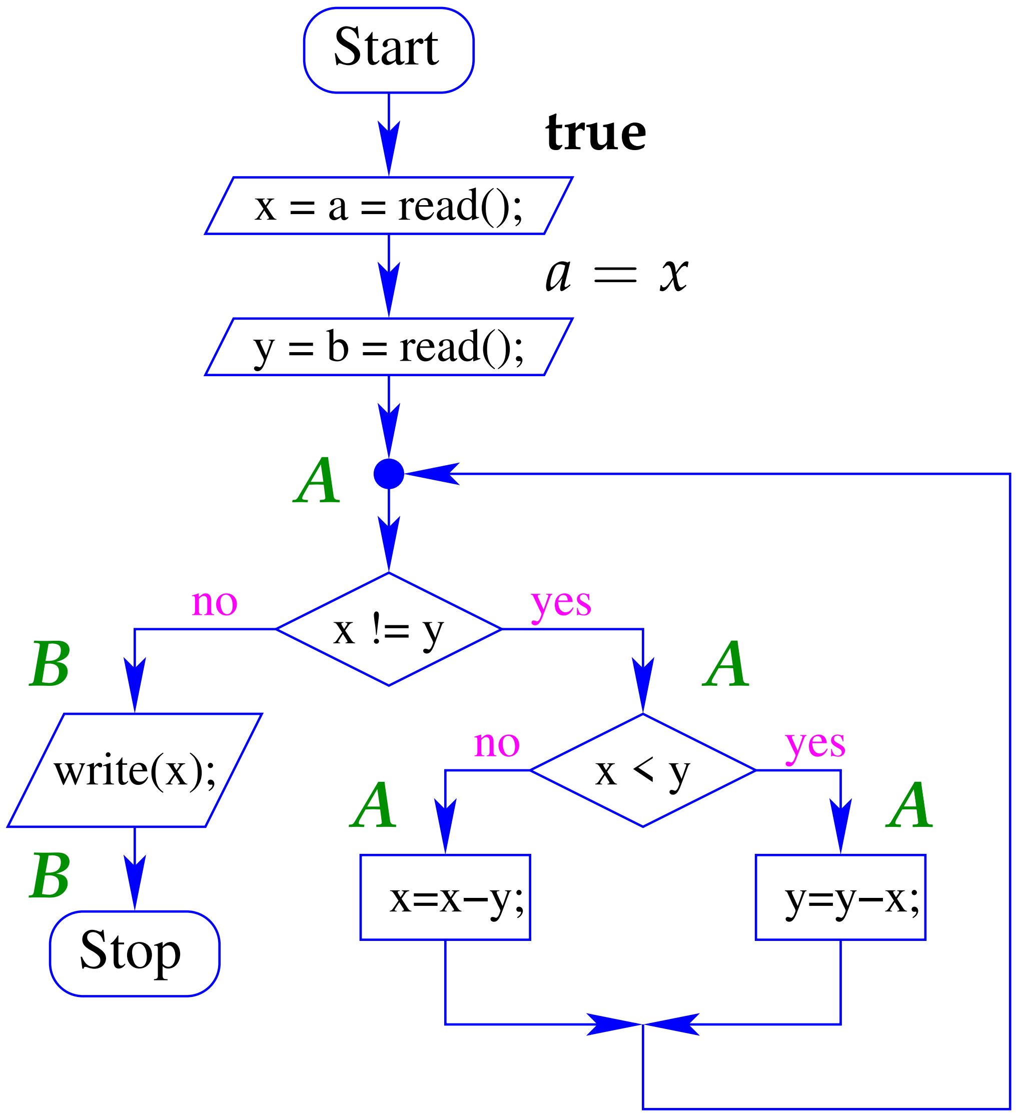
- Am Anfang gilt nix :-)
- Nach `a=read(); x=a;` gilt $a = x$:-)
- Vor Betreten und während der Schleife soll gelten:

$$A \quad \equiv \quad ggT(a,b) = ggT(x,y)$$

- Am Programm-Ende soll gelten:

$$B \quad \equiv \quad A \wedge x = y$$

Unser Beispiel:



Frage:

Wie überprüfen wir, dass Zusicherungen lokal zusammen passen?

