3.4 Einige Listen-Funktionen

```
let rec map f = function
            [] -> []
      | x::xs -> f x :: map f xs

let rec  fold_left f a = function
            [] -> a
      | x::xs -> fold_left f (f a x) xs

let rec fold_right f = function
            [] -> fun b -> b
      | x::xs -> fun b -> f x (fold_right f xs b)
```

```
let rec  find_opt f = function
           [] -> None
       | x::xs -> if f x then Some x
                  else find_opt f xs
```

Beachte:

- → Diese Funktionen abstrahieren von dem Verhalten der Funktion `f`. Sie spezifizieren das Rekursionsverhalten gemäß der Listenstruktur, unabhängig von den Elementen der Liste.
- → Daher heißen solche Funktionen Rekursions-Schemata oder (Listen-)Funktionale.
- → Listen-Funktionale sind unabhängig vom Typ der Listenelemente. (Diesen muss nur die Funktion `f` kennen :-)
- → Funktionen, die gleich strukturierte Eingaben verschiedenen Typs verarbeiten können, heißen polymorph.

3.5 Polymorphe Funktionen

Das Ocaml-System inferiert folgende Typen für diese Funktionale:

```
map : ('a -> 'b) -> 'a list -> 'b list
fold_left : ('a -> 'b -> 'a) -> 'a -> 'b list -> 'a
fold_right : ('a -> 'b -> 'b) -> 'a list -> 'b -> 'b
find_opt : ('a -> bool) -> 'a list -> 'a option
```

→ `'a` und `'b` sind Typvariablen. Sie können durch jeden Typ ersetzt (instanziiert) werden (aber an jedem Vorkommen durch den gleichen Typ).

→ Durch partielle Anwendung auf eine Funktion können die Typvariablen instanziiert werden:

```
# Char.chr;;
val : int -> char = <fun>
# map Char.chr;;
- : int list -> char list = <fun>

# fold_left (+);;
val it : int -> int list -> int = <fun>
```

→ Wenn man einem Funktional eine polymorphe Funktion als Argument gibt, ist das Ergebnis wieder polymorph:

```
# let cons_r xs x = x::xs;;
val cons_r : 'a list -> 'a -> 'a list = <fun>
# let rev l = fold_left cons_r [] l;;
val rev : 'a list -> 'a list = <fun>
# rev [1;2;3];;
- : int list = [3; 2; 1]
# rev [true;false;false];;
- : bool list = [false; false; true]
```

Ein paar der einfachsten polymorphen Funktionen:

```
let     compose f g x = f (g x)
let     twice f x = f (f x)
let rec iter f g x = if g x then x else iter f g (f x);;

val compose : ('a -> 'b) -> ('c -> 'a) -> 'c -> 'b = <fun>
val twice : ('a -> 'a) -> 'a -> 'a = <fun>
val iter : ('a -> 'a) -> ('a -> bool) -> 'a -> 'a = <fun>

# compose neg neg;;
- : bool -> bool = <fun>
# compose neg neg true;;
- : bool = true;;
# compose Char.chr plus2 65;;
- : char = 'C'
```

3.6 Polymorphe Datentypen

Man kann sich auch poloymorphe Datentypen definieren:

```
type 'a tree = Leaf of 'a
             | Node of ('a tree * 'a tree)
```

→ `tree` heißt Typkonstruktor, weil er aus einem anderen Typ (seinem Parameter `'a`) einen neuen Typ erzeugt.

→ Auf der rechten Seite dürfen nur die Typvariablen vorkommen, die auf der linken Seite als Argument für den Typkonstruktor stehen.

→ Die Anwendung der Konstruktoren auf Daten instanziiert die Typvariable(n):

```
# Leaf 1;;
- : int tree = Leaf 1
# Node (Leaf ('a',true), Leaf ('b',false));;
- : (char * bool) tree = Node (Leaf ('a', true),
                               Leaf ('b', false))
```

Funktionen auf polymorphen Datentypen sind typischerweise wieder polymorph ...

```
let rec  size = function
       Leaf _      -> 1
    |  Node(t,t') -> size t + size t'

let rec flatten = function
       Leaf x      -> [x]
     | Node(t,t') -> flatten t @ flatten t'

let flatten1 t = let rec doit = function
                      (Leaf x, xs) -> x :: xs
                  | (Node(t,t'), xs) -> let xs = doit (t',xs)
                                        in  doit (t,xs)
   in doit (t,[])
...
```

```
...
val size : 'a tree -> int = <fun>
val flatten : 'a tree -> 'a list = <fun>
val flatten1 : 'a tree -> 'a list = <fun>

# let t = Node(Node(Leaf 1,Leaf 5),Leaf 3);;
val t : int tree = Node (Node (Leaf 1, Leaf 5), Leaf 3)

# size t;;
- : int = 3
# flatten t;;
val : int list = [1;5;3]
# flatten1 t;;
val : int list = [1;5;3]
```