Teilproblem 1: Zuweisungen

Betrachte z.B. die Zuweisung:	`x = y+z;`		
Damit nach der Zuweisung gilt:	$x > 0$,	//	Nachbedingung
muss vor der Zuweisung gelten:	$y + z > 0$.	//	Vorbedingung

Allgemeines Prinzip:

- Jede Anweisung transformiert eine Nachbedingung B in eine minimale Anforderung, die vor Ausführung erfüllt sein muss, damit B nach der Ausführung gilt :-)

Allgemeines Prinzip:

- Jede Anweisung transformiert eine Nachbedingung B in eine minimale Anforderung, die vor Ausführung erfüllt sein muss, damit B nach der Ausführung gilt :-)
- Im Falle einer Zuweisung `x = e;` ist diese schwächste Vorbedingung (engl.: weakest precondition) gegeben durch

$$\mathbf{WP}[\![\texttt{x = e;}]\!]\,(B) \quad \equiv \quad B[e/x]$$

Das heißt: wir substituieren einfach in B überall x durch e !!!

Allgemeines Prinzip:

- Jede Anweisung transformiert eine Nachbedingung B in eine minimale Anforderung, die vor Ausführung erfüllt sein muss, damit B nach der Ausführung gilt :-)
- Im Falle einer Zuweisung `x = e;` ist diese schwächste Vorbedingung (engl.: weakest precondition) gegeben durch

  $$\mathbf{WP}[\![\texttt{x = e;}]\!]\,(B) \quad \equiv \quad B[e/x]$$

  Das heißt: wir substituieren einfach in B überall x durch e !!!
- Eine beliebige Vorbedingung A für eine Anweisung s ist gültig, sofern

  $$A \Rightarrow \mathbf{WP}[\![s]\!]\,(B)$$

  // A impliziert die schwächste Vorbedingung für B.

Beispiel:

Zuweisung:	`x = x-y;`
Nachbedingung:	$x > 0$
schwächste Vorbedingung:	$x - y > 0$
stärkere Vorbedingung:	$x - y > 2$
noch stärkere Vorbedingung:	$x - y = 3$:-)

... im GGT-Programm (1):

Zuweisung:	`x = x-y;`
Nachbedingung:	A
schwächste Vorbedingung:	

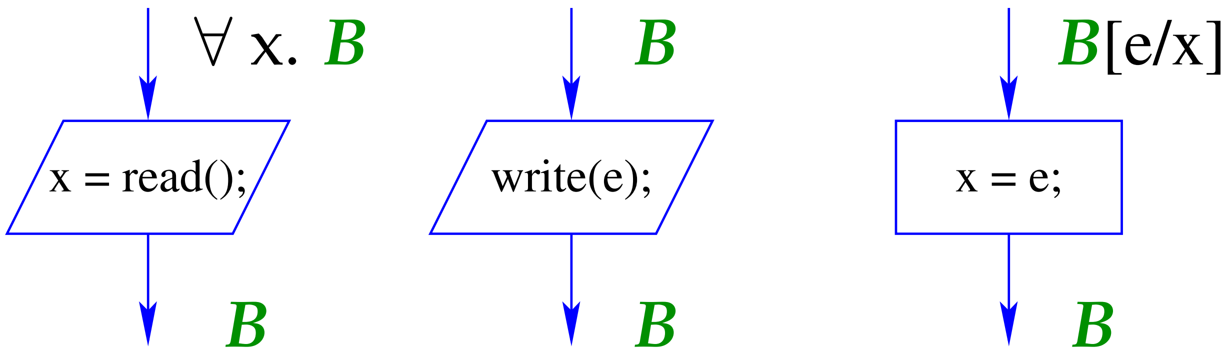
$$
\begin{aligned}
A[x-y/x] &\equiv ggT(a,b) = ggT(x-y,y) \\
&\equiv ggT(a,b) = ggT(x,y) \\
&\equiv A
\end{aligned}
$$

... im GGT-Programm (2):

Zuweisung:	`y = y-x;`
Nachbedingung:	A
schwächste Vorbedingung:	

$$\begin{aligned} A[y-x/y] &\equiv ggT(a,b) = ggT(x, y-x) \\ &\equiv ggT(a,b) = ggT(x,y) \\ &\equiv A \end{aligned}$$

Zusammenstellung:



$$\mathbf{WP}[\![\texttt{;}]\!](B) \equiv B$$

$$\mathbf{WP}[\![\texttt{x = e;}]\!](B) \equiv B[e/x]$$

$$\mathbf{WP}[\![\texttt{x = read();}]\!](B) \equiv \forall\, x.\, B$$

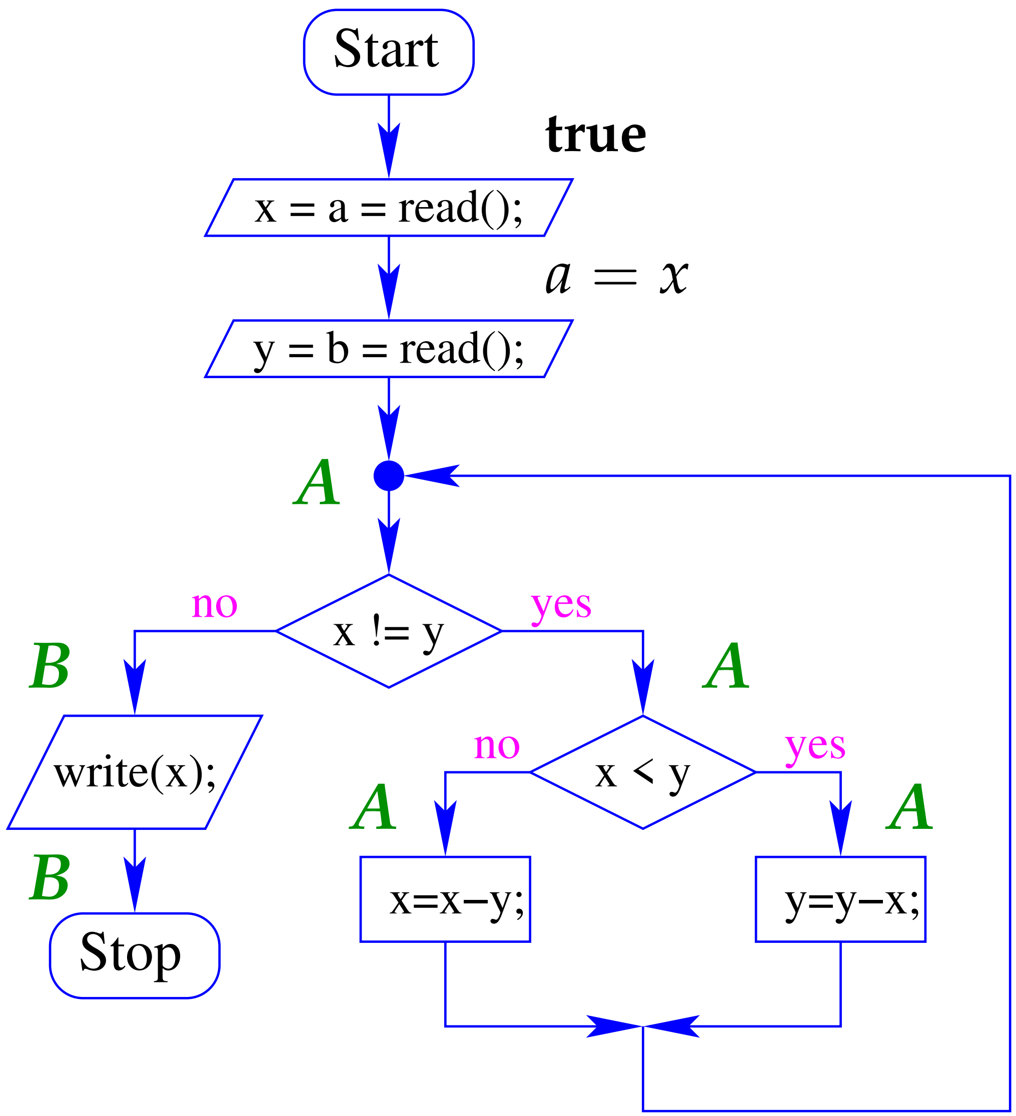
$$\mathbf{WP}[\![\texttt{write(e);}]\!](B) \equiv B$$

Diskussion:

- Die Zusammenstellung liefert für alle Aktionen jeweils die schwächsten Vorbedingungen für eine Nachbedingung B.
- Eine Ausgabe-Anweisung ändert keine Variablen. Deshalb ist da die schwächste Vorbedingung B selbst ;-)
- Eine Eingabe-Anweisung `x=read();` ändert die Variable `x` auf unvorhersehbare Weise.