3.7 Anwendung: Queues

Gesucht:

Datenstruktur `'a queue`, die die folgenden Operationen unterstützt:

```
enqueue : 'a -> 'a queue -> 'a queue
dequeue : 'a queue  -> 'a option * 'a queue
is_empty : 'a queue -> bool
queue_of_list : 'a list -> 'a queue
list_of_queue : 'a queue -> 'a list
```

1. Idee:

- Repräsentiere die Schlange als eine Liste:

```
type 'a queue = 'a list
```

  Die Funktionen `is_empty`, `queue_of_list`, `list_of_queue` sind dann trivial :-)

1. Idee:

- Repräsentiere die Schlange als eine Liste:

```
type 'a queue = 'a list
```

  Die Funktionen `is_empty`, `queue_of_list`, `list_of_queue` sind dann trivial :-)

- Entnehmen heißt Zugreifen auf das erste Element der Liste:

```
let dequeue = function
      []    -> (None, [])
    | x::xs -> (Some x, xs)
```

1. Idee:

- Repräsentiere die Schlange als eine Liste:

```
type 'a queue = 'a list
```

  Die Funktionen `is_empty`, `queue_of_list`, `list_of_queue` sind dann trivial :-)

- Entnehmen heißt Zugreifen auf das erste Element der Liste:

```
let dequeue = function
      []    -> (None, [])
    | x::xs -> (Some x, xs)
```

- Einfügen bedeutet hinten anhängen:

```
let enqueue x xs = xs @ [x]
```

Diskussion:

- Der Operator `@` konkateniert zwei Listen.
- Die Implementierung ist sehr einfach :-)
- Entnehmen ist sehr billig :-)
- Einfügen dagegen kostet so viele rekursive Aufrufe von `@` wie die Schlange lang ist :-(
- Geht das nicht besser ??

2. Idee:

- Repräsentiere die Schlange als zwei Listen !!!

```
type 'a queue = Queue of 'a list * 'a list
let is_empty = function
                 Queue ([],[]) -> true
               | _             -> false
let queue_of_list list = Queue (list,[])
let list_of_queue = function
                 Queue (first,[])   -> first
               | Queue (first,last) ->
                        first @ List.rev last
```

- Die zweite Liste repräsentiert das Ende der Liste und ist deshalb in umgedrehter Anordnung ...

2. Idee (Fortsetzung):

- Einfügen erfolgt deshalb in der zweiten Liste:

```
let enqueue x (Queue (first,last)) =
                  Queue (first, x::last)
```

2. Idee (Fortsetzung):

- Einfügen erfolgt deshalb in der zweiten Liste:

```
let enqueue x (Queue (first,last)) =
                  Queue (first, x::last)
```

- Entnahme bezieht sich dagegen auf die erste Liste :-)

  Ist diese aber leer, wird auf die zweite zugegriffen ...

```
let dequeue = function
    Queue ([],last) -> (match List.rev last
                  with [] -> (None, Queue ([],[]))
                  | x::xs -> (Some x, Queue (xs,[])))
  | Queue (x::xs,last) -> (Some x, Queue (xs,last))
```

Diskussion:

- Jetzt ist Einfügen billig :-)
- Entnehmen dagegen kann so teuer sein, wie die Anzahl der Elemente in der zweiten Liste :-(
- Gerechnet aber auf jede Einfügung, fallen nur konstante Zusatzkosten an !!!

$\Longrightarrow$ amortisierte Kostenanalyse

3.8 Namenlose Funktionen

Wie wir gesehen haben, sind Funktionen Daten. Daten, z.B. `[1;2;3]` können verwendet werden, ohne ihnen einen Namen zu geben. Das geht auch für Funktionen:

```
# fun x y z -> x+y+z;;
- : int -> int -> int -> int = <fun>
```

- `fun` leitet eine Abstraktion ein.
  Der Name kommt aus dem λ-Kalkül.
- `->` hat die Funktion von `=` in Funktionsdefinitionen.
- Rekursive Funktionen können so nicht definiert werden, denn ohne Namen kann eine Funktion nicht in ihrem Rumpf vorkommen :-)

Alonzo Church, 1903–1995