  Damit nach der Eingabe B gelten kann, muss B vor der Eingabe für jedes mögliche `x` gelten ;-)

Orientierung:



Für die Anweisungen: `b = read(); y = b;` berechnen wir:

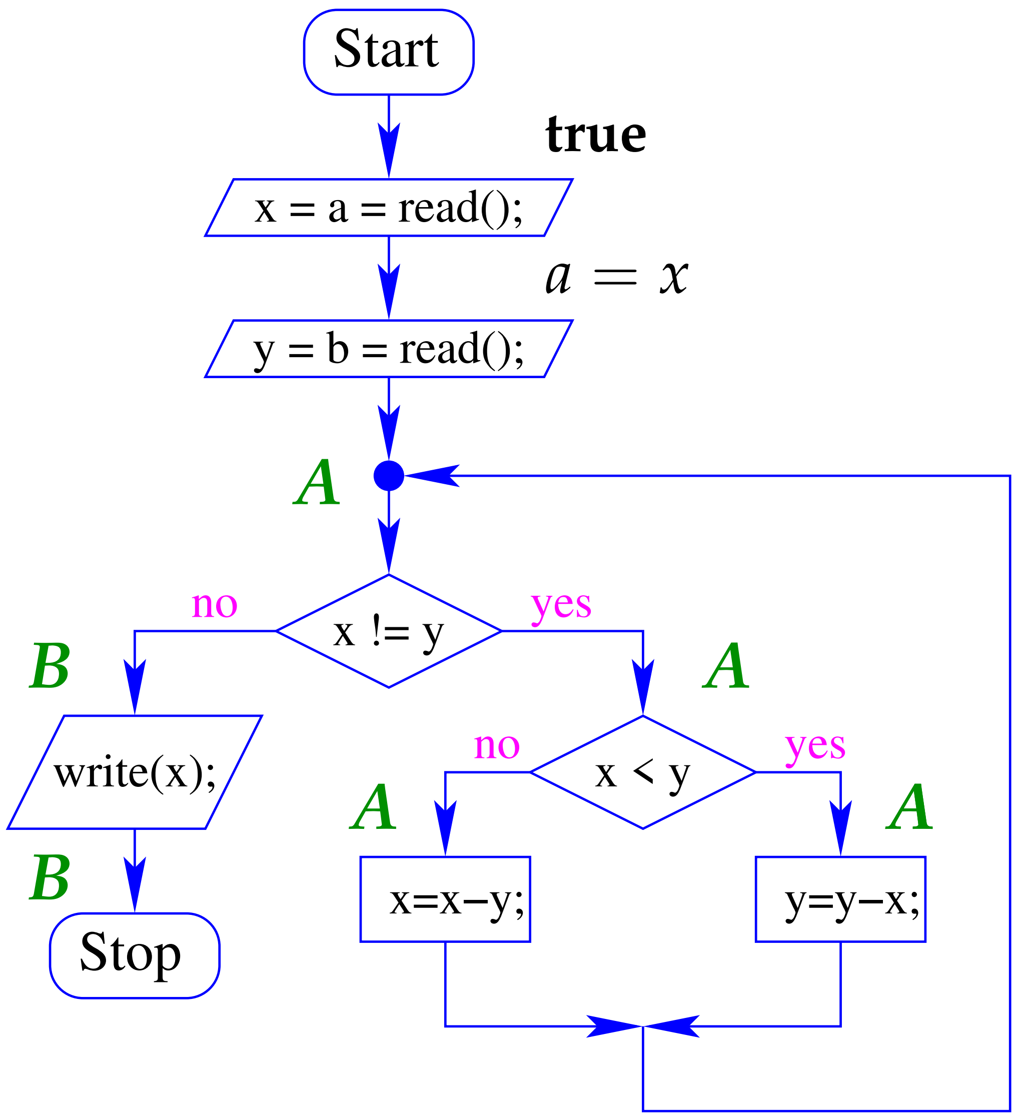
$$\begin{aligned}
\mathbf{WP}[\![\texttt{y = b;}]\!]\,(A) &\equiv A[b/y] \\
&\equiv ggT(a,b) = ggT(x,b)
\end{aligned}$$

Für die Anweisungen: `b = read(); y = b;` berechnen wir:

$$\begin{aligned}\mathbf{WP}[\![\texttt{y = b;}]\!]\,(A) &\equiv A[b/y] \\ &\equiv ggT(a,b) = ggT(x,b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{WP}[\![\texttt{b = read();}]\!]\,(ggT(a,b) = ggT(x,b)) & \\ &\equiv \forall\, b.\; ggT(a,b) = ggT(x,b) \\ &\Leftarrow a = x \qquad\qquad \text{:-)}\end{aligned}$$

Orientierung:

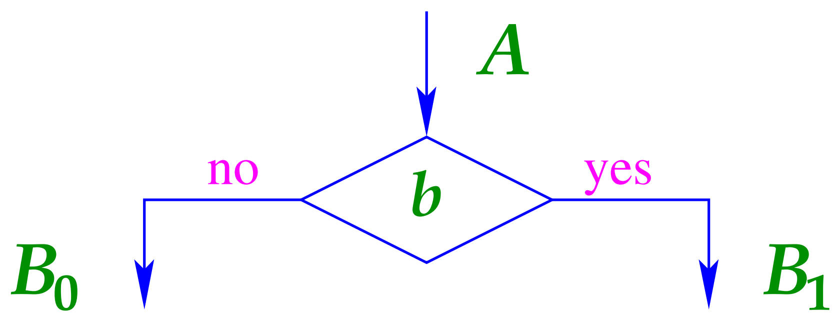


Für die Anweisungen: `a = read(); x = a;` berechnen wir:

$$\mathbf{WP}[\![\texttt{x = a;}]\!]\,(a = x) \equiv a = a \equiv \mathbf{true}$$

$$\mathbf{WP}[\![\texttt{a = read();}]\!]\,(\mathbf{true}) \equiv \forall\, a.\ \mathbf{true} \equiv \mathbf{true}$$:-)

Teilproblem 2: Verzweigungen



Es sollte gelten:

- $A \wedge \neg b \Rightarrow B_0$ und
- $A \wedge b \Rightarrow B_1$.

Das ist der Fall, falls A die schwächste Vorbedingung der Verzweigung:

$$\mathbf{WP}[\![b]\!]\,(B_0, B_1) \;\equiv\; ((\neg b) \Rightarrow B_0) \;\wedge\; (b \Rightarrow B_1)$$

impliziert :-)

Das ist der Fall, falls A die schwächste Vorbedingung der Verzweigung:

$$\mathbf{WP}[\![b]\!]\;(B_0, B_1) \;\equiv\; ((\neg b) \Rightarrow B_0) \;\wedge\; (b \Rightarrow B_1)$$

impliziert :-)

Die schwächste Vorbedingung können wir umschreiben in:

$$\begin{aligned}\mathbf{WP}[\![b]\!]\;(B_0, B_1) \quad &\equiv \quad (b \vee B_0) \wedge (\neg b \vee B_1) \\ &\equiv \quad (\neg b \wedge B_0) \vee (b \wedge B_1) \vee (B_0 \wedge B_1) \\ &\equiv \quad (\neg b \wedge B_0) \vee (b \wedge B_1)\end{aligned}$$

Beispiel:

$$B_0 \equiv x > y \wedge y > 0 \qquad\qquad B_1 \equiv x > 0 \wedge y > x$$

Sei b die Bedingung $y > x$.

Dann ist die schwächste Vorbedingung:

Beispiel:

$$B_0 \equiv x > y \wedge y > 0 \qquad\qquad B_1 \equiv x > 0 \wedge y > x$$

Sei b die Bedingung $y > x$.

Dann ist die schwächste Vorbedingung:

$$\begin{aligned} & (x > y \wedge y > 0) \vee (x > 0 \wedge y > x) \\ \equiv \quad & x > 0 \wedge y > 0 \wedge x \neq y \end{aligned}$$

... im GGT-Beispiel:

$$
\begin{aligned}
b &\equiv y > x \\
\\
\neg b \wedge A &\equiv x \geq y \wedge ggT(a,b) = ggT(x,y) \\
b \wedge A &\equiv y > x \wedge ggT(a,b) = ggT(x,y)
\end{aligned}
$$

... im GGT-Beispiel:

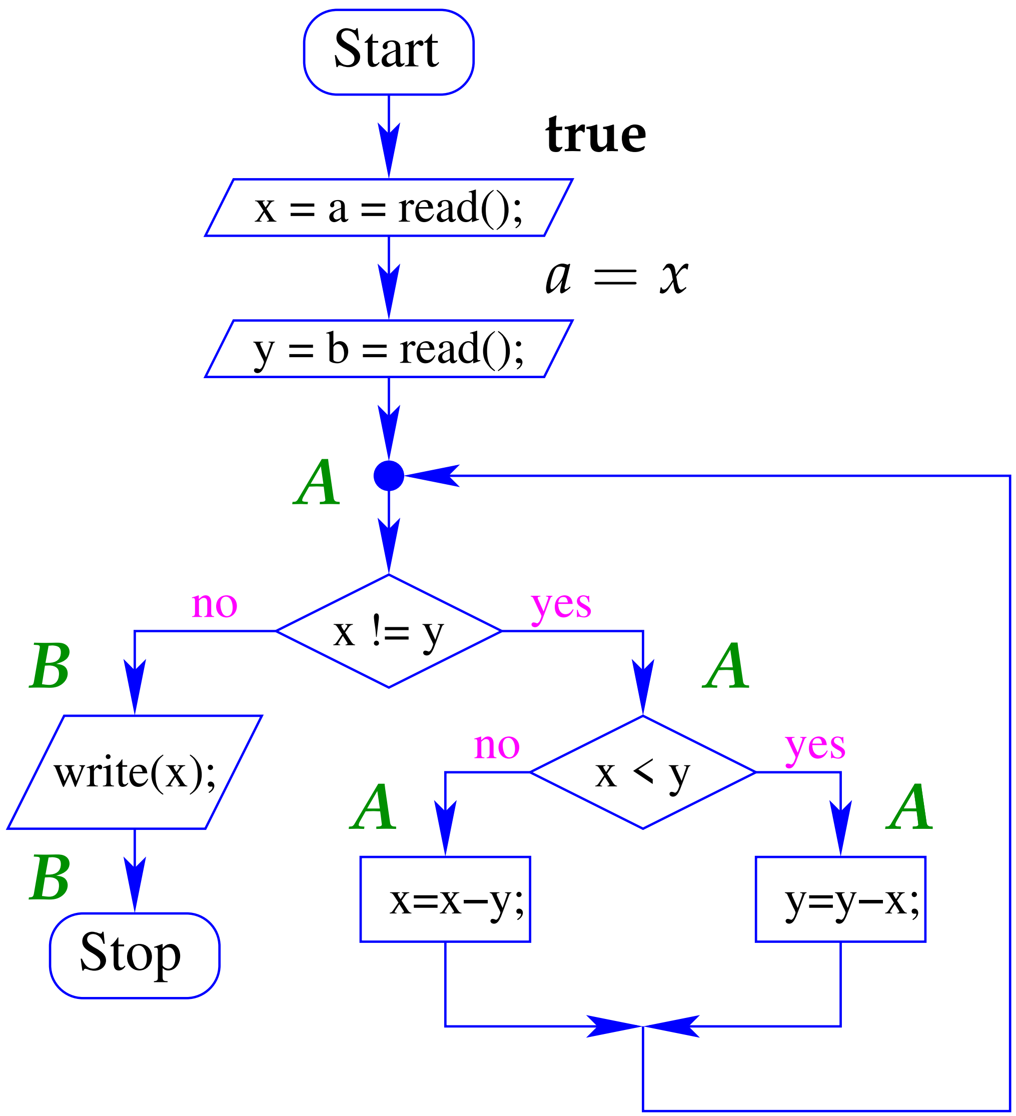
$$
\begin{array}{rcl}
b & \equiv & y > x \\
\\
\neg b \wedge A & \equiv & x \geq y \wedge ggT(a,b) = ggT(x,y) \\
b \wedge A & \equiv & y > x \wedge ggT(a,b) = ggT(x,y)
\end{array}
$$

$\Longrightarrow$ Die schwächste Vorbedingung ist:

$$ggT(a,b) = ggT(x,y)$$

... also genau A :-)

Orientierung:



Analog argumentieren wir für die Zusicherung vor der Schleife:

$$\begin{aligned} b &\equiv y \neq x \\[1em] \neg b \wedge B &\equiv B \\ b \wedge A &\equiv A \wedge x \neq y \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$ $A \equiv (A \wedge x = y) \vee (A \wedge x \neq y)$ ist die schwächste Vorbedingung für die Verzweigung :-)

Zusammenfassung der Methode:

- Annotiere jeden Programmpunkt mit einer Zusicherung.
- Überprüfe für jede Anweisung s zwischen zwei Zusicherungen A und B, dass A die schwächste Vorbedingung von s für B impliziert, d.h.:

$$A \Rightarrow \mathbf{WP}[\![s]\!](B)$$

- Überprüfe entsprechend für jede Verzweigung mit Bedingung b, ob die Zusicherung A vor der Verzweigung die schwächste Vorbedingung für die Nachbedingungen B_0 und B_1 der Verzweigung impliziert, d.h.

$$A \Rightarrow \mathbf{WP}[\![b]\!]\ (B_0, B_1)$$

Solche Annotierungen nennen wir lokal konsistent